



Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium
Gimnazija sa domom učenika za talentovane učenike "Boljai"

Valószínűségyszámítási paradoxonok

– érettségi dolgozat valószínűségyszámításból –

Tanuló:

Tokić Rudolf

Mentor:

Béres Zoltán

Zenta, 2014. május.26.

Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék.....	2
1. Bevezető.....	3
2. Klasszikus paradoxonok	4
2.1. Akhilleusz és a teknős	4
2.2. A fának hajított kő.....	5
2.3. A nyílvevő.....	6
3. Néhány egyszerűbb paradoxon	7
3.1.1. A macskák esete.....	7
3.1.2. Színes macskák.....	7
3.2. Simpson-féle paradoxon	8
3.3. Lewis Carroll valószínűség-számítási abszurdja	9
3.4. A Csipkerózsika-paradoxon	10
4. Néhány fejtörő paradoxon.....	12
4.1.1. Monty Hall-paradoxon	12
4.1.2. Két játékos.....	13
4.1.3. N ajtó.....	14
4.2. Pétervári paradoxon.....	15
4.3. A furfangos rab esete	16
4.4. A Bertrand-féle paradoxon	18
5. Összefoglaló	20
6. Irodalomjegyzék.....	21
Nyilatkozatok	22
Adatlap	23

1. Bevezető

A legtöbb ember szereti, ha nagyjából tudja, mire számíthat az életben. Amikor teszünk valamit, aminek több kimenetele is lehet, az agyunk automatikusan próbálja megfejtetni, hogy mi lesz a végkifejlett. Összehasonlítunk, próbálunk logikus következtetéseket levonni, azonban sok olyan eset van, amikor ha csak az ösztöneinkre hallgatunk, végül hibás elképzelésünk lesz a végkifejletről. Nagyon egyszerű példa erre, hogy sokan azt hiszik, hogy a 7-es lottón semmi esély arra, hogy az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számok jöjjenek ki, amikor pont ugyanannyi a nyereső valószínűsége ezzel a kombinációval, mint bármely másik 7 számra, függetlenül attól, hogy egymást követők. Talán épp ezért is alakult ki a valószínűségszámítás, hogy a dolgokat számokba öntsük, így elkerüljük az ilyen eseteket. Azonban hiba lenne azt hinni, hogy ez segít minden esetben megállapítani a legvalószínűbb eseményt, ugyanis a matematikának ez az ága teli van a „józan észnek” ellentmondó látszólagos ellentmondásokkal.

Dolgozatom célja, hogy rövid betekintést nyújtsak ezeknek a valószínűségszámítási paradoxonoknak a világába. Néhány paradoxon ismertetésén és vizsgálatán kívül még szeretném ráirányítani a figyelmet arra is, hogy a legtöbb paradoxon feloldható, ha kellő precizitással vizsgáljuk a problémát okozó esetet.

Foglalkozom a paradoxonok kialakulásával és feltárom az általam legérdekesebbnek és legtrükkösebbnek tartott valószínűségszámítási paradoxonokat. Természetesen a terjedelmi keret nem engedi, hogy az összes ilyen látszólagos ellentmondással foglalkozzam, de igyekeztem a lehető legsokszínűbb ízelítőt adni erről a különös világról.

Azonban ahhoz, hogy ezt a témát tárgyaljam és vizsgáljam, először is tisztáznom kell, mi is az a paradoxon.

Definíció: A paradoxon egy olyan meglepő állítás, amely a korabeli emberek szemében szinte hihetetlen vagy legalábbis „a józan paraszti észnek” ellentmondani látszik. [1]

2. Klasszikus paradoxonok

Az első ismert paradoxonokat 2500 éve eleai Zénon fogalmazta meg. Tanára, Parmenidész, elméletét próbálta paradoxonokkal alátámasztani, amely szerint az érzékeinkkel alkotott képünk a világról félrevezető, konkrétan, hogy mozgás igazából nem létezik, az csak illúzió. Zénon paradoxonai következnek.

2.1. Akhilleusz és a teknős

Az ókori görög világban futóversenyt rendeznek Akhilleusz, a leggyorsabb görög, és egy teknős között. A teknősök nem számítanak túl gyors állatnak, így Akhilleusz önbizalomhiányban nem szenvedve, nagyvonalúan 100 méter előnyt ad a hüllőnek. A győztes kiléte még így sem kérdéses... Vagy mégis?

Eldörren a pisztoly, indul a verseny. Akhilleusz pár ugrással ott terem, ahonnan a teknős indult, azonban ez idő alatt ellenfele is haladt egy keveset. Akhilleusz nem torpan meg, szinte egy szempillantás alatt ott terem, ahol az előbb a teknős volt, azonban ez idő alatt az állat ismét haladt előre egy keveset. Akármilyen gyorsan is ér oda görög futóbajnokunk, ahol ellenfele egy pillanattal korábban volt, ez idő alatt ellenfele is halad előre, így mindig előtte is marad. Ez az érvelése Zénonnak azt próbálja igazolni, hogy Akhilleusz sohasem fogja megelőzni, vagy akár csak utolérni a hüllőt.

