

Rátz László Vándorgyűlés, Székesfehérvár

Béres Zoltán
beres@tippnet.rs

Algoritmusokkal kapcsolatos matematikafeladatok

2017. július 5. és 7.

Bevezető

Az algoritmus fogalmának „naiv” értelmezése:

Egy adott szabályrendszer szerint egymás után következő
lépések sorozata.

Előfordulási módja:

1. A feladat maga tartalmaz algoritmust.
2. A feladat megoldása során alkalmazunk algoritmust.

„...mindig azt kell csinálni, hogy...”

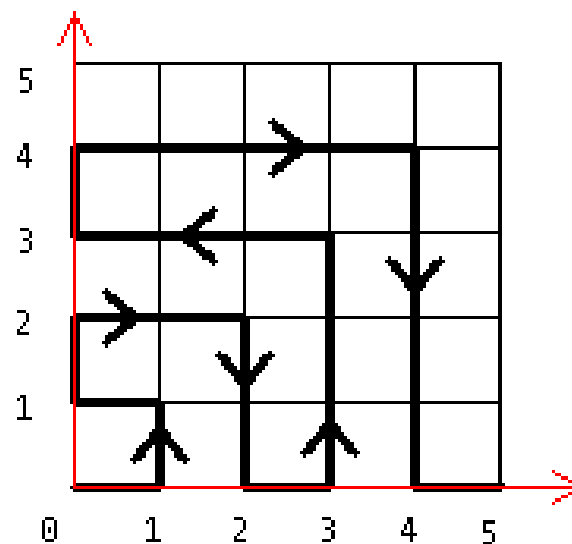
Általánosabban nézve szinte minden tevékenységben jelen van
az algoritmus.

1. Egy csiga a koordináta-rendszer origójából indul, és az ábrán látható módon folytatja útját. Másodpercenként 1 egységet tesz meg.

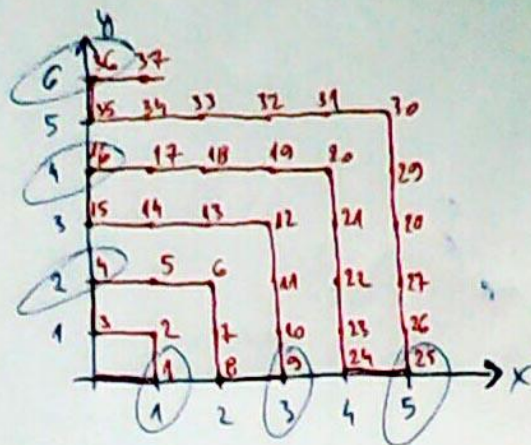
a) Melyik pontban lesz egy óra múlva?

b) Melyik pontban lesz 2017

másodperc múlva?



(1. feladat)



Írjuk rá az útonál rácspontjaira,
hogy a csiga mikor ér oda.

Megfigyelés: Az x tengely pozitív
szakmaihoz a négyzeteket írjuk, az
 y tengelyen pedig ez a páros számokra
igaz.

Például:

$(3,0)$	$(3,3)$	$(0,3)$	$(0,4)$		$(0,4)$	$(4,4)$	$(4,0)$	$(5,0)$		
9	+ 3	+ 3	+ 1	= 16		16	+ 4	+ 4	+ 1	= 25
fel fel fel fel fel						fel fel fel fel fel				

Általánosan: $(k,0)$ $(0,k+1)$

$$k^2 + k + k + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

(1. feladat)

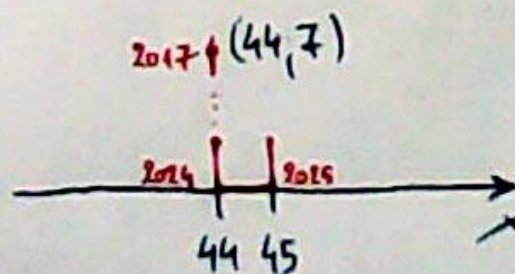
Észel belátnék, hogy a megfigyelésünk mindkét tengely teljes hosszában igaz.

a.) $60 \text{ perc} = 60 \cdot 60 \text{ másodperc} = 60^2 \text{ másodperc}$

A csiga a $(0, 60)$ pontban lesz.

b.) $\sqrt{2017} \approx 44,9$

$$45^2 = 2025$$



A csiga a $(44, 7)$ pontban lesz.

