

# A skatulya-elv

Béres Zoltán (Szabadka, Zenta)

Ez a 2015. november 28-i komáromi előadás kibővített, javított, újraserkesztett és megoldásokkal ellátott feladatsora

## Alapfeladatok

1. Van 4 skatulyám és 5 gyufaszálam. Minden gyufaszálat beleteszem valamelyik skatulyába.
  - a) Mit állíthatok?
  - b) Mit állíthatok 9 vagy 13 gyufaszál esetén?
  - c) Mit állíthatok 2015 gyufaszál esetén?
2. Egy embernek legfeljebb 400 000 hajszála lehet. Bizonyítsuk be, hogy ha Vajdaságnak 2 millió lakosa van, akkor van 5 olyan lakos, akiknek ugyanannyi hajszáluk van!
3. Mutassuk meg, hogy 5 darab 10-nél nagyobb prímszám közül mindig kiválasztható 2, amelyek különbsége osztható 10-zel!

## Ismeretséggel kapcsolatos feladatok

4. Bizonyítsuk be, hogy egy társaságban mindig van két olyan személy, akinek ugyanannyi ismerőse van a társaságban lévők között.
5. Bizonyítsuk be, hogy ha egy 25 fős tanulócsoportra igaz, hogy bármely hármasból legalább ketten ismerik egymást, akkor létezik egy olyan tanuló, akinek legalább 12 ismerőse van!
6. Bizonyítsuk be, hogy 6 személy között mindig van 3 olyan, akik kölcsönösen ismerik egymást, vagy kölcsönösen nem ismerik egymást!

## Oszthatósággal kapcsolatos feladatok

7. Bizonyítsuk be, hogy bármely 8 egész szám között van kettő, amelyek különbsége osztható 7-tel!
8. Bizonyítsuk be, hogy 100 egész szám között mindig van 15, amelyekre igaz, hogy bármely 2 különbsége osztható 7-tel.
9. Bizonyítsuk be, hogy egy egész számokból álló 10-tagú számsorozatban mindig van egy olyan vagy néhány szomszédos, amelyeknek összege osztható 10-zel!
10. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan szám, amelynek mindegyik számjegye 1-es, és osztható 2009-cel!
11. Adottak az 1, 4, 7, ..., 97, 100 számok. Kiválasztunk közülük 19-et. Igazoljuk, hogy ezek között mindig van 2, amelyek összege 104!
12. Legyen  $a$ ,  $b$  és  $c$  három egész szám! Bizonyítsuk be, hogy az  $abc(b-a)(c-a)(c-b)$  szorzat osztható 6-tal!
13. Legyen az  $a_1, a_2, \dots, a_{2009}$  az 1, 2, ..., 2015 számok egy tetszőleges permutációja. Bizonyítsuk be, hogy az  $(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3) \dots (a_{2009} - 2015)$  szorzat páros!

### *Pontok távolságáról szóló feladatok*

14. Egy  $3 \times 3$ -as négyzetben 10 pontot helyeztünk el. Bizonyítsuk be, hogy van kettő, amelyek távolsága legfeljebb  $\sqrt{2}$  !
15. 193 szúnyog ül egy téglalap alakú,  $3 \text{ m} \times 2 \text{ m}$  kiterjedésű füves területen. Meg lehet-e ölni egyszerre legalább 3 szúnyogot egy  $25 \text{ cm} \times 25 \text{ cm}$ -es lapáttal?
16. Egy  $4 \times 3$ -as téglalapban 6 pontot helyeztünk el. Bizonyítsuk be, hogy van kettő, amelyek távolsága legfeljebb  $\sqrt{5}$  !
17. Határozzuk meg a királyok számának lehetséges legnagyobb számát egy közönséges sakktáblán úgy, hogy egyik sem üt egyetlen másik királyt sem.

