

Logikai feladatok I.

Összeállította: Béres Zoltán

1. Bevezető feladatok

- 1.1. Bénitől megkérdezik, hogy szereti-e a matematikát. Ezt válaszolja: „Nincs igazuk azoknak, akik nem tagadják azt, hogy én nem szeretem a matematikát.” Szereti-e Béni a matematikát?
- 1.2. Ödön fogadást ajánl társainak: egy természetes számra gondol, és azt is megígéri, hogy egy kérdésre válaszol, de a válasza hamis lesz. Tudnánk Ödöntől olyat kérdezni, hogy megtudjuk, melyik számra gondolt?
- 1.3. Okoska elhatározta, hogy ezentúl hétfőn, szerdán és pénteken mindig igazat fog mondani, más napokon mindig hazudik. Egyszer azt mondta: „Holnap igazat fogok mondani.” Melyik napon történt ez?
- 1.4. Egy papírlapon a következő állítások olvashatók:

1. Ezen a papíron pontosan egy állítás hamis.
2. Ezen a papíron pontosan két állítás hamis.
3. Ezen a papíron pontosan három állítás hamis.
4. Ezen a papíron pontosan négy állítás hamis.
5. Ezen a papíron pontosan öt állítás hamis.

Határozzuk meg, hogy mely állítások igazak a papíron!

- 1.5. Egy papírlapon a következő állítások olvashatók:

1. Ezen a papíron legfeljebb egy állítás igaz.
2. Ezen a papíron legfeljebb két állítás igaz.
3. Ezen a papíron legfeljebb három állítás igaz.
4. Ezen a papíron legfeljebb négy állítás igaz.
5. Ezen a papíron legfeljebb öt állítás igaz.

Határozzuk meg, hogy mely állítások igazak a papíron!

- 1.6. Van néhány korsónk, amelyek között van különböző alakú és különböző színű. Igazoljuk, hogy van két olyan korsó, amelyek alakja is, színe is különböző!
- 1.7. Öt láncdarab mindegyikén három szem láncszem van. Egyetlen láncot szeretnénk belőle készíteni úgy, hogy a lehető legkevesebb láncszemet nyissuk szét. Mennyi ez?
- 1.8. Négy környezetvédelmi egyesület, a „Zöld Front”, az „EKO”, a „Vörös Őrjárat” és az „Igazságkeresők” elhatározták, hogy egyesülnek. Az egyesülési konferencián azonos létszámú delegációk vettek részt mind a négy egyesületből. Nézeteltérés robbant ki az új egyesület elnevezése körül. A két lehetséges név, amelyek közül lehetett választani: „Zöld Gondolkodó” és „Gondolkodó Ökológia”. Tudjuk, hogy a „Vörös Őrjárat” minden képviselője ugyanarra a névre akart szavazni, a többi delegációban nem volt egység. A „Zöld Front” küldöttei közül annyian akartak az elsőre szavazni, ahányan az „EKO”-ból a másodikra. A második név híveinek harmada az „Igazságkeresők” közül való. Melyik nevet választják meg?

2. Társaságban

- 2.1. Egy összejövetelen 21 gyerek vett részt. Mindenkitől sorban megkérdeztem, hogy hány osztálytársa van a jelenlévők között. Elárulom az első 13 választ: öten mondtak 3-at, nyolcan pedig 4-et. Mi lehet a hiányzó 8 válasz, ha tudjuk, hogy minden gyereknek legalább egy osztálytársa jelen volt az összejövetelen?

2.2. Egy társaságban mindenkinek van ismerőse. Tudjuk még, hogy ha két embernek azonos számú ismerőse van, akkor nincs közös ismerősük. Bizonyítsuk be, hogy van olyan ember a társaságban, akinek csak egy ismerőse van a jelenlevők között!

2.3. Egy tíztagú társaság minden tagja legalább hét másikat ismer. Igaz-e, hogy bármely háromnak van közös ismerőse?

2.4. Igaz-e, hogy minden társaságban van két olyan ember, akiknek ugyanannyi ismerőse van a jelenlevők között?

2.5. Feri, Jóska, Pali, Gyuri és Gábor úgy álltak fel egy körvonal mentén, hogy a szomszédok közötti távolság mindenütt különböző volt. (A távolságot a körvonal mentén mérjük.) A tanár megkérte a fiúkat, mondják meg, ki áll hozzá legközelebb. Feri és Jóska neve kétszer hangzott el, Palié egyszer. Az alábbi állítások közül melyik igaz?