Ma már tudjuk, hogy végtelen sok szám összege is adhat véges eredményt. Ha összeadjuk azokat az időszeleteket, amelyek szükségesek Akhilleusznak, hogy elérje a teknős előző pozícióját, végül véges eredményt kapunk, még hozzá pont annyit, amennyire szüksége van a görögnek, hogy utólérje. Természetesen, ha többi időt, adunk meg is fogja előzni. [2]

2.2. A fának hajított kő

Meleg, napos nyári délután van az ókori Görögországban, még a szél sem fúj. Zénon, unatkozó filozófusunk, szeretne napszúrást kapni, ezért ahelyett, hogy egy fa alatt hűsölne, ő 8 méternyire áll egy fától, kezében egy kővel. Haragszik a fára, mert az nem mellette, hanem 8 méterrel arrébb van, ezért úgy dönt, bosszúból megdobja a kezében lévő kővel a fát. A követ a fa felé hajítja, azonban saját érvelése szerint bosszúja nem fog beteljesedni, mert a kő sohasem fogja elérni a fát.

Érvelése a következő: Ahhoz, hogy a kő elérje a fát, először meg kell tennie a köztük lévő távolság felét, vagyis 4 métert. Ekkor a kő 4 méternyire lesz a fától, és ahhoz, hogy végül célba érjen, ismét meg kell tennie a hátralévő távolság felét, vagyis 2 métert. Ezt az elvet követve a kőnek ezután 1 métert, majd fél métert kell megtennie, és így tovább a végtelenségig. Tehát a kő sohasem fogja elérni a fát, mert ahhoz, hogy elérje, mindig meg kell tennie a köztük lévő távolság felét.

Ha jobban megvizsgáljuk ezt a paradoxont, rájöhethetünk arra, hogy ez lényegében az előző egy variánsa. A feloldás gondolatmenete ugyan az, mint az előző esetben, mert tudjuk, hogy a végtelen sok szám összege is lehet véges. Ha megfigyeljük a kő megteendő távolságait (4, 2, 1, 1/2, .. méter) egy mértani sorozatra lelhetünk rá. A mértani sorozat elemeinek összegét pedig kiszámíthatjuk az

$$S_n = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

képlettel (ahol $a = 4$ a kezdőelem, $q = \frac{1}{2}$ pedig a kvóciens), ha n -t a végtelenbe tartónak vizsgáljuk.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 4 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 4 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = 4 \cdot 2 = 8$$

Tehát a kő összesen 8 métert fog megtenni, ami pont a kiinduló helyzete és a fa közötti távolság, vagyis el fogja érni a fát.

2.3. A nyílvesző

Zénon ebben a paradoxonában egy repülő nyílveszőt vizsgál. Azt állítja, hogy ha a nyílveszőt az idő egy adott pillanatában vizsgáljuk, akkor a nyílvesző nyugalomban van. Egy időpillanatnak nincs időbeli kiterjedése, és idő nélkül nem létezik “mozgás”, tehát a nyílnak ekkor nyugalomban kell lennie, nem mozoghat. Ha ezt a logikát kivetítjük a nyíl mozgási illúziójának teljes idejére, ezt az idő összes pillanatára igazolni tudjuk és levonhatjuk a következtetést, amely szerint a nyíl minden pillanatban nyugalomban van, tehát a mozgás csak illúzió.

Ma már tudjuk, hogy az idő vizsgálata nélkül teljesen értelmetlen sebességről beszélni, a sebesség csak időben értelmezett (Fizikából: $v = \frac{s}{t}$). Ez alapján nem állítható az, hogy ha valami egy adott pillanatban nyugalomban van, az nem mozoghat. Minden létező dolognak van térbeli létezése létezésének teljes időintervallumában, és csak azért, mert ha ezt az intervallumot végtelenül sok végtelenül kicsi szakaszra bontjuk, akkor a szakaszokban nem érzékelhető a mozgás, ha egy nagyobb intervallumban a test térbeli helyzete megváltozott, akkor a test mozgott. Így megbukott Zénon elmélete a mozgás illúziójáról. [2]

Lehet, hogy ezek a paradoxonok korunkban már elég ostobaságnak hangzanak, de szerintem nagyon jól szemléltetik az emberi gondolkodás fejlődését. Az, ami ma nekünk teljesen logikus és megkérdőjelezhetetlen, 2500 éve még komoly fejtörést tudott okozni a kor nagy gondolkodóinak.