### *Egyéb feladatok*

18. Bizonyítsuk be, hogy nem létezik olyan poliéder, amelynek oldallapjai különböző számú éllel határoltak!
19. Egy végtelen négyzetrács pontjait két színnel színeztük. Van-e olyan téglalap, amelynek mindegyik csúcsa azonos színű? Mi a helyzet  $k$  szín esetén?
20. Egy  $6 \times 6$ -os négyzet 18 db  $1 \times 2$ -es dominóval van kiegészítve. Mutassuk meg, hogy mindig van egy olyan, a négyzet belsejében haladó és valamelyik oldalával párhuzamos egyenes, amely nem metsz bele egyik dominóba sem!
21. Igazoljuk, hogy bármely kilenc egyenes között, amelyek egy adott négyzetet két  $1:2$  területarányú négyszögre bontanak, van három egy ponton áthaladó!
22. Adott egy  $3 \times 3$ -as, 9 egység-négyzetből álló négyzet. Minden egység-négyzetbe a következő számok egyikét írjuk:  $-1$ ,  $0$  vagy  $1$ . Bizonyítsuk be, hogy a sorok, oszlopok és átlók összegei között van két egyenlő!
23. Egy téglalap méretei 6 és 9 egység. Ha a téglalapot felbontjuk 10 darab egész oldalhosszúságú téglalapra, akkor igazoljuk, hogy ezek között van 2 egyenlő területű!
24. Legyen  $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}\} \subset \{1, 2, 3, \dots, 99\}$ . Igazoljuk, hogy az  $X$  halmazból mindig kiválasztható két olyan diszjunkt halmaz, amely elemeinek az összege egyenlő!
25. Legyen  $A = (a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1})$  egy különböző valós számokból álló sorozat. Bizonyítsuk be, hogy  $A$  vagy tartalmaz egy  $n+1$  tagú növekvő, vagy egy  $n+1$  tagú csökkenő részsorozatot! (Erdős–Szekeres, 1935)

### *Forrás:*

1. Bizám György–Herceg János: Sokszínű logika (könyv)
2. Vojislav Petrović: Dirichleov princip (ppt prezentáció)
3. Sava Grozdev: Skatulya-elv (internetes pdf dokumentum)
4. Tuzson Zoltán: A skatulya-elv (internetes ppt prezentáció)

### *Alapfeladatok*

1. Van 4 skatulyám és 5 gyufaszálam. Minden gyufaszálat beleteszem valamelyik skatulyába.

- a) Mit állíthatok?
- b) Mit állíthatok 9 vagy 13 gyufaszál esetén?
- c) Mit állíthatok 2015 gyufaszál esetén?

**Megoldások:** a) Legalább egy skatulyába legalább 2 gyufaszál kerül.

b) 9 gyufaszál esetén legalább egy skatulyába legalább három gyufaszál kerül, 13 gyufaszál esetén pedig legalább 4.

c) Mivel  $2012:4 = 503$ , így a „legkedvezőtlenebb” elrendeződés esetén is lesz olyan skatulya, amelybe 504 gyufaszál kerül.

A fenti válaszok indoklása indirekt úton történhet. Például a c) esetben: Tegyük fel, hogy minden skatulyában legfeljebb 503 gyufaszál van. Így összesen 2012 gyufaszálat tudok elhelyezni, ami ellentmondás, mert 2015 gyufaszál volt összesen.

2. Egy embernek legfeljebb 400 000 hajszála lehet. Bizonyítsuk be, hogy ha Vajdaságnak 2 millió lakosa van, akkor van 5 olyan lakos, akiknek ugyanannyi hajszájuk van!

**Megoldás:** Tegyük föl, hogy nincs 5 olyan lakos, tehát legfeljebb 4 azonos hajszálszámú lakos van. A hajszálok lehetséges száma 0, 1, 2, 3, ..., 400 000, és mindegyik fajtából legfeljebb 4 lakos van, azaz így a lakosok száma legfeljebb  $4 \cdot 400\,001 = 1\,600\,004$ , ez pedig ellentmondás. (400 001 gyufaszál, 2 millió skatulya)

### *Ismeretséggel kapcsolatos feladatok*

3. Bizonyítsuk be, hogy egy társaságban mindig van két olyan személy, akinek ugyanannyi ismerőse van a társaságban lévők között.

