

## Szélsőértékkeresés a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alkalmazásával

**Tétel:** Legyenek  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) pozitív valós számok. Ekkor érvényes az  $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$  egyenlőtlenség, és az egyenlőség pontosan  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  esetén áll fenn.

**Következmény:** A csupa pozitív tényezőkből álló  $a_1 a_2 \dots a_n$  szorzat felülbecsülhető a következő módon:  $a_1 a_2 \dots a_n \leq \left( \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^n$ .

**Következmény:** A csupa pozitív tagból álló  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$  összeg alulbecsülhető a következő módon:  $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n \cdot \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$ .

Feladatok:

1. Adott egy síkban 2010 pont, amelyek közül semelyik három nem esik egy egyenesre. Tekintsük az összes olyan szakaszt, amely a pontok összekötésével keletkezik. Egy tetszőlegesen megválasztott egyenessel legfeljebb hány szakaszt metszhetünk át?

2. Bizonyítsuk be, hogy bármely pozitív  $x$  esetén fennáll, hogy  $x + \frac{1}{x} \geq 2$  !

3. Oldjuk meg az  $\frac{n^2 + 2}{\sqrt{n^2 + 1}} = 2$  egyenletet! [1]

4. Oldjuk meg az  $\left( \frac{x_1}{x_2} \right)^2 + \left( \frac{x_2}{x_3} \right)^2 + \dots + \left( \frac{x_{n-1}}{x_n} \right)^2 + \left( \frac{x_n}{x_1} \right)^2 = n$  egyenletet, ahol  $n$  természetes szám!

[1]

5. Állapítsuk meg az  $f(x) = x(1 - x^3)$  függvény maximumát, ha  $x \in [0;1]$ ! [2]

6. Határozzuk meg a  $M = (1+a)(1+b)(1+c)$  minimumát, ha  $a, b, c \geq 0$  és  $abc = 1$  ! [3]

7. Mennyi az  $f(x) = ax^m + \frac{b}{x^n}$  függvény minimuma, ha  $x \in (0; \infty)$ ,  $a, b > 0$  és  $m, n \in \mathbb{N}$  ? [2]

8. Határozzuk meg az  $f(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{1+x}} + \frac{1}{\sqrt[n]{1-x}}$  függvény minimumát, ha  $x \in [0;1)$ ,  $n$  pedig egynél nagyobb természetes szám! [2]

9. Mennyi az  $S = xyz$  szorzat maximuma, ha  $2x + y\sqrt{3} + \pi z = 1$  és  $x, y, z > 0$  ! [2]

10. Határozzuk meg az  $f(x) = \frac{x}{ax^2 + b}$  függvény szélsőértékeit, ha  $a$  és  $b$  pozitív valós számok! [2]

11. Igazoljuk, hogy tetszőleges valós  $t$  szám esetén  $\cos^3 t \cdot \sin t \leq \frac{3\sqrt{3}}{16}$  ! [2]

[1] Ágotai László: Egyenlőtlenségek alkalmazása egyenletek megoldása során, előadás, 2005. november 20., Komárom

[2] Šefket Arslanagić: Određivanje ekstremne vrednosti nekih funkcija pomoću nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine, Tangenta, 2009/2010 – 2, Kragujevac

[3] Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 1994, 10. osztály, 2. feladat