Azonban az előző paradoxonok nem valószínűségi számítási paradoxonok voltak, de akkor mit keresnek a dolgozatomban?

A témám megértéséhez fontosnak tartom ismertetni a „kezdeteket”. Ahhoz, hogy valamit megértsünk, hogy valahova eljussunk, kell egy kiindulási pont is, ami ebben az esetben Zénon paradoxonai.

3. Néhány egyszerűbb paradoxon

Ebben a fejezetben már a valószínűségszámítási paradoxonoké a főszerep. Ezek azonban már mind az utóbbi ötszáz évben lettek papírra vetve, ugyanis maga a valószínűségszámítás is csak a XVII. században vált külön ágává a matematikának a szerencsejátékoknak köszönhetően. Íme bemelegítésnek néhány nagyon egyszerű valószínűségszámítási paradoxon. Próbálja meg megválaszolni a következő feladatot!

3.1.1. A macskák esete

Egy embernek két macskája van, legalább egy közülük hím. Mennyi a valószínűsége annak, hogy mind a kettő hím?

Amennyiben a válasza $1/2$ volt akkor a többséghez tartozik. Azonban, mint sokszor, a többség téved. Jelöljük a macskák nemét H (hím) és N (nőstény) betűvel. A két macska így 4 különböző összeállításban szerepelhet: HH, HN, NH, NN. Mivel tudjuk, hogy az egyik macska hím, ezért az utolsó NN összeállítás kiesik. Azonban a maradék 3 lehetőségből csak egy esetben, HH esetén, lesz emberünk mindkét macskája hím, tehát a helyes válasz $1/3$. Ez a feladat egy egyszerűbb paradoxon, azonban nagyon jól tükrözi, hogy a látszat néha csal. Tekintsük meg ennek a feladatnak az egyik variánsát! [3]

3.1.2. Színes macskák

Egy embernek két macskája van, egy fekete és egy fehér. A fehér macska hím. Mi a valószínűsége annak, hogy mind a kettő hím?

Ha azt gondolta, hogy a megfejtés továbbra is $1/3$ maradt, akkor ismét téved. Ha felírjuk megint a HH, HN, NH és NN lehetőségeket, úgy, hogy minden esetben az első betű a fekete, a második a fehéret jelöli, láthatjuk, hogy most 2 lehetőséget kell kihúznunk a listáról, és csak a HH, NH lehetőségek maradnak. Most tényleg $1/2$ lett a valószínűsége annak, hogy mindkét macska hím. [3]

3.2. Simpson-féle paradoxon

Tekintsük meg ezt a nagyon érdekes feladatot!

„Andrásnak van egy fekete és egy zöld kalapja. A fekete kalapba 5 piros és 6 kék golyót tett, a zöldbe 3 pirosat és 4 kék. Bélának is van egy fekete és egy zöld kalapja, a fekete kalapba 6 piros és 3 kék, a zöldbe 9 piros és 5 kék golyót tett. Mindketten megállapították a saját kalapjaikat tekintve, hogy a piros golyó húzásának valószínűsége nagyobb a fekete kalap esetén. Mi a helyzet, ha összeöntik a két fekete kalap tartalmát és a két zöldét is?” [4]

A $P = \frac{k}{n}$ (k – kedvező esetek száma, n – összes eset száma) képlettel állapítsuk

meg a piros golyó húzásának valószínűségét kalaponként.

András a fekete kalapjából $\frac{5}{11}$ valószínűséggel húz piros golyót, még a zöldből

$\frac{3}{7}$ valószínűséggel. $\frac{5}{11} > \frac{3}{7}$, tehát a feladat Andrásra vonatkozó állítása igaz.

Béla a fekete kalapjából $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, a zöldből $\frac{9}{14}$ valószínűséggel húz pirosat.

Bélára is igaz a feladat állítása, $\frac{2}{3} > \frac{9}{14}$.

De mi történik összeöntés után?

A fekete kalapban $5+6=11$ piros és $6+3=9$ kék lesz, tehát ebből a kalapból $\frac{11}{20}$ valószínűséggel húzható piros golyó. A zöld kalapban $3+9=12$ piros és $4+5=9$ kék golyó lesz, tehát $\frac{12}{21}$ valószínűséggel lehet piros golyót húzni belőle. $\frac{11}{20} < \frac{12}{21}$, az összeöntés után a zöld kalapból lehet nagyobb valószínűséggel piros golyót húzni. [4]

Meghökkentő, de nincs semmi hiba a levezetésben, valóban lehetséges, hogy:

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \text{ és } \frac{x}{y} > \frac{v}{z}, \text{ de } \frac{a+x}{b+y} < \frac{c+v}{d+z}$$

3.3. Lewis Carroll valószínűségi számítási abszurdja

Egy zsákban két zseton van, mind a kettő vagy piros (P) vagy fehér (F). Találjuk ki a zsetonok színét anélkül, hogy megnéznénk, milyen színűek. Lewis Carroll szerint csak egy lehetséges megoldás van, hogy az egyik zseton piros a másik pedig fehér.