**Megoldás:** Legyen egy társaságban  $n$  személy. Egy adott személynek a társaságban legkevesebb 0, legtöbb  $n-1$  ismerőse van. Ugyanakkor nyilvánvaló, ha egy társaságban van, aki nem ismer senkit, akkor nincs, aki mindenkit ismer, és fordítva, vagyis vagy nincs 0, vagy nincs  $n-1$  ismerőssel rendelkező személy. Ezek szerint  $n$  gyufaszál van és  $n-1$  skatulya, ezzel a feladatot megoldottuk.

4. Bizonyítsuk be, hogy ha egy 25 fős tanulócsoportra igaz, hogy bármely hármasból legalább ketten ismerik egymást, akkor létezik egy olyan tanuló, akinek legalább 12 ismerőse van!

**Megoldás:** Ha a társaságban mindenki ismer mindenkit, akkor van 12 ismerőssel rendelkező személy. Ellenkező esetben legyen  $A$  és  $B$ , akik nem ismerik egymást. A feltétel miatt a társaság maradék 23 tagja álljon  $A$  vagy  $B$  mellé aszerint, hogy melyiküket ismeri. (Egyiküket biztosan ismeri a feltétel szerint.) Ekkor 23 gyufaszál van és két skatulya, vagyis legalább az egyik személy mellé felsorakozik 12 ismerős.

5. Bizonyítsuk be, hogy 6 személy között mindig van 3 olyan, akik kölcsönösen ismerik egymást, vagy kölcsönösen nem ismerik egymást!

**Megoldás:** Válasszunk ki egy személyt: A. Másik 5 személy közül A-t legalább hárman ismerik vagy legalább hárman nem ismerik (2 skatulya, 5 gyufaszál). Tegyük föl, hogy 3-an ismerik. Ekkor a három ismerős közül ha bármely kettő ismeri egymást, akkor ők ketten A-val együtt teljesítik az állítást, ha pedig semelyik kettő nem ismeri egymást, akkor ők hárman igazolják az állítást. Hasonló a helyzet akkor is, ha A legalább három embert nem ismer.

### *Oszthatósággal kapcsolatos feladatok*

6. Mutassuk meg, hogy 5 darab 10-nél nagyobb prímszám közül mindig kiválasztható 2, amelyek különbsége osztható 10-zel!

**Megoldás:** Két prímszám különbsége pontosan akkor osztható 10-zel, ha a prímszámok azonos számjegyre végződnek. A 10-nél nagyobb prímszámok lehetséges végződései: 1, 3, 7, 9. Ha öt ilyen prímszámot kiválasztok, lesz két azonos végződésű (4 skatulya, 5 gyufaszál).

7. Bizonyítsuk be, hogy bármely 8 egész szám között van kettő, amelyek különbsége osztható 7-tel!

**Megoldás:** Két szám különbsége pontosan akkor osztható héttel, ha héttel osztva mindkét szám azonos maradékot ad. A lehetséges maradékok: 0,1,2,...,6. (7 skatulya, 8 gyufaszál.)

8. Bizonyítsuk be, hogy 100 egész szám között mindig van 15, amelyekre igaz, hogy bármely 2 különbsége osztható 7-tel.

**Megoldás:** Két szám különbsége pontosan akkor osztható héttel, ha héttel osztva mindkét szám azonos maradékot ad. A lehetséges maradékok: 0,1,2,...,6. (7 skatulya, 100 gyufaszál.) Mivel  $14 \cdot 7 = 98$ , így biztosan lesz 15 azonos maradékosztályba tartozó.

9. Bizonyítsuk be, hogy egy egész számokból álló 10-tagú számsorozatban mindig van egy olyan vagy néhány szomszédos, amelyeknek összege osztható 10-zel!

