

Klasszikus valószínűségi mező

1. Egy ruhatári fogassoron 8 kabátot helyeznek el egymás utáni számozással. Mi a valószínűsége annak, hogy a kabátok közül előbb a páratlan számmal jelölteket váltják ki?

Megoldás: Az első négy kabát kiválasztása annyiféleképpen lehet, ahányféleképpen 8 elemből kiválaszthatunk 4-et: $\binom{8}{4}$. Ezek közül a kabátnégyesek közül csak egyetlenegy van, amelyben mindegyik kabát páratlan számmal jelölt fogason lóg. Így:

$$P(A) = \frac{1}{\binom{8}{4}} = \frac{4! \cdot 4!}{8!} = 0,01429.$$

2. 10 feketekávés csészébe összesen 6 darab kockacukrot teszünk, mindegyikbe legfeljebb egyet. Mi a valószínűsége annak, hogy négy személy, aki keserűn szereti a kávé, véletlenül éppen a négy cukor nélküli kávéval veszi el?

Megoldás: A négy személy összesen $\binom{10}{4}$ -féleképpen veheti el a kávéját, de ezen esetek között csak egy olyan van, amikor mind a négyen cukor nélküli kávéval vesznek el. Ezért

$$P(A) = \frac{1}{\binom{10}{4}} = \frac{4! \cdot 6!}{10!} = 0,00476.$$

3. Egy szóbeli vizsgán egy tanuló 45 kérdésre tud válaszolni. 25 cédulára 2-2 kérdés van fölírva. Mi a valószínűsége, hogy a tanuló a kihúzott cédula mindkét kérdésére válaszolni tud?

Megoldás: A feladat egy kicsit pontatlanul van megfogalmazva. Feltesszük, hogy a 25 cédulán 50 különböző kérdés van, és ezekből a vizsgázó tanuló 45-re tudja a választ. A diák tehát összesen $\binom{50}{2}$ -féleképpen kaphatja a kérdéseket, és ebből $\binom{45}{2}$ esetben tud mindkét kérdésre válaszolni.

Ezek alapján

$$P(A) = \frac{\binom{45}{2}}{\binom{50}{2}} = \frac{45! \cdot 2! \cdot 48!}{2! \cdot 43! \cdot 50!} = 0,80816.$$

4. Mi a valószínűbb, hogy két kockával legalább egy 1-est dobunk, vagy hogy négy kockával legalább két 2-est dobunk?

Megoldás: Vezessük be a következő jelöléseket:

$A =$ két kockával legalább egy 1-est dobunk.

$B =$ négy kockával legalább két kettést dobunk.

Nézzük az A eseményt. Két kockával összesen 36-féle dobáslehetőség van. Ezek közül 10 olyan eset van, amikor pontosan 1 egyest (az egyik kocka egyeséhez a másik kocka 5 nem egyese párosul, és fordítva), és 1 olyan eset van, amikor pontosan 2 egyest dobunk. Ezért $P(A) = \frac{11}{36} = 0,30556$.

A B eseménynél az összes dobás lehetőségének a száma $6^4 = 1296$. Most nem a kedvező esetek számát számoljuk össze (egy kicsit hosszadalmas lenne), hanem a B kiegészítő eseményének a számát, azaz hogy hányszor lesz a dobások között legfeljebb egy darab kettes.

a. Pontosán 0 darab kettes: $5^4 = 625$.

b. Pontosán 1 darab kettes: $1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 5 = 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 5 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 = 4 \cdot 5^3 = 500$.

Összegezve: összesen $625 + 500 = 1125$ esetben dobunk legfeljebb egy kettest, vagy $1296 - 1125 = 171$ esetben dobunk legalább két kettest. Ezek után a B esemény bekövetkezésének a valószínűsége könnyen kiszámolható: $P(B) = \frac{171}{1296} = 0,13194$, tehát az A esemény a valószínűbb.

5. Egy pletykás osztályban 15 diák van. Az egyik elmesél egy pletykát egy másiknak, az továbbadja egy harmadiknak, aki nem tudja, hogy a második kitől hallotta. és továbbadja valamelyik osztálytársának. Mindenki egyenlő valószínűséggel választ az osztálytársai közül. Mennyi a valószínűsége annak, hogy 10-szer továbbadják a pletykát anélkül, hogy akár egyetlen tanuló is többször hallaná.

Megoldás: Számozzuk meg a diákokat, és sorszámaikkal írjuk le a pletyka útját. Jelöljük egyessel azt a diákot, akitől a pletyka indul. Néhány lehetséges pletykaterjedés:

1 4 7 3 4 10 5 11 15 3 14 vagy 1 6 4 8 7 7 2 12 14 15 5 vagy 1 5 6 8 11 14 7 14 2 7 10.

A második sorozat nem lehet egy „pletykaút”, mert a 7-es számú diák nem adhatja saját magának tovább a pletykát. Ugyanígy nem jó a harmadik számsorozat sem, mert a 14 7 14 számhármass megvalósítható benne, már pedig a 7-es számú diák a feladat feltétele alapján nem adhatja annak tovább a pletykát, akitől kapta. Az is világos, hogy ha 10-szer adják tovább a pletykát, akkor egy „pletykaút” 11 számból áll (10 + 1 a pletyka indítója miatt).

Számoljuk össze a „pletykaútak” számát: $1 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 13 = 14 \cdot 13^9$, mivel a pletyka indítója bárki másnak továbbadhatja a pletykát, de a többiek már csak 13 tanuló közül választhatnak, hiszen saját maguk meg akitől a pletykát hallották, nem jöhetnek szóba pletykabefogadóként.

Most számoljuk össze, hogy ezek között hány olyan eset van, amikor senki sem hallja többször a pletykát, azaz hány esetben nincs ismétlődő szám a számsorozatban: $1 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot \dots \cdot 6 \cdot 5 = \frac{14!}{4!}$.

Ezek után a valószínűség könnyen kiszámolható: $P(A) = \frac{\frac{14!}{4!}}{14 \cdot 13^9} = 0,024467$.

Jó gyakorlást!