

A skatulya-elv

Béres Zoltán (Szabadka, Zenta)

1. Egy embernek legfeljebb 400 000 hajszála lehet. Bizonyítsuk be, hogy ha Vajdaságnak 2 millió lakosa van, akkor van 5 olyan lakos, akiknek ugyanannyi hajszájuk van!
2. Bizonyítsuk be, hogy bármely 8 egész szám között van kettő, amelyek különbsége osztható 7-tel!
3. Bizonyítsuk be, hogy 100 egész szám között mindig van 15, amelyekre igaz, hogy bármely 2 különbsége osztható 7-tel.
4. Egy 3×3 -as négyzetben 10 pontot helyeztünk el. Bizonyítsuk be, hogy van kettő, amelyek távolsága legfeljebb $\sqrt{2}$!
5. Egy 4×3 -as téglalapban 6 pontot helyeztünk el. Bizonyítsuk be, hogy van kettő, amelyek távolsága legfeljebb $\sqrt{5}$!
6. Bizonyítsuk be, hogy nem létezik olyan poliéder, amelynek oldallapjai különböző számú éllel határoltak!
7. Bizonyítsuk be, hogy egy 10 tagú számsorozatban mindig van néhány szomszédos, amelyeknek összege osztható 10-zel!
8. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan szám, amelynek mindegyik számjegye 1-es, és osztható 2009-cel!
9. Legyen az $a_1, a_2, \dots, a_{2009}$ az 1, 2, ..., 2009 számok egy tetszőleges permutációja. Bizonyítsuk be, hogy az $(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3) \dots (a_{2009} - 2009)$ szorzat páros!
10. Bizonyítsuk be, hogy ha egy 25 fős tanulócsoportra igaz, hogy bármely hármasból legalább ketten ismerik egymást, akkor létezik egy olyan tanuló, akinek legalább 12 ismerőse van!
11. Bizonyítsuk be, hogy 6 személy között mindig van 3 olyan, akik kölcsönösen ismerik egymást, vagy kölcsönösen nem ismerik egymást!
12. Egy végtelen négyzetrács pontjait két színnel színeztük. Van-e olyan téglalap, amelynek mindegyik csúcsa azonos színű? Mi a helyzet k szín esetén?
13. Egy 6×6 -os négyzet 18 db 1×2 -es dominóval van kiparkettázva. Mutassuk meg, hogy mindig van egy olyan, a négyzet belsejében haladó és valamelyik oldalával párhuzamos egyenes, amely nem metsz bele egyik dominóba sem!
14. Van 4 skatulyám és 5 gyufaszálam. Minden gyufaszálat beleteszem valamelyik skatulyába.
 - a) Mit állíthatok?
 - b) Mit állíthatok 9 vagy 13 gyufaszál esetén?
 - c) Mit állíthatok 2015 gyufaszál esetén?

15. Igazoljuk, hogy bármely kilenc egyenes között, amelyek egy adott négyzetet két 1:2 területarányú négyszögre bontanak, van három egy ponton áthaladó!
16. Adott egy 3×3 -as, 9 egység-négyzetből álló négyzet. Minden egység-négyzetbe a következő számok egyikét írjuk: -1 , 0 vagy 1 . Bizonyítsuk be, hogy a sorok, oszlopok és átlók összegei között van két egyenlő!
17. Egy téglalap méretei 6 és 9 egység. Ha a téglalapot felbontjuk 10 darab egész oldalhosszúságú téglalapra, akkor igazoljuk, hogy ezek között van 2 egyenlő területű!
18. Határozzuk meg a királyok számának lehetséges legnagyobb számát egy közönséges sakktáblán úgy, hogy egyik sem üt egyetlen másik királyt sem.
19. Adottak az $1, 4, 7, \dots, 97, 100$ számok. Kiválasztunk közülük 19-et. Igazoljuk, hogy ezek között mindig van 2, amelyek összege 104!

Forrás:

1. Bizám György–Herceg János: Sokszínű logika (könyv)
2. Vojislav Petrović: Dirihleov princip (ppt prezentáció)
3. Sava Grozdev: Skatulya-elv (internetes dokumentum)
4. Tuzson Zoltán: A skatulya-elv (internetes ppt prezentáció)