(1. feladat)

Továbbgondolásra:

1. Milyen idő alatt éri el a csiga útjának azon pontjait, amelyek a tengelyek szögfelezőjére illeszkednek? Hány másodperc alatt éri el a (100;100) pontot?
2. Adjuk meg azt a hozzárendelési szabályt, amely a k számhoz hozzárendeli a csiga helyének a koordinátáit a k -adik lépés után!
3. Adjuk meg az 1. pontban megadott hozzárendelés fordítottját (inverzét)!
4. Adjunk meg a csiga mozgására egy másik algoritmust, és válaszoljuk meg a feladat kérdéseit! (Ötlet: például a csiga menjen csigavonal alakban)

(1. feladat)

Megjelenő mélyebb matematikai tartalmak:

- esetszétválasztás paritás szerint
- egész rész
- teljes indukció
- a négyzetszámok sűrűségének ábrázolása
- inverz függvény

Álljunk meg egy szóra!

Az ilyen feladatok jellemzői:

- szövegesek
- kreativitást igényel a papíron való megjelenítésük
- minden diák hozzá tud szólni
- szerepet kap a sejtés–állítás–bizonyítás folyamata
- nem mindig látszik, milyen matematikai ismeretre támaszkodik
- alkalmasak mélyebb matematikai tartalom megjelenítésére
- variálható feladatok (sokmindent lehet kérdezni)

...és még egy sor dolog, amit már nem akartam leírni, vagy amire nem is gondoltam...

2. Az A, B és C gépek mindegyike be tudja olvasni az $(m;n)$ számpárt tartalmazó kártyát, ahol m és n egész számok, majd új kártyát ad ki. Eközben

- (1) ha az A gép beolvassa az $(m;n)$ számpárt tartalmazó kártyát, akkor kiad egy új kártyát, amelyre az $(m-n;n)$ számpár van nyomtatva;
- (2) ha a B gép beolvassa az $(m;n)$ számpárt tartalmazó kártyát, akkor kiad egy új kártyát, amelyre az $(m+n;n)$ számpár van nyomtatva;
- (3) ha a C gép beolvassa az $(m;n)$ számpárt tartalmazó kártyát, akkor kiad egy új kártyát, amelyre az $(n;m)$ számpár van nyomtatva;

A kezdő kártyára a $(19;81)$ számpár van ráírva. Vajon lehetséges-e a három gép valamilyen sorrendben való felhasználásával megkapni azt a kártyát, amelyen a következő számpár található: a) $(7;13)$; b) $(12;21)$?

(2. feladat)

Továbbgondolásra:

1. Melyik az a legkevesebb lépés, amellyel az a) feladat megoldható?
2. A feladat megoldhatóságának szükséges feltétele, hogy ha egy szám osztója a kiindulásul vett rendezett párt alkotó két számnak, akkor osztója legyen a célként megadott rendezett párt alkotó két számnak. Ez elégséges is?
3. Mi változik, ha csak a pozitív számok halmazára korlátozzuk a feladatot?
4. Ha lenne egy D gép, amely a beolvasott $(m;n)$ számpárra $(mn;n)$ számpárt adná válaszul, hogyan változna feladat?

5. Határozzuk meg, mely n természetes számok esetén egyszerűsíthető a $\frac{7n+5}{3n+2}$ tört!

(2. feladat)

Megjelenő mélyebb matematikai tartalmak:

- rákmódszer
- a legnagyobb közös osztó fogalma, és kapcsolata a többi közös osztóval
- invariáns tulajdonság fogalma
- euklideszi algoritmus

3. Egy négyzet alakú erdő tízezer fából áll. A fák egy észak–déli, illetve kelet–nyugati irányú négyzetrács rácspontjaiban helyezkednek el úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban 100 fa van. Egy kis madár bármelyik fáról a tőle északi, délnyugati vagy délkeleti irányban lévő legközelebbi fára repülhet.

a) El tud-e jutni bármelyik fáról bármelyik fára?

b) Visszatérhet-e a kiindulási pontjára 50 felröppenés után?