- A. Feri és Jóska nem álltak egymás mellett.
- B. Gyuri és Gábor nem álltak egymás mellett.
- C. Gyuri és Gábor egymás mellett álltak.
- D. A fenti három válasz mindegyike hamis.

2.6. Egy kongresszuson 2006 résztvevő van. A jelentkezések regisztrálása után megállapították, hogy minden résztvevőnek van legalább k ismerőse ($k \geq 2$). (Az ismeretség kölcsönös.) Mutassuk meg, hogy legkevesebb $k+1$ személy leültethető egy kerek asztal köré úgy, hogy mindenki ismerje a szomszédját!

3. Osztokodás

3.1. Egy öreg arab halála előtt vagyonáról, a 17 tevéről három fiának végrendekezett: „A legidősebb fiamé legyen a tevék fele, a középső fiam kapja a tevék harmadát, a legkisebb fiam pedig a kilencedét.” Az arab halála után az örökösök sehogyan sem tudták elosztani a 17 tevét. Arra „tevegelt” egy bölcs arab, aki meghallgatta az örökösöket, majd így döntött: az ő tevéjét a 17 mellé állította, és a 18 tevét úgy osztotta el, hogy a legidősebb kapott 9-et, a középső 6-ot, és a legkisebb fiú 2-t. Ezután a bölcs visszavette a saját tevéjét és tovább ment. Megfelel-e a végrendeletnek ez a felosztás? Mi tette lehetővé, hogy így el lehessen osztani a tevéket?

3.2. Egy ókori feladat: Egy haldokló apa úgy végrendekezett, hogy ha várandós felesége fiút szül, vagyonából kétszer annyi jusson a fiúnak, mint az anyának, ha pedig leányt szül, akkor kétszer annyi jusson az anyának, mint a lányának. Az özvegy ikerpárnak adott életet, egy fiúnak és egy leánynak. Hogyan kell a három örökös között a vagyont szétosztani?

3.3. András, Béla és Csaba együtt ebédelt. Rendeltek 5 adagot, amelyből 3-at András, 2-öt Béla fizetett ki. Ebéd után Csaba 150 dinárt adott a két barátjának. Hogyan oszlott ez meg András és Béla között?

3.4. Három aranyásó, akiknek útjaik szétválnak, egy aranyporhalmon osztoznak egyenlő arányban. Mérleg csak a legközelebbi beváltóhelyen van, az pedig messze van. Hogyan tudják a szemmértékükre támaszkodva úgy szétosztani az aranyporhalmot, hogy mindenki úgy érezze, megkapta a részét.

3.5. Megoldható-e a 3.4-es feladat 4 aranyásó esetén? És ha még többen vannak? Ha igen, hogyan?

4. Paradoxonok – vagy hol a hiba?

4.1. Kovács úr bemegy egy üzletbe, és vásárol egy képet 1500 dinárért. Másnap visszatér azzal, hogy ki szeretné cserélni a képet. Kiválaszt egy másikat, amely azonban 3000 dinárba kerül. Se szó, se beszéd, indul kifelé a 3000 dináros képpel. Az üzletvezető megállítja, és 1500 dinárt követel a kép ellenében. Ő azonban így válaszol: „Nem tartozom semmivel, mert tegnap fizettem 1500 dinárt, ma pedig visszahoztam a tegnap elvitt képet 1500 dinár értékben. Ez összesen 3000 dinár.” Hol a hiba?

4.2. Egy országban bejelentik, hogy a jövő héten hétfő és vasárnap között valamelyik nap délben próba-légiriadó lesz, de ez teljesen meglepetésszerűen éri a lakosokat. Ekkor a lakosok elkezdtek gondolkodni: „Ha szombaton nem lesz légiriadó, akkor tudjuk, hogy vasárnap lesz, így vasárnap nem lehet, mert nem lenne meglepetésszerű, tehát szombat a légiriadó utolsó lehetséges napja. De ha pénteken sem lesz légiriadó, akkor – mivel a vasárnapot már kizártuk – csak szombaton lehet, tehát tudnánk előre, így a szombat is kizárható.” Folytatva a gondolatmenetet a lakosok megállapították, hogy nem lehet váratlan légiriadó a héten. Jól gondolkodtak?