Indoklása a következő: Tegyük fel, hogy a zsákban nem kettő, hanem három zseton van, még hozzá két darab piros és egy fehér. Ekkor a P húzásának a valószínűsége $\frac{2}{3}$ lesz. Ez fordítottn is igaz, három zseton esetén csak akkor $\frac{2}{3}$ P húzásának valószínűsége, ha a zsákban két piros és egy fehér zseton van.

Most tegyük az eredeti két zseton mellé egy piros zsetont. Ekkor a zsákban négy lehetséges összetétel lesz (az első betű jelöli a hozzáadott piros zsetont): PPP, PPF, PFP, PFF. Mind a négy lehetőségnek $\frac{1}{4}$ a valószínűsége. Az első esetben 1 valószínűséggel húzunk P-t, a második és harmadik esetben $\frac{2}{3}$ valószínűséggel, PFF esetén pedig $\frac{1}{3}$ valószínűséggel húzunk pirosat.

Ez alapján P húzásának a valószínűsége: $\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, ami az előzőek szerint csak úgy lehetséges, ha a zsákban két piros és egy fehér zseton van. Tehát a piros zseton hozzátétele előtt csak az egy piros egy fehér zsetonösszeállítás lehetséges.

Egyértelmű, hogy a levezetés hibás, de mi a hiba benne?

A levezetése elején Carroll azt állítja, hogy P húzásának valószínűsége akkor és csakis akkor $\frac{2}{3}$ három zseton esetén, ha a zsákban két piros és egy fehér zseton van. Ez így is van, tehát a piros zseton hozzáadása utáni PPP, PPF, PFP, PFF lehetőségek közül a két középsőre ez igaz. Azonban Carroll amikor megkapja a $\frac{2}{3}$ -ot a P húzásának valószínűségére, akkor mind a négy lehetőséget figyelembe veszi, és habár így is $\frac{2}{3}$ -ot kap a P húzásának valószínűségére, a hivatkozása hibás. [1]

3.4. A Csipkerózsika-paradoxon

Csipkerózsika már felébredt százéves álmából, azonban a hercege szereti a valószínűségszámítási paradoxonokat, vagy csak élvezi Csipkerózsika ébresztgetését, ezért ismét álomba küldi egy időre. Vasárnap bead neki egy altatót, majd egy hagyományos pénzérmével dobva meghatározza kísérletének további menetét. Ha fejet dob, felébreszti hétfőn és a kísérlet véget ér, de ha írást, felébreszti hétfőn, majd újabb altatót ad be neki, és kedden ébreszti fel ismét. Csipkerózsika helyzetét tovább rontja, hogy a hercege egy különleges altatót használ, amely amnéziával jár, az alany nem tud visszaemlékezni, hogy volt-e már korábban felébresztve, és más módon sem tudja megállapítani, hogy milyen nap van, de a kísérlet menetével tisztában lesz.

A herceg minden felébresztésnél felteszi neki a következő kérdést:

„Mit gondolsz, mekkora a valószínűsége, hogy fejet dobtam?”

Csipkerózsika szemszögéből három eset lehetséges:

1. A herceg fejet dobott, és hétfőn ébresztette fel
2. A herceg írást dobott, és hétfőn ébresztette fel
3. A herceg írást dobott, és kedden ébresztette fel

A három eset egyenrangú, ezért a herceg kérdésére $\frac{1}{3}$ lesz a válasza.

Azonban ha hagyományosan megvizsgáljuk a pénzfeldobást, a kérdésre a válasz nem Csipkerózsika szemszögéből egyértelműen $\frac{1}{2}$.

De most akkor mennyi a helyes válasz, $1/2$ vagy $1/3$?

Igazából mindkét válasz helyes, a válaszok különbsége abból ered, hogy két különböző kérdésre felelnek. A válasz $1/2$, ha csak simán a pénzfeldobást vizsgáljuk, azonban ha Csipkerózsika kihallgatását figyeljük a helyes válasz az $1/3$. Ezzel az amnéziás kis trükkel a herceg az írás dobásának szubjektív valószínűségét a duplájára növelte, ezért Csipkerózsika szemszögéből valóban $1/3$ a fej dobásának valószínűsége. A helyesnek választott válaszunk csak a kérdés értelmezésén múlik. [5]

4. Néhány fejtörő paradoxon

4.1.1. Monty Hall-paradoxon

A feladat a következő: Egy nyereményjátékban a játékosunknak három ajtó közül kell választania, amelyek közül az egyik mögött a nyeremény van, a másik kettő mögött pedig semmi. Először a játékos csak rámutat az egyik ajtóra, de mielőtt valóban kinyitná, a játékvezető a másik két ajtó közül kinyit egyet, amelyik mögött nincs nyeremény. (A játékvezető tudja, hogy melyik ajtó mögött van a nyeremény.) A játékvezető ekkor ajánl egy lehetőséget, a játékos módosíthatja a választását a másik, még csukva lévő ajtóra. A kérdés, hogy megéri-e módosítani.