(3. feladat)

Továbbgondolásra:

1. A madár az erdő közepén van valahol. Mely fákat tudja 5 átszállással meglátogatni?
2. A megadott erdőben melyik az a két fa, amely a legtöbb madárátszállásra van egymástól (miközben a madár mindig a legrövidebb úton repül)?
3. Hogyan módosulnak a feladatra adott válaszok, ha a kis madár északi irányú csak dupla olyan hosszú lehet, mint az eredeti feladatban?
4. Adjunk meg egy eljárást, amellyel az előző pontban vett változás esetén a madár megadott koordinátaiból ki tudjuk számolni, hogy eljuthat-e egy adott koordinátájú pontba!

(3. feladat)

Megjelenő mélyebb matematikai tartalmak:

- vektorok komponensei
- koordináták paritása
- távolságfogalom

4. (Hanoi tornya játék) Az A rúdon n darab különböző nagyságú korong van nagyság szerint elhelyezve, legalul a legnagyobb. Ezeket a korongokat kell átpakolni a C rúdra úgy, hogy közben:

- felhasználhatunk egy harmadik, B rudat;
- egy lépésben csak egy korongot mozgathatunk;
- mindig csak nagyobb korongra helyezhetünk kisebbet.

a) A hanoi tornya játékban a korongok áthelyezése megoldható-e tetszőleges számú korong esetén? Válaszunkat indokoljuk!

b) Legkevesebb hány lépésben lehet megoldani az átpakolást?

(4. feladat)

Továbbgondolásra (à la Dobos Sándor):

Hány lépéssel oldható meg a feladat a korongok számától függően, ha:

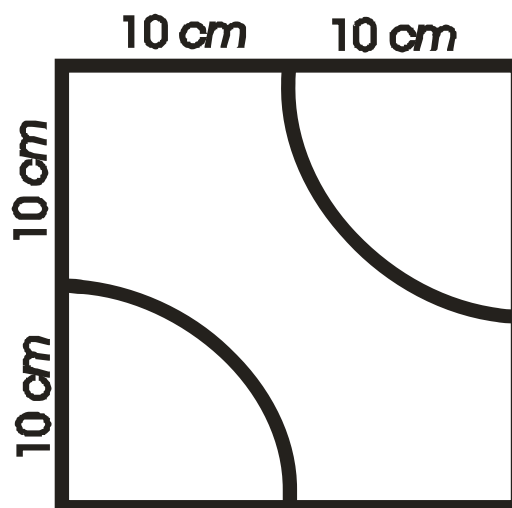
1. A-ról C-re és C-ről A-ra nem lehet korongot áthelyezni.
2. Megengedett lépések csak: A-ról C-re, C-ről B-re, B-ről A-ra.
3. Az alapfeladatot úgy módosítjuk, hogy a korongok nagyság szerinti összetételét módosítjuk: a legkisebből 1 van, a második legkisebből 2 darab, és így tovább.
4. Nem három, hanem négy rúd van, különben minden más feltétel változatlan.

(4. feladat)

Megjelenő mélyebb matematikai tartalmak:

- rekurzió
- teljes indukció
- teleszkopikus összeg
- mértani sorozat összege
- számrendszerek

5. Az ábrán levő 20 cm x 20 cm-es csempékkel egy 80 cm x 80 cm-es felületet szeretnénk kicsempézni. A felületen a csempéken levő negyed körvonalak összekapcsolódnak.



a) Legfeljebb hány cm lehet az összekapcsolódott görbe vonal hossza?

b) Mi a válasz az a) kérdésre egy 60 cm x 60 cm-es felület esetén?

(5. feladat)

Továbbgondolásra:

1. Hányféleképpen lehet kicsempézni a feladatban szereplő felületet?
2. A csempéket helyezzük el véletlenszerűen (például pénzfeldobás segítségével). (Esetleg a véletlen előállítást kombináljuk valamilyen geometriai transzformációval.) Mit állíthatunk biztosan a keletkezett mintákról? Milyen hosszú lehet a leghosszabb zárt görbe?
3. Mi a helyzet különböző méretű négyzetek kicsempézése esetén?
4. Mi a helyzet különböző méretű téglalapok kicsempézése esetén?