**Megoldás:** Vegyünk tetszőleges 10 ilyen  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  számot, és képezzük a következő sorozatot:  $a_1 = x_1, a_2 = x_1 + x_2, a_3 = x_1 + x_2 + x_3, \dots, a_{10} = x_1 + x_2 + \dots + x_{10}$ . Ha az  $a_i$  sorozat valamelyik tagja osztható 10-zel, akkor készen vagyunk. Ha nem, akkor 10-zel osztva a következő maradékot adhatják: 1,2,3,...,9. Biztosan lesz két azonos (9 skatulya, 10 gyufaszál). A két azonos maradékot adó különböző sorozattag különbsége éppen valahány szomszédos szám 10-zel osztható összege lesz.

10. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan szám, amelynek mindegyik számjegye 1-es, és osztható 2009-cel!

**Megoldás:** Vegyük a következő sorozatot:  $a_1=1, a_2=11, a_3=111, a_4=1111, \dots, a_{2009}=11\dots1$  (2009-darab egyes). Ha a sorozatnak valamelyik tagja osztható 2009-cel, akkor készen vagyunk. Ha nem osztható egyik sem, akkor a lehetséges maradékok: 1,2,...,2008. Valamelyik maradék biztosan legalább kétszer szerepel (2008 skatulya, 2009 gyufaszál). Vegyük két azonos maradékot adó sorozattag különbségét és jelöljük  $d$ -vel. Ez osztható lesz 2009-cel, csak éppen az 1-eseken kívül a szám végén valahány 0 is szerepel. Mivel 2009 és  $10^k$  relatív prímek, ezért a  $d$  végéről a nullákat hagyva a 2009-cel való oszthatóság megmarad.

11. Adottak az 1, 4, 7, ..., 97, 100 számok. Kiválasztunk közülük 19-et. Igazoljuk, hogy ezek között mindig van 2, amelyek összege 104!

**Megoldás:** Összesen 34 szám van, ebből 32 párba rendezhető:  $4+100$ ,  $7+97$ ,  $100+94$ , ...,  $49+55$ , innen kimaradt az 1 és az 52. A 16 párból és a megmaradt 2 számból választunk ki 19-et. Biztosak lehetünk benne, hogy valamelyik párból mindkét számot kiválasztottuk (18 skatulya, 19 gyufaszál).

12. Legyen  $a$ ,  $b$  és  $c$  három egész szám! Bizonyítsuk be, hogy az  $abc(b-a)(c-a)(c-b)$  szorzat osztható 6-tal!

**Megoldás:** A három szám közül kettőnek a paritása megegyezik (2 skatulya, 3 gyufaszál). Ez alapján a három különbség közül az egyik páros., vagyis a vizsgált kifejezés osztható 2-vel. Ha a három szám közül valamelyik osztható 3-mal, akkor készen vagyunk. Ha egyik sem osztható hárommal, akkor valamelyik kettő a 3-nak ugyanabba a maradékosztályába esik (2 skatulya, 3 gyufaszál). Ekkor a három különbség közül az egyik osztható 3-mal, így az egész kifejezés osztható 6-tal.

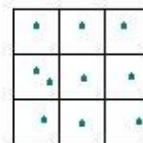
13. Legyen az  $a_1, a_2, \dots, a_{2009}$  az 1, 2, ..., 2015 számok egy tetszőleges permutációja. Bizonyítsuk be, hogy az  $(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3) \dots (a_{2009} - 2015)$  szorzat páros!

**Megoldás:** Az első 2015 szám között 1007 páros és 1008 páratlan szám van. Tegyük föl, hogy a szorzat páratlan. Ekkor mindegyik tényezője páratlan, vagyis a zárójelekben szereplő 1008 páratlan szám mellé csak párosakat írhatok. Ez viszont lehetetlen, mert nincs ennyi páros számom.

#### *Pontok távolságáról szóló feladatok*

14. Egy  $3 \times 3$ -as négyzetben 10 pontot helyeztünk el. Bizonyítsuk be, hogy van kettő, amelyek távolsága legfeljebb  $\sqrt{2}$ !