Sokaknak furcsának hangzik elsőre a válasz, de minden esetben megéri váltani. Amikor a játékos először választ a 3 ajtó közül $1/3$ annak a valószínűsége, hogy a helyes ajtót választja, és $2/3$ annak, hogy rossz ajtót választ. Azonban amikor a játékvezető kizárja a másik két ajtó közül az egyiket, amely mögött biztos nincs a nyeremény, annak a valószínűségén nem változtat, hogy a játékos által választott ajtó mögött $1/3$ valószínűséggel van a nyeremény, de mivel az biztos, hogy valamelyik ajtó mögött van a nyeremény, ezért a másik ajtó mögött a nyerési valószínűség $2/3$ lesz. Tehát ha vált $2/3$ valószínűséggel viszi haza a nyereményt, míg ha nem vált, akkor csak $1/3$ valószínűséggel nyer.

A levezetés egyszerűbb megértését segíti az alábbi táblázat. A kiszámítandó valószínűséget nem befolyásolja az a feltevés, hogy a játékos mindig az első ajtót választja először.

1. ajtó	2. ajtó	3. ajtó	A játékvezető kinyitja	Ha a játékos módosít
nyeremény	semmi	semmi	2. vagy 3. ajtót	veszt
semmi	nyeremény	semmi	3. ajtót	nyer
semmi	semmi	nyeremény	2. ajtót	nyer

De miért számít ez a feladat paradoxonnak?

A feladat ellentmond a „józan ész logikájának”. A legtöbb ember, amikor először találkozik ezzel a feladattal, tévesen azt gondolja, hogy teljesen mindegy, hogy a játékos vált-e vagy sem. A „józan ész logikája” azt diktálja, hogy amikor a játékvezető kizárja az egyik ajtót, a helyes ajtó eltalálásának valószínűsége $1/2$ -re módosul, mert két ajtó közül kell választani és nem befolyásol semmit az előző választásunk. Azonban, ha benézünk a színfalak mögé, láthatjuk, hogy az ajtó kizárása után nem tiszta lappal indulunk, így mindig megéri váltani és $2/3$ valószínűséggel nyerünk. [6]

A valószínűségszámítás azt diktálja, hogy mindig megéri váltani, de a szerencsejátékosok védelmére szóljon, hogy az az $1/3$ veszteségi valószínűség pont az, amikor az első megérzésünk a helyes és ha megváltoztatjuk a döntésünk, akkor veszünk. Minden szerencsejátékos ismeri ezt a rossz érzést...

Tekintsük meg a feladat néhány változatát!

4.1.2. Két játékos

Ebben a változatban ugyanúgy három ajtó van, egy nyeremény, de két játékos. Először mindkét játékos választ egy-egy ajtót, de nem ugyan azt. Amelyik játékos rossz

ajtót választott az kiesik és a játékvezető megmutatja, hogy a kiesett játékos ajtaja mögött nincs semmi. Amennyiben mindketten rossz ajtót választottak a játékvezető véletlenszerűen dönti el, melyikük esik ki. Természetesen a játékosok nem tudják, hogy mindketten rossz ajtót választottak-e. Miután csak két ajtó maradt, a játékvezető felajánlja a módosítási lehetőséget a bentmaradt játékosnak. A kérdés maradt a régi, megéri-e módosítani?

A meglepő tény az, hogy most nem éri meg a játékosnak módosítani. Amennyiben módosít csak egy esetben nyerhet, ha elsőre mindketten rossz ajtót választottak, ennek valószínűsége pedig $1/3$. Tehát ha nem módosít $2/3$ valószínűséggel találja meg a nyereményt. A könnyebb szemléltetés érdekében ismét felírtam a lehetséges kimeneteket egy táblázatba. Tegyük fel, hogy az első játékos mindig az 1. ajtót, a második játékos pedig mindig a 2. ajtót választja. Természetesen ez nem befolyásolja a kiszámítandó valószínűséget. [6]

1. ajtó	2. ajtó	3. ajtó	Kiesik	Ha a bentmaradt játékos módosít
nyeremény	semmi	semmi	2. játékos	veszt
semmi	nyeremény	semmi	1. játékos	veszt
semmi	semmi	nyeremény	valamelyik	nyer

4.1.3. N ajtó

Most a játékos N darab ajtóból választhat. Először kiválaszt egyet, majd a játékvezető kinyit egy másikat, amely mögött nem a nyeremény van. Ezután a játékos, ha akar, módosíthat a választásán, vagy kitarthat mellette. A döntés után a játékvezető újabb ajtót nyit ki, majd ismét módosíthat a választásán, és ez így halad, ameddig végül már csak két ajtó marad, amelyiket a játékos épp választott és még egy. A kérdés az,

hogy mi a lehető legjobb stratégia arra, hogy a játékos végül hazavigye a nyereményt, hányszor, mikor és hogyan érdemes módosítani?