5. Találjunk ki egy kódolási eljárást, amely lehetővé teszi, hogy egy szöveget csempesorozattal kódoljunk!

(5. feladat)

Megjelenő mélyebb matematikai tartalmak:

1. „Legjobb” és „legrosszabb” esetek
2. Módszeres próbálkozás
3. A véletlen sokszínűsége (esztétikai nevelés)
4. Geometriai transzformációk, szimmetria
5. Titkosírás

6. Négyzet alakú felületeket fehér és fekete csempékkel rakunk ki. Az ábrán 4, illetve 9 fekete csempét tartalmazó felületet ábrázoltunk. Minden sarokban fekete csempe van, a fekete csempék körül pedig minden csempe fehér.



a) Hány fehér csempe szükséges annak a felületnek a lefedéséhez, amelyen 25 fekete csempe van?

b) Van-e olyan szabályosan kicsempézett négyzet, amelyben 2017 fehér csempe van?

(6. feladat)

Továbbgondolásra:

1. Más minták szerinti csempézés (például legyenek feketék pontosan az átlók csempéi)
2. A feladatban szereplő négyzetsorozat mindegyik tagjából eltávolítunk a közepéből egy akkora négyzetet, amekkora az előző tag volt.
3. Mikor lesz a következő olyan év, amikor megoldható lesz a feladat b) része?

(6. feladat)

Megjelenő matematikai tartalmak:

- Rekurzió
- Binom négyzete
- Másodfokú polinom tényezőkre bontása

7. Egymás mellett a következő négy gomb áll:



Kettőn mosolygós, kettőn pedig szomorú arc van. Ha megnyomunk egy gombot, akkor a rajta levő arc átvált (mosolygósból szomorúba vagy fordítva). Ezen kívül a szomszédos gombokon levő arcok is átváltanak.

a) Legkevesebb hányszor kell megnyomni a gombokat, hogy mindegyiken mosolygós arc legyen?

b) Mosolygóssá tehető-e az összes arc tetszőleges alaphelyzetből kiindulva?

(7. feladat)

Továbbgondolásra:

1. Tegyük föl, hogy egy gombnyomássorozat mosolygóssá teszi az összes arcot. Mi történne, ha ebben a sorozatban két gombnyomást fölcserélünk?
2. Mi a válasz a b) kérdésre 3 arc esetén?
3. Mi a válasz a b) kérdésre 5 arc esetén?
4. Igazoljuk, hogy ha k arc esetén tetszőleges alaphelyzetből kiindulva mosolygóssá tehető mindegyik, akkor $k+3$ arc esetén is ez így van!

(7. feladat)

Megjelenő mélyebb matematikai tartalmak:

- Esetek osztályozása a próbálkozások lerövidítése érdekében
- Műveletek tulajdonsága (felcserélhetőség, társíthatóság)
- Bonyolultabb esetek visszavezetése egyszerűbbekre

8. Egy háromelemű halmazból kiindulva, amelyen a „cseréld az összegre” műveletet hajtjuk végre, egy új háromelemű halmazhoz jutunk, amelyet úgy kapunk, hogy minden elemét felcseréljük a másik két elem összegére. Például a $\{3; 4; 6\}$ halmazból a $\{10; 9; 7\}$ halmazt kapjuk, majd ebből a $\{16; 17; 19\}$ halmazt. A $\{20; 1; 3\}$ halmazból kiindulva 2017 lépés után mennyi lesz a kapott halmazban

a) két elem között a legnagyobb különbség?

b) a legkisebb elem?

(8. feladat)

Továbbgondolásra:

1. A kiindulási halmaz tartalmazhat-e 3 (nem feltétlenül különböző) prímszámot úgy, hogy az első lépés után ismét 3 prímet kapjunk?
2. Az első lépés elvégzése után legfeljebb hány prím lehet a kapott halmazban?
3. Minden lépést kibővítünk azzal, hogy a halmazban az elemeket lecseréljük a 3-mal vett osztási maradékával. Mely esetekben és a hanyadik lépésben kaphatunk $\{0,0,0\}$ halmazt. És ha 3 helyett 4-es osztási maradékokkal számolunk?

(8. feladat)

Megjelenő mélyebb matematikai tartalmak:

1. Invariáns tulajdonság (állandóság a változásban)
2. Hatványokkal való számolás
3. Nagy számok
4. Paritásvizsgálat, más maradékosztályok
5. Ikerprímek

9. Mindegyik pozitív egész számot kiszínezzük. A színezés szabályai a következők:

(1) Mindegyik szám vagy piros, vagy zöld.