**Megoldás:** Osszuk föl a négyzetrácsot 9 egységnyi oldalú négyzetre. Mivel 10 pont van (9 skatulya, 10 gyufaszál), ezért lesz olyan négyzet, amelybe legalább 2 pont jut. (Egy pontot akkor is a négyzethez tartozónak tekintünk, ha az a határán van.) A legalább két ponttal rendelkező négyzet két pontja nem lehet  $\sqrt{2}$ -nél nagyobb távolságra egymástól, tehát találtunk ilyen pontokat.

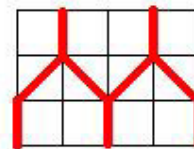


15. 193 szúnyog ül egy téglalap alakú,  $3 \text{ m} \times 2 \text{ m}$  kiterjedésű füves területen. Meg lehet-e ölni egyszerre legalább 3 szúnyogot egy  $25 \text{ cm} \times 25 \text{ cm}$ -es lapáttal?

**Megoldás:** Az előző feladathoz hasonlóan bontsuk föl a füves területet  $25 \text{ cm} \times 25 \text{ cm}$ -es négyzetekre. Összesen 96 ilyen négyzetet kapunk. A 193 szúnyog között lesz 3, amely azonos négyzetben tartózkodik (96 skatulya, 193 gyufaszál). Erre a négyzetre kell lecsapni a lapáttal. (Itt föltettük azt is, hogy vaslapát agyonüti azt a szúnyogot is, amelyet a legszéle elér.)

16. Egy  $4 \times 3$ -as téglalapban 6 pontot helyeztünk el. Bizonyítsuk be, hogy van kettő, amelyek távolsága legfeljebb  $\sqrt{5}$ !

**Megoldás:** Osszuk föl a négyzetrácsot az ábrán látható módon 5 részre. Mivel 6 pont van (5 skatulya, 6 gyufaszál), ezért lesz olyan rész, amelybe legalább 2 pont jut. (Egy pontot akkor is a területdarabhoz tartozónak tekintünk, ha az a határán van.) A legalább két ponttal rendelkező



területdarab két pontja nem lehet  $\sqrt{5}$ -nél nagyobb távolságra egymástól,

mivel egy ilyen terület legtávolabbi pontjainak távolsága éppen  $\sqrt{5}$ , tehát találtunk ilyen pontokat.

17. Határozzuk meg a királyok számának lehetséges legnagyobb számát egy közösleges sakktáblán úgy, hogy egyik sem üt egyetlen másik királyt sem.

**Megoldás:** Viszonylag könnyen lerakható 16 darab király. (Például minden páratlan első és második koordinátájú mezőre.) Vajon el lehet-e helyezni ennél többet. A válasz: nem. Osszuk föl a sakktáblát  $2 \times 2$ -es négyzetekre. Minden négyzetbe legfeljebb egy király kerülhet, kettő már ütné egymást. Összesen 16 darab  $2 \times 2$ -es mezővel pedig lefedhető a sakktábla (16 skatulya és 17 gyufaszál).

### Egyéb feladatok

18. Bizonyítsuk be, hogy nem létezik olyan poliéder, amelynek oldallapjai különböző számú éllel határoltak!

**Megoldás:** Válasszuk ki a azt a lapot, amely a legtöbb oldallal határolt. Ha több ilyen is van, akkor azok közül az egyiket. Ha ez egy  $n$ -szög, akkor csupa 3-, 4-, 5-, ...,  $n$ -oldalú sokszög határolja, és ezek nem lehetnek mind különböző sokszögek ( $n-2$  skatulya,  $n$  gyufaszál).

19. Egy végtelen négyzetrács pontjait két színnel színeztük. Van-e olyan téglalap, amelynek mindegyik csúcsa azonos színű? Mi a helyzet  $k$  szín esetén?

