

Teljes indukció

Összeállította: Béres Zoltán

1. (Hanoi tornya.) Van három rúd, amelyekre több, különböző nagyságú korong húzható rá. Kezdeti helyzetben a korongok az egyik rúdon vannak gúlaszerűen fölfűzve, fölfelé keskenyedve. Az a feladat, hogy a korongokat pakoljuk át valamelyik másikra rúdra úgy, hogy egyszerre csak egy korongot mozdítunk, és nem tehetünk nagyobb korongot kisebbre.

- Vajon tetszőleges korongszám mellett megoldható a feladat?
- Adjunk képletet, hogy n korong mellett hány lépésben megoldani a feladatot!
Bizonyításunkat teljes indukcióval igazoljuk!

2. $1, 1+3, 1+3+5, 1+3+5+7, \dots$ Mit veszünk észre? Állításunkat igazoljuk!

3. $1, 1+8, 1+8+27, 1+8+27+64, \dots$ Mit veszünk észre? Állításunkat igazoljuk!

4.
$$\begin{array}{ll} 1 & = 0 + 1, \\ 2 + 3 + 4 & = 1 + 8, \\ 5 + 6 + 7 + 8 + 9 & = 8 + 27, \\ 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 & = 27 + 64. \end{array}$$
 Mit veszünk észre? Állításunkat igazoljuk!

5.a. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges pozitív egész szám kisebb mint a négyzete! (Az indukciós lépés könnyen igazolható!)

5.b. A $2^{2^n} + 1$ képletbe n helyére rendre 1, 2, 3, 4 számokat írva 5, 17, 257, 65537 adódik. Ezek mind prímszámok. Helyes-e a következtetés, hogy ezek alapján bármely pozitív egész n esetén prímszámot kapunk?

6. Bizonyítsuk be, hogy bármely n pozitív egész számra $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$!

7. Igazoljuk, hogy bármely n pozitív egész számra $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$!

8. Bizonyítsuk be, hogy bármely egynél nagyobb n egész számra

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}} !$$

9. Igazoljuk, hogy tetszőleges pozitív egész n esetén $2^{4n+1} + 3$ kifejezés osztható 5-tel!

10. Bizonyítsuk be, hogy egy n oldalú konvex sokszög belső szögeinek összege $180^\circ \cdot (n-2)$!

11. Egy körlapot főszeletelünk n tetszőleges helyzetű húrral. Legyen P_n az n húr által feldarabolt körlemezen keletkezett maximális területek száma. Bizonyítsuk be, hogy $P_{n+1} = P_n + (n+1)$!
Próbáljuk meg n függvényében fölírni P_n -t (azaz adjunk rá zárt képletet)!

12. Igaz-e, hogy egy körlapot tetszőleges módon húrokkal földarabolva olyan területek keletkeznek, amelyek mindegyike beszínezhető két szín közül valamelyikkel úgy, hogy bármely terület színe különbözzék a vele élszomszédos területek színétől?
13. Egy $n \times n$ -es négyzetrácson keresztül húzunk egy tetszőleges helyzetű egyenest. Legfeljebb hány négyzet területét fogja ez az egyenes átszelni?
14. Egy $n \times n$ -es négyzetrács átlóiban elhelyezkedő négyzeteit befestjük pirosra. Vajon hány négyzet marad fehérén különböző n számok esetén? Mi a szabály?
15. Bizonyítsuk be, hogy n darab ceruzát $n!$ sorrendben vehetünk ki egy tolltartóból. (A ceruzákat egyenként vesszük ki, és bármely kettőt meg tudjuk különböztetni.)

Forrás:

1. Lukács Ernőné – Tarján Rezsőné: Játékos matematika, Gondolat, Budapest, 1975
2. Pólya György: Indukció és analógia, Gondolat, Budapest, 1988
3. Bogdán Zoltán: Matematika, feladatok–ötletek–megoldások, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1995