Bapeswara Rao és Bhaskara Rao könyvükben bizonyították, hogy a lehető legjobb stratégia az, ha a játékos addig az eredeti döntésénél marad, amíg már csak két ajtó marad, majd a legvégén vált. Így $\frac{N-1}{N}$ a nyerésének a valószínűsége. [7]

4.2. Pétervári paradoxon

A játék a következő: Egy szabályos pénzérmét addig dobálunk, amíg fejet nem dobunk. Ha ez első alkalomra sikerül, kapunk a banktól 2 dinárt, ha másodjára, akkor 4-et, ha harmadjára, akkor 8-at, ha k -adik alkalomra dobunk fejet akkor a banktól 2^k dinárt kapunk. Mennyi pénzt fizessünk a banknak előre, hogy a játék méltányos legyen? (A várható nyereményünk 0 dinár legyen.)

A nyereményünk várható értéke:

$$\frac{1}{2} \cdot 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 2^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot 2^4 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot 2^k + \dots = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots = \infty$$

A nyereményünk várható értéke végtelen. Ez azt jelenti, hogy a bank várhatóan végtelen sok pénzt fizet ki nekünk, tehát a játék elején nekünk is végtelen sok pénzt kellene fizetnünk a banknak, hogy a játék méltányos legyen. Azért ez elég hihetetlennek és irreálisnak hangzik. A levezetés matematikai szempontból teljesen helyes, de akkor hol a hiba, miért mond ellent a megoldásunk a „józan ész” logikájának?

A problémát az okozza, hogy a várható értéket a végtelenbe tartva számoljuk, ezért kapunk irreális megoldást. Ha feltételezzük, hogy a banknak véges sok pénz áll a rendelkezésére, akkor már kézzel fogható megoldást kapunk. Ez a pénzösszeg a példa kedvéért legyen most 1 000 000 dinár (ha ennél többet kellene fizetnie a banknak akkor is csak 1 000 000 dinárt fizet). Így a várható nyereményünk a következő: ($2^{20} > 1\,000\,000$)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 2^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{19} \cdot 2^{19} + \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{20} + \left(\frac{1}{2}\right)^{21} + \left(\frac{1}{2}\right)^{22} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^k + \dots \right] \cdot 10^6 = \\ & = 19 + \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{20} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k}{1 - \frac{1}{2}} \right) \cdot 10^6 = 19 + 1,907 \approx 21 \\ & \text{(Az } \left(\frac{1}{2}\right)^{20} + \left(\frac{1}{2}\right)^{21} + \left(\frac{1}{2}\right)^{22} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^k + \dots \text{ egy mértani sorozat, az } S_n = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \end{aligned}$$

képlettel kiszámítottam a tagok összegét. ($a = \left(\frac{1}{2}\right)^{20}, q = \frac{1}{2}$))

Belátható, hogy ebben az esetben ha 21 dinárt fizetünk a banknak, akkor méltányos lesz a játék, sőt, a bank még egy kicsit jól is jár. Ez az eredmény már teljesen elfogadható.
[1]

4.3. A furfangos rab esete

„Egy szultán kegyes hangulatában úgy dönt, hogy a kivégzés előtt álló rab sorsának eldöntését a vakvéletlenre bízza. A rab kap 50-50 egyforma méretű piros és kék golyót, ezeket tetszése szerint szétoszthatja két külsőre egyforma urnába. Ezután bekötött szemmel véletlenszerűen választania kell egy urnát (nem tudja a két urnát kívülről megkülönböztetni), s abból ki kell húznia egy golyót. Ha ez a golyó piros, megmenekül, ha kék, kivégzik.”[8] Ha a rab a számára legkedvezőbben rendezi el a golyókat, mekkora valószínűséggel szabadul meg?

A logikus válasznak az $1/2$ tűnik, mivel mindkét golyóból ugyanúgy 50-50 van, de van egy kis csavar a feladatban. A rabnak két urnája van. Ha feltétel lenne, hogy mindkét urnába ugyanannyit (50-50 golyót) kell raknia, vagy csak egy urnája lenne a rabnak, akkor valóban $1/2$ valószínűséggel kerülhetné el a halált. De mi a helyzet a jelenlegi esetben?