4.3. Egy ország határfolyója hídjánál az őrség mindenkitől megkérdezte, hogy miért jött. Ha a vándor hazudott, akkor a törvény szerint föl kellett őt akasztani, ha igazat mondott, akkor vízbe kellett fojtani. A törvény miatt senki sem akart ebbe az országba utazni. Egyszer azonban egy furfangos vándor mégis bátran közeledett a hídhoz. Vajon mit válaszolt a kérdésre, hogy ne alkalmazzassák rá a törvényt?

4.4. Három turista 3000 dinárért háromszobás lakosztályt bérelt egy szállodában. Fejenként 1000-1000 dinárt fizettek a portán. A portás utólag vette észre, hogy a lakosztály bére csak 2500 dinár. A fennmaradó 500 dinárral elindult a vendégekhez. Közben azonban arra gondolt, hogy nehéz lenne 500 dinárt három ember között szétosztani. Ezért 200-at zsebre vágott és fejenként 100-100 dinárt visszaadott. Háromszor 900 dinár az 2700 dinár, 200 dinár a portás zsebébe került, ez már 2900 din. De hova lett még 100 dinár?

5. Milyen sorrendben?

5.1. Egy matematikaverseny előtt így nyilatkozott az öt résztvevő:

Anna: Dóri második, én harmadik leszek.

Bea: Első leszek, Cili második lesz.

Cili: Harmadik leszek, Bea lesz az utolsó.

Dóri: Második leszek, Eszter lesz a negyedik.

Eszter: Negyedik leszek, Anna lesz az első.

Állapítsuk meg a verseny eredményét, ha mindegyik lánynak csak az egyik jóslata vált be!

5.2. Gyülekezett a tévéstáb. A szerkesztő sokkal korábban érkezett, mint a rendező. Az operatőr előbb jött, mint a segédoperatőr, a szerkesztő viszont később, mint a gépkocsivezető. A világosító után még valaki érkezett és csak aztán jött a gyártásvezető. A hangmérnök a világosító után, a gyártásvezető pedig a rendező előtt futott be. A gépkocsivezető és még egy valaki után jött meg az operatőr. Milyen sorrendben érkeztek?

5.3. Három jó barát, András, Béla és Csaba el akarta dönteni, hogy melyikük a legjobb sakkozó, ezért páronként 7-7 játszmát játszottak egymással. A játszmák befejezése után a következőket mondták:

András: Én nyertem a legtöbb partit.

Béla: Én veszítettem a legkevesebb partit.

Csaba: Nekem van a legtöbb pontom.

Az igaz kijelentések alapján határozzuk meg, ki hány partit nyert, illetve veszített! (Győzelemért 1, döntetlenért $\frac{1}{2}$, vereségért 0 pont jár.)

5.4. Egy futóversenyen négyen vesznek részt: A, B, C, D. A versenyt egy N néző is végignézi. Utána a következőket mondják:

A: Nem én nyertem, de C-t megelőztem.

B: Megelőztem C-t.

C: D előbb ért célba, mint B.

D: Nem én voltam az utolsó.

N: Az előbbieket során az első helyezett nem mondott igazat, a többiek igazat mondtak.

Az eredményhirdetéskor kiderült, hogy e közül az öt kijelentés közül legalább három igaz.

I. Bizonyítsuk be, hogy C nincs az első két helyezett között!

II. Lehetőséges-e, hogy N igazat mondott?

Források:

1. Hajdú Sándor: Matematika feladatgyűjtemény az általános iskola 7–8. osztálya számára, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1993
2. Kosztolányi József – Mike János – Vincze István: Érdekes matematikai feladatok, Mozaik Oktatási Stúdió, Szeged, 1994
3. Ujvári István: A gondolkodás alapiskolája, Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő, Vác, 1994
4. Miodrag Petković: Zanimljivi svet matematike, Tehnička knjiga, Belgrád, 1994
5. Ujvári István: Számválaszos feladatok tehetségkutató és felvételi versenyeken, Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő, Vác, 2000
6. Matematikai versenytesztek – A Zrínyi Ilona Matematikaverseny feladatai és megoldásai '91–93, Mozaik Oktatási Stúdió, Szeged, 1994
7. Bizám György – Herczeg János: Sokszínű logika, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975
8. Lukács Ernőné – Tarján Rezsőné: Játékos matematika, Gondolat, Budapest, 1975
9. Róka Sándor: Szakköri feladatok matematikából – 5–6. osztály, Tóth Könyvkereskedés, Nyíregyháza, 1996