**Megoldás:** Vizsgáljunk meg egy vízszintesen elhelyezkedő szomszédos ponthármast. Ezeket a pontokat két színnel  $2^3 = 8$  féleképpen lehet kiszínezni. Ha veszünk 9 egymás fölött lévő ilyen ponthármast, akkor lesz két azonos színezésű (8 skatulya, 9 gyufaszál). Az azonos színezésűek között egy sorban lesz két azonos színű (2 skatulya, 3 gyufaszál), így ezek a két sorban lévő azonos színű pontok éppen téglalapot alkotnak.

$k$  szín esetén vegyünk  $k+1$  szomszédos pontot. Ezek összesen  $2^{k+1}$ -féleképpen színezhetők. Ha kiválasztok  $2^{k+1}+1$  egymás fölött lévő  $k+1$  szomszédos pontot, akkor lesz két azonos színezésű sor, és ebben a két sorban (is) lesz két azonos színezésű pont.

20. Egy  $6 \times 6$ -os négyzet 18 db  $1 \times 2$ -es dominóval van kiparkettázva. Mutassuk meg, hogy mindig van egy olyan, a négyzet belsejében haladó és valamelyik oldalával párhuzamos egyenes, amely nem metsz bele egyik dominóba sem!

**Megoldás:** Első ránézésre az állítás nem igaz, mert összesen 10 egyenes van (5 függőleges és 5 vízszintes), és mindegyik blokkolható egy dominóval, amelyből összesen 18 van, tehát bőven megoldható. Valójában még sem lehetséges, mert ha egy dominót keresztbe fordítok egy egyenes előtt, akkor még egyet keresztbe kell fordítanom a négyzet teljes lefedése érdekében. (Ezt többféleképpen is be lehet látni, például az egyenes egyik oldalán lévő

négyzetrész sakktáblaszerű kiszínezése segítségével.) Ezek szerint minden egyenes blokkolásához 2 dominót használnok el, de 20 dominó helyett csak 18 dominóm van.

21. Igazoljuk, hogy bármely kilenc egyenes között, amelyek egy adott négyzetet két 1:2 területarányú négyszögre bontanak, van három egy ponton áthaladó!

**Megoldás:** Egy ilyen adott szelő egyenes két azonos magasságú trapézra bontja a négyszöget. Mivel területeik aránya 1:2, ezért az azonos magasság miatt középvonaluk aránya is 1:2, középvonaluk összege pedig a négyzet középvonalát adják. Ezek alapján a kérdéses egyenesek áthaladnak a négyzet középvonalának harmadoló pontain. Mivel 4 ilyen pont van (a két-két középvonalon 2-2 harmadoló pont), így a skatulya-elv alapján (4 skatulya, 9 gyufaszál) lesz három egyenes, amely azonos pontra illeszkedik.

22. Adott egy  $3 \times 3$ -as, 9 egység-négyzetből álló négyzet. Minden egység-négyzetbe a következő számok egyikét írjuk:  $-1$ ,  $0$  vagy  $1$ . Bizonyítsuk be, hogy a sorok, oszlopok és átlók összege között van két egyenlő!

**Megoldás:** A soronként, oszloponként és átlónként kapott lehetséges összegek a következők:  $-3$ ,  $-2$ ,  $-1$ ,  $0$ ,  $1$ ,  $2$ ,  $3$ . Összesen 8 összeg van (3 sor, 3 oszlop és 2 átló), tehát biztosan lesz ismétlődő (7 skatulya, 8 gyufaszál).

23. Egy téglalap méretei 6 és 9 egység. Ha a téglalapot felbontjuk 10 darab egész oldalhosszúságú téglalapra, akkor igazoljuk, hogy ezek között van 2 egyenlő területű!

**Megoldás:** A  $6 \times 9$ -es téglalap területe 54 területegység. Ha különböző területű téglalapokra bontjuk, akkor a kapható legkisebb területösszeg  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 10 = 55$ , tehát nem lehetséges különböző területű téglalapra bontani.

