

Függvényegyenletek

Összeállította: Béres Zoltán

A feladatok szövege utáni számok a feladatok származási helyét jelentik:

1. Mely $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvényre teljesül az $f\left(\frac{x-3}{2x+4}\right) = \frac{x+1}{3x-1}$ egyenlet?

[1] 14. old.

2. Mely $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvényre teljesül az $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x$ egyenlet?

[1] 14. old

3. Mely $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvényre teljesül az $f(x) + xf\left(\frac{x}{2x-1}\right) = 2$ egyenlet?

[1] 14. old

4. Határozzuk meg a valós számok halmazán értelmezett $f(x)$ függvényt, ha teljesül az $f(x) + 2f(1-x) = x$ egyenlet!

[2]

5. Határozzuk meg az f és g függvényeket, ha kielégítik a következő egyenletrendszer:

$$f(x+1) + g(x+1) = 2x \text{ és } f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + g\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = x-1 !$$

[1] 14. old

6. Határozzuk meg az összes olyan $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvényt, amely kielégíti az $f(x+y) - f(x-y) = 2y(3x^2 + y^2)$ függvényegyenletet!

[3]

7. Adott egy $k \neq 0$ valós szám és egy $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény úgy, hogy minden x valós számra $f(x) \neq 1$ és $f(x) \neq 0$, valamint $f(x+k) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$. Bizonyítsuk be, hogy $f(x+4k) = f(x)$ minden valós x esetén.

[4] 23. old.

8. Keressük meg az összes olyan $f : \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{R}$ függvényt, amelyekre minden racionális x, y esetén fennáll: $f(x+y) = f(x)f(y)$ és $f(1) = 2$.

[4] 24. old.

9. Legyen $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Z}$, és minden természetes x, y számra érvényes: $f(x) + f(y) = f(x+y) - xy - 1$. Adjuk meg az $f(x)$ függvényt, ha $f(1) = 1$!

[5] 36. old.

10. Határozzuk meg az összes olyan korlátos $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ függvényt, amely minden egész k és n esetén kielégíti az $f(k+n) + f(k-n) = 2f(k)f(n)$ egyenletet!

[5] 36. old.

[6] 28. old.

11. A valós számok halmazán értelmezett f és g lineáris függvényekről a következőt tudjuk: $f(x)g(x) = \frac{f^2(x) + g^2(x)}{2} - 2$ minden valós x -re, $f(0) = -g(0)$ és $f(1) = g(-1)$. Határozzuk meg a két függvényt!

[6] 20. old.

12. Tekintsük az $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ függvényt (ahol c és d közül legalább az egyik nem nulla).

Mutassuk meg, hogy ha $f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$ állandó, akkor $f(x)$ is állandó!

[7] 13. old.

13. Egy minden valós számra értelmezett f függvény minden $(x;y)$ számpárra kielégíti a következő egyenlőtlenségeket: $f(x) \leq x$, $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$. Bizonyítsuk be, hogy minden valós x -re $f(x) = x$!

[5] 36. old.

Forrás:

- [1] Bogoslavov, Vene T.: Zbirka rešenih zadataka iz matematike 1, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1998
- [2] Szerbiai Körzeti Matematikaversenyek, 2004
- [3] Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, Szeged, 2007
- [4] Čeliković, Luka – Kurnik, Zdravko: Matematička natjecanja srednjoškolaca u SFRJ u 1988. godini, Društvo mladih matematičara «Pitagora», Beli Manastir, 1988
- [5] Bogdán Zoltán: Matematika, feladatok – ötletek – megoldások, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1995
- [6] Hegyvári Norbert – Pogács Ferenc: Középiskolai matematikai versenyek 1985–1987, Tankönyvkiadó, Budapest, 1989
- [7] Bakos Tibor – Laczkovich Miklós – Reiman István – Surányi János – Urbán János: Középiskolai matematikai versenyek, Tankönyvkiadó, Budapest, 1981