

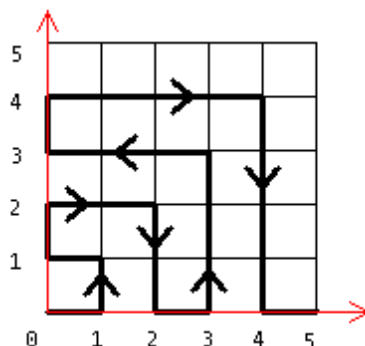
Oldjuk meg kockás papíron!

Összeállította: Béres Zoltán

Feladatok

1. Egy csiga a koordináta-rendszer origójából indul, és az ábrán látható módon folytatja útját. Másodpercenként 1 egységet tesz meg.

- Melyik pontban lesz egy óra múlva?
- Melyik pontban lesz két óra múlva?
- Melyik pontban lesz 2006 perc múlva?



- Hány olyan konvex rácssokszög van az első síknegyedben, melynek három egymás után következő csúcsa $(0;5)$, $(5;5)$ és $(5;0)$?
- A sakktáblát átszelő egyenes legfeljebb hány mező belsején mehet keresztül?
- Adott az $A(a_1, a_2)$ és $B(b_1, b_2)$ pont. Hogyan kapjuk meg annak a pontnak a koordinátáit, amely felezi az AB szakaszt?
- Bizonyítsuk be, hogy bármely 5 rácspont között van kettő, amelyek összekötő szakasza újabb rácsponton megy át!
- Milyen távol van egymástól a koordináta-rendszerben az $A(a_1, a_2)$ és $B(b_1, b_2)$ pont?
- Bizonyítsuk be, hogy a derékszögű koordináta-rendszer $\left(\sqrt{2}; \frac{1}{3}\right)$ pontja körül írt bármely körön legfeljebb egy rácspont van!
- Két matematikus hangya rámászott egy négyzethálóra. Egyszerre indulnak el két különböző pontból, és egyszerre lépnek. Találkozhat-e a két hangya (és ha igen, hol), ha
 - egy lépés egy négyzetoldali mozgást jelent;
 - egy lépés három négyzetoldali mozgást jelent?
- Egy négyzetet felosztunk 7 sorra és 7 oszlopra, a mezőkbe tetszőleges elrendezésben beírjuk az 1, 2, 3, 4, ..., 48, 49 természetes számokat, mindegyikbe egyet. Két osztóvonal közös pontját csomópontnak nevezzük, és odaírjuk hozzá annak a négy számnak az összegét, amely a csomópontot körülfogja. (A négyzet területén nincsenek csomópontok.) Mutassuk meg, hogy számaink bármely elrendezése mellett van legalább 3 olyan csomópont, ahova legalább 75-öt írtunk!
- Egy 615×615 -ös sakktáblán a középső négyzetre szimmetrikusan elhelyeztünk 1977 bábút. Bizonyítsuk be, hogy a 308. sorban áll bábu!
- Egy négyzet alakú erdő tízezer fából áll. A fák észak-déli, illetve kelet-nyugati irányú négyzetrács rácspontjaiban helyezkednek el úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban 100 fa van. Egy kis madár bármelyik fáról a tőle északi, délnyugati vagy délkeleti irányban lévő legközelebbi fára repülhet.
 - Bizonyítsuk be, hogy bármelyik fáról bármelyik fára el tud jutni!
 - Visszatérhet-e a kiindulási pontjára 50 felröppenés után?
- Négyzetrácsos füzetlapon a négyzetoldalak hosszát tekintsük egységnyiinek. Rajzoljunk rá téglalapot, melynek csúcsai a rácspontokra illeszkednek. Igaz-e, hogy minden ilyen téglalap területe egész szám?

Fogódzók

1. Hanyadik másodpercekben fordul el a csiga? Észre vehetünk-e az egyes fordulókhoz tartozó lépésszámoknál valami szabályt?
2. Hány oldalú sokszög alakulhat ki a rajzon? Hány háromszöget lehet létrehozni? Hány konvex négyszöget? ...
3. Fogalmazzunk meg egy ehhez hasonló egyszerűbb feladatokat! Hol messe át az egyenes az egyes rácsvonalakat: csomópontban vagy azon kívül? Metszheti-e az egyenes az összes rácsvonalat? Hány rácsvonal van összesen?
4. Mit állapíthatunk meg a különböző speciális helyzetek megvizsgálása után?
5. Nem vehetnénk hasznát valamelyik korábbi feladatnak? Milyen különleges pont lehet az adott két pontot összekötő szakasz belső pontja? Próbálkozzunk 5 konkrét pont fölvetelével!
6. Hogyan értelmezzük két pont távolságát? Milyen kapcsolat lehet az egyes koordináták és a pontok távolsága között?
7. Mi az, ami állandó? Nem lehetne valami egyenletet fölírni? Mit tudunk a koordinátákról? Nem tudnánk alkalmas módon átrendezni az egyenletet? Hogyan kaphatunk racionális számot?
8. Hova juthat el egy hangya, ha szabályosan lépked? Próbálkozzunk színezéssel! Mi jellemzi ezeket a pontokat? Mi a helyzet a másik hangyával? Milyen lehet a két hangya közötti kapcsolat?
9. Hány csomópont van összesen? Mi lenne, ha nem teljesülne a bizonyítandó állítás? Meg tudjuk becsülni a csomópontokba írt számok minimumát? Hogyan kellene ehhez kitölteni a táblázatot?
10. Az adott sor hol helyezkedik el a táblán? Mi következik a középpontos szimmetriából?
11. Eljuthat-e a kismadár az erdő valamelyik speciális helyére? Bontsuk fel a kismadár mozgását! Az egyes felrepülések milyen kapcsolatban vannak egymással, ha tudjuk, hogy a madár visszatér a kiindulási pontjába?
12. Melyek a triviális esetek? A nem triviális esetek és a triviális esetek között teremthető-e valamilyen összefüggés?

Forrás:

1. Fejér Szabolcs: Oldjuk meg kockás papíron, előadás, Komárom, 2005
2. Középiskolai matematikai versenyek 1977–79 (szerk.: Bakos Tibor), Tankönyvkiadó, Budapest, 1981
3. Középiskolai matematikai versenyek 1985–87 (Hegyvári–Pogács), Tankönyvkiadó, Budapest, 1989