24. Legyen  $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}\} \subset \{1, 2, 3, \dots, 99\}$ . Igazoljuk, hogy az  $X$  halmazból mindig kiválasztható két olyan diszjunkt halmaz, amely elemeinek összege egyenlő!

**Megoldás:** Az  $X$  halmazból  $2^{10}$  darab részhalmazt lehet kiválasztani. Az látható, hogy ha a részhalmaz 0 elemű vagy 10 elemű, akkor biztosan nem tudunk hozzá azonos elemösszegű diszjunkt halmazt választani, tehát ezt a két esetet nem kell számolni:  $2^{10} - 2 = 1022$ . Egy ilyen kiválasztott részhalmaz elemeinek minimális összege 1, maximális összege  $91 + \dots + 99 = 855$ . Ezek szerinte az összes részhalmaz között lesz két azonos összegű (855 skatulya, 1022 gyufaszál). Legyen ez a két halmaz  $A$  és  $B$ . Ha a két halmaz metszete üres, akkor készen vagyunk. Ha a két halmaz metszete nem üres, akkor  $A \setminus B$  és  $B \setminus A$  halmazok megfelelőek.

25. Legyen  $A = (a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1})$  egy különböző valós számokból álló sorozat. Bizonyítsuk be, hogy  $A$  vagy tartalmaz egy  $n+1$  tagú növekvő, vagy egy  $n+1$  tagú csökkenő részsorozatot! (Erdős–Szekeres, 1935)

**Megoldás:** Minden  $a_i$  elemhez rendeljünk hozzá egy  $(x_i, y_i)$  rendezett párt a következő módon: legyen  $x_i$  az  $a_i$  elemmel végződő leghosszabb növekvő részsorozat hossza,  $y_i$  pedig az  $a_i$  elemmel végződő leghosszabb csökkenő részsorozat hossza. Nézzük ezt egy konkrét példán: Legyen  $A = (3, 6, 4, 24, 45, 33, 12, 56, 23, 41)$ , itt most  $n = 3$ . Ekkor a kapott rendezett párok a következők:  $(1;1)$ ,  $(2;1)$ ,  $(2;2)$ ,  $(3;1)$ ,  $(4;1)$ ,  $(4;2)$ ,  $(3;3)$ ,  $(5;1)$ ... Észrevehetjük, hogy nincs két egyező rendezett pár. Ez nem véletlen, mert ha két rendezett pár megegyezne, például az  $i$ -edik és a  $j$ -edik ( $i < j$ ), akkor  $a_i > a_j$  esetén a csökkenő részsorozat

hossza,  $a_i < a_j$  esetén a növekvő részsorozat hossza kellene, hogy eggyel nőjön, vagyis nem lehet mindkét koordináta ugyanaz. Ezek szerint az  $A$  halmaz generál egy olyan  $n^2+1$ -elemű  $B$  halmazt, amelynek elemei különböző rendezett párok ( $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ -beliek). Tegyük föl, hogy  $A$ -ban nincs  $n+1$  hosszúságú növekvő vagy csökkenő részsorozat, azaz  $B$  halmaz rendezett párjainak koordinátái kisebbek  $n+1$ -nél. Összesen  $n^2$  ilyen rendezett pár létezik, de az  $n^2+1$  elem miatt szükségszerű, hogy legyen két azonos ( $n^2$  skatulya,  $n^2+1$  gyufaszál), amit korábban kizártunk, tehát ellenmondáshoz jutottunk.

Forrás:

1. Bizám György–Herceg János: Sokszínű logika (könyv)
2. Vojislav Petrović: Dirichleov princip (ppt prezentáció)
3. Sava Grozdev: Skatulya-elv (internetes pdf dokumentum)
4. Tuzson Zoltán: A skatulya-elv (internetes ppt prezentáció)

*Köszönöm az előadásomon résztvevő kollégáimnak és a diákoknak az értékes megjegyzéseiket, amelyek segítettek kiküszöbölni e feladatsor hiányosságait.*

*Palics, 2015. november 30.*