A rab bekötött szemmel választja az urnát, így $1/2$ mindkét urna választásának a valószínűsége. Ezzel nem tud előnyhöz jutni. De a golyókkal igen.

Ha egy urnában csak egy golyó van, akkor csak azt az egyet húzhatja ki belőle a rab, ez egyértelmű. Tehát ha lenne egy urnája, amiben csak egy piros golyó van, akkor ha azt az urnát választja (aminek $1/2$ a valószínűsége), akkor már biztos megmenekül. A többi golyót jobb lehetőség híján kénytelen a másik urnába rakni. Számoljuk ki erre az elosztásra a piros golyó húzásának a valószínűségét, ha az egyik urnában 1 piros, a másik urnában 49 piros 50 kék golyó van. Természetesen az urnák sorrendje nem számít, mert kívülről nem megkülönböztethetők.

$$P = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{49}{99} = 0,74747 \approx 0,75$$

Ez az elosztás esetén a rab majdnem $3/4$ valószínűséggel megmenekül. De valóban ez a lehető legmagasabb valószínűség a rab megmenekülésére?

Ha megnézzük a törtszámokat a koordinátatengelyen belátható, hogy két egymás melletti tört különbsége, vagyis az $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ (n egy természetes szám) érték

$n = 1$ esetén lesz a maximális. Azért ebben az esetben, mert az $\frac{1}{n}$ sorozat, amikor n tart 1 -ből a végtelenbe, egy szigorúan monoton csökkenő sorozat, de egyre kisebb mértékben csökken, ezért a sorozat legelején a legnagyobb ez a különbség. Tehát bárhogy máshogy osztjuk szét a golyókat, ezzel a golyóelosztással növelhetjük legjobban a piros golyó húzásának a valószínűségét. Ameddig a rab kénytelen mind a 100 golyót belerakni az urnába addig ez a legjobb lehetőség.

4.4. A Bertrand-féle paradoxon

A feladat a következő: Rajzoljunk egy kört és találomra válasszuk ki valamelyik húrját. Mekkora annak a valószínűsége, hogy az általunk találomra kiválasztott húr hosszabb, mint a körbe írt szabályos háromszög oldala.

A paradoxont az okozza, hogy három, egyformán természetesnek és logikusnak tűnő levezetés teljesen más megoldáshoz vezet.

1. lehetőség (1. ábra):

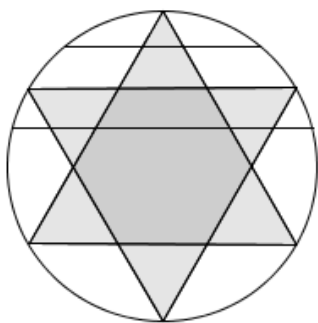
Válasszunk ki egy tetszőleges húrt, majd rajzoljunk két szabályos háromszöget a körbe úgy, hogy mindkét háromszög magasságának egyenese merőleges legyen a húrra. (A két háromszög nem fedi egymást.) Így a húr akkor számít a háromszög oldalánál hosszabbnak, ha a két háromszög alapja által közrefogott területen kívül helyezkedik el. Ha a magasságegyenes alapján kiszámítjuk ennek a valószínűségét, akkor $1/2$ -et kapunk.

2. lehetőség (2. ábra):

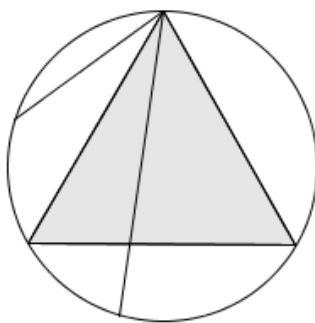
Találomra válasszunk ki egy húrt a háromszögben, majd rajzoljuk meg a körbe a szabályos háromszöget úgy, hogy a háromszög egyik csúcsa a húr egyik végpontja legyen. A kör területét vizsgálva a három egyenlő hosszú ív közül csak a ponttal szemköztes ív esetén lesz a húr hosszabb a szabályos háromszög oldalánál. Geometriai valószínűséggel kiszámíthatjuk, hogy ennek a valószínűsége $1/3$.

3. lehetőség (3. ábra):

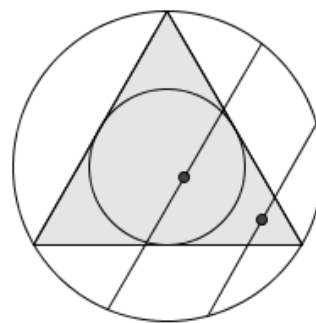
Találomra válasszunk ki egy pontot a körben egyenletes eloszlás szerint. Minden ilyen pont pontosan egy húrt határoz meg, mégpedig azt, amelynek a középpontja. Ezek a húrok akkor lesznek hosszabbak a körbe írható háromszög oldalánál, ha a középpontjuk a háromszögbe beírható körébe esik. A szabályos háromszög beírható és körülírható körének sugarának arány sugáráránya $1/2$, területeik aránya ezért $1/4$. Tehát ha ezzel a módszerrel vizsgáljuk a húrokat, $1/4$ valószínűséggel lesz a húr hosszabb a körbe írható szabályos háromszög oldalánál.