(2) Bármelyik két különböző piros szám összege piros.

(3) Bármelyik két különböző zöld szám összege zöld.

Hányféleképpen végezhető el a színezés?

(9. feladat)

Továbbgondolásra:

1. Hogyan változik meg a megoldás, ha a nullát is hozzávesszük a kiszínezendő számok halmazához?
2. Hogyan változik meg a megoldás, ha az összes egész számot színezzük?
3. Módosítsuk a feladatot úgy, hogy a pozitív egész számokból képzett rendezett párok halmazát kell kiszínezni. A színezési szabályok változatlanok, de most az összeadás alatt az

$$(a;b) + (c;d) = (a+c;b+d)$$

műveletet érjük.

(9. feladat)

Megjelenő mélyebb matematikai tartalmak:

- generátorhalmaz
- indirekt okoskodás

10. A Rettentő Rengetegben 6 vérfarkas, 17 unikornis és 55 óriáspók él. Ha egy vérfarkas megeszik egy óriáspókot, akkor unikornissá változik, ha pedig megeszik egy unikornist, akkor óriáspókká változik; hasonlóan, ha egy óriáspók megeszik egy unikornist, akkor vérfarkassá változik. Legfeljebb hány lény marad a Rettentő Rengetegben, amikor már senki senkit nem tud megenni?

(10. feladat)

Továbbgondolásra:

1. Előállhat-e olyan helyzet, hogy mindhárom lényből ugyanannyi van?
2. Legkevesebb hány lény marad, amikor már senki senkit nem tud megenni?
3. Módosítsuk a szabályokat: amikor egyik lény megeszi a másikat, akkor két darab harmadik fajta lény keletkezik. Mit érdemes ilyenkor kérdezni? (Pl. véget érhet-e az evészet ebben az esetben,...)
4. Adjunk meg egy „evésrendet” úgy, hogy mindhárom lény létszáma prím legyen.

5. Van-e olyan kiindulási helyzet, amelynél összesen 50 lény van, de az egymás megevése során egy adott pillanatban mindegyikből 10 darab lesz csak?

(10. feladat)

Megjelenő mélyebb matematikai tartalmak:

- paritás
- egy folyamat leírása annak tulajdonságai ismeretében
- lépések összevonása (függvénykompozíció)

11. Peti a születésnapjára zsúrján egy tábla csokit szeretne szétosztani. A csoki 3×7 „kockára” van osztva, hogy könnyebb legyen széttörölni. Mivel éppen 21-en vannak a zsúron, ezért Peti anyukája elkezdheti összetörni a csokit kockákra. Mindig egy darabot tör ketté egy bejelölt „él” mentén.

Adjunk meg egy algoritmust, amely tetszőleges táblaméret esetén a legkevesebb számú töréssel aprítja föl a csokitáblát egységnyi „kockákra”!

12. Egy tetraéder éleire felírtuk az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokat. Ezután minden csúcsra elvégeztük a következő műveletet: az ide futó éleken lévő számokat összeadtuk, és az eredményt ráírtuk a csúcsra. Kaphattunk-e a csúcsokon egyenlő számokat?

(12. feladat)

Továbbgondolásra:

1. Mi a helyzet más szabályos testek esetén?
2. Vizsgáljuk meg a kérdést más poliéderek esetén is (különös tekintettel a háromoldalú hasábra)!

13. Fedjünk le egy sakktáblát 28 darab 2x1-es dominóval úgy, hogy egy dominót se lehessen elcsúsztatni a tábla síkjában úgy, hogy a dominó továbbra is a táblán maradjon!

14. Bergengóciában pénzreformot vezettek be. Ezentúl csak hárombengócos és hétbengócos lesz.

Mely összegek fizethetők ki visszaadás nélkül, illetve visszaadással?

Forrás:

1. Kenguru versenyek
2. A Szerbiai Matematikusok Társaságának versenyei
3. Bergengóc példatár 2.
4. Bonifert verseny

A feladatok letölthetők a következő helyről:

http://members.tippnet.rs/beres/01_eloadasok/eloadasok.htm