(1. ábra)



(2. ábra)



(3. ábra)

A paradoxont az okozza, hogy a „találomra választás” nincs egyértelműen definiálva. Igaz, hogy valamiféle egyenletes eloszlással bír, azonban a feladat nagyon jól rámutat arra, hogy egyáltalán nem mindegy, hogy minek az egyenletes eloszlását vizsgáljuk. Az első esetben a körlapon, a másodikban a kör kerületén, míg a harmadik esetben egy pontnak a kör területén vizsgáljuk az egyenletes eloszlását. Ez vezet a három különböző eredményhez. [1]

5. Összefoglaló

A ruletthez kerestem nyerési stratégiákat az interneten, amikor először találkoztam a valószínűségszámítási paradoxonokkal. Nagyon érdekesnek találtam a témát, ezért is írtam ebből a szakdolgozatom. Személyes kedvencem a Bertrand- féle paradoxon, ezt találom a legérdekesebbnek és talán egy kicsit összetettebb is, mint a többi. Ezért is hagytam a végére, hogy a folyamatosan komplikálódó paradoxonok csúcsa legyen. De az egyszerűbb paradoxonok is tudnak érdekesek lenni, például a Simpson-féle paradoxonhoz hasonló a szakdolgozatom előtt nem is jutott volna az eszembe.

Szerintem két dolgot nagyon jól bemutatnak ezek a paradoxonok, elsősorban azt, hogy a világunk messze nem tökéletes. Életünk során sokszor kerülünk mi is paradoxonokba, akár egy döntés folyamán, akár a véleményünk mond ellen valaminek, a paradoxonok mindig ott lihegnek a nyakunkban.

A másik fontos dolog pedig amit nekem megtanítottak a paradoxonok az az, hogy ha néha elsiklunk a nagyon apró részletek felett és csak a lényegre koncentrálnunk, nem vagyunk szörszálhasogatóak, akkor megkímélhetjük magunkat csomó fejfájástól.

6. Irodalomjegyzék

- [1] Székely J. Gábor: Paradoxonok a véletlen matematikájában (Typotex Elektronikus Kiadó Kft. – Budapest 2010)
- [2] Bognár Gergely: A megoldatlan Zénon paradoxonok kétezer-ötszáz éve új gondolatokat ébresztenek - http://hps.elte.hu/tdk/dogak/bognarg_doga.pdf (2014.05.24.)
- [3] Raymond Smullyan: Seherezádé rejtélye (Typotex Elektronikus Kiadó Kft. – Budapest 2010)
- [4] Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János, Vincze István: Matematika tankönyv 10 (Negyedik, javított kiadás; Mozaik Kiadó – Szeged, 2005)
- [5] Adam Elga: Self-locating belief and the Sleeping Beauty problem
<http://www.princeton.edu/~adame/papers/sleeping/sleeping.html>(2014.05.24.)
- [6] http://en.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall_problem(2014.05.24.)
- [7] Rao, V. V. Bapeswara and Rao, M. Bhaskara: A Three Door Game Show and Some of its Variants (1992)
- [8] http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Orosz_Gyula/Val/v3.html
(2014.05.24.)

Nyilatkozatok

Alulírott Toki  Rudolf, a zentai Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium  s Kollégium v gz s tanulója kijelentem, hogy a szakdolgozatomat nem megengedett segítség nélkül, saját magam készítettem és csak az irodalomjegyzékben megadott forrásokat használtam fel. Minden olyan részt, melyet szó szerint, vagy azonos értelemben de átfogalmazva más forrásból vettem, egyértelműen, a forrás megadásával megjelöltem.

Zenta, 2014. május 5.

Toki  Rudolf

Alulírott Toki  Rudolf, a zentai Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium  s Kollégium v gz s tanulója kijelentem, hogy hozz j r lok ahhoz, hogy szakdolgozatom egy részét vagy teljes eg sz t iskolám mindenki számára elérhetővé tegye a könyvtárában, az iskola különböző kiadványaiban, ideértve az elektronikus megjelenéseket is, mint amilyen az iskola honlapja.

Tudomásul veszem, hogy az iskola kötelezi magát, hogy a szakdolgozatom b rminem  felhasználása során hivatkozik erre a szakdolgozatra névvel, címmel és évszámmal.

Zenta, 2014. május 5.

Toki  Rudolf

Adatlap

A bizottság tagjai:

Megjegyzések:

Dátum: _____

Osztályzat: _____ (____)