

PÉICS HAJNALKA
CSIKÓS PAJOR GIZELLA
BÉRES ZOLTÁN

ALGEBRA

ELMÉLETI ÖSSZEFOGLALÓ ÉS PÉLDATÁR

BOLYAI FARKAS ALAPÍTVÁNY
ZENTA 2011.

Szerzők: Dr. Péics Hajnalka, rendkívüli egyetemi tanár,
Újvidéki Egyetem, Építőmérnöki Kar, Szabadka

Csikós Pajor Gizella magiszter, szakfőiskolai tanár,
Szabadkai Műszaki Szakfőiskola, Szabadka
Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta

Béres Zoltán, középiskolai tanár,
Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta
Vegyészet-Technológiai Iskola, Szabadka

Szaklektor: Boros István magiszter, szakfőiskolai tanár,
Szabadkai Műszaki Szakfőiskola, Szabadka

Ábrák: Rožnjik Andrea magiszter, egyetemi tanársegéd,
Újvidéki Egyetem, Építőmérnöki Kar, Szabadka

Fedőlapterv: Molnár Csikós Nándor

Kiadja: Bolyai Farkas Alapítvány, Zenta

Kiadásért felel: Kormányos Róbert

Felelős szerkesztő: Vida János

A tankönyv kézírata a Szülőföld Alap támogatásával készült.



Kedves Olvasó!

Ezt a matematikakönyvet, az *Analízis elméleti összefoglalóhoz és feladatgyűjteményhez* hasonlóan, elsősorban a matematikai gimnáziumban magyarul tanuló diákoknak szántuk, de reméljük, hogy az általános gimnáziumokban és más középiskolákban is fel tudnak használni belőle feladatsorokat, sikeresen tudják alkalmazni a mindennapi vagy emelt szintű oktatásban.

Ez a tankönyvpótló kiadvány nem egy meghatározott évfolyam számára készült, ugyanis összefoglaltunk benne minden olyan témakört az algebra tárgyköréből, melyet a négy év folyamán a matematikai gimnáziumban tanítunk. Minden címszó alatt rövid elméleti összefoglaló után példák, illusztrációk, majd részletesen kidolgozott feladatsorok következnek.

E könyv megírására az készítetett bennünket, hogy a Bolyai Gimnázium tanáraiként nem tudtunk tanulóinknak olyan magyar nyelvű matematika-tankönyvet ajánlani, amely teljes egészében felölelné a számukra előírt tananyagot. Ez sokban nehezítette a tanulók számára az önálló tanulást. A könyv a magyar nyelv és a matematikai szakkifejezések használatának igényességével íródott, ezzel is segítve a diákokat kétnyelvű környezetünkben a szép és helyes anyanyelv és szaknyelv használatára.

Lektorunk, Boros István magiszter, a Szabadkai Műszaki Szakfőiskola tanára, számos értékes megjegyzéssel segítette munkánkat. A szöveget színes ábrákkal gazdagította és szemléletessé tette Rožnjik Andrea magiszter, a szabadkai Építőmérnöki Kar tanársegédje. Fogadják köszönetünket.

Köszönetet mondunk még a Bolyai Farkas Alapítvány munkatársainak és a Szülőföld Alapnak, akik lehetővé tették és támogatták e könyv kéziratának elkészítését, és elektronikus megjelentetését.

Kitartást és eredményes munkát kívánunk mindenkinek, aki e könyv segítségével szeretne elmélyedni az algebra csodálatos világában.

Zenta, 2011. május

A Szerzők

Tartalom

1. Matematikai logika és a halmazelmélet alapjai	1
1.1. Matematikai logika	1
1.1.1. Kijelentések és a velük való műveletek	1
1.1.2. Tautológiák és alkalmazásuk	7
1.1.3. Kvantorok	13
1.2. Halmazelméleti alapfogalmak	26
1.2.1. A halmaz fogalma	26
1.2.2. Műveletek halmazokkal	28
1.3. Relációk, leképezések (függvények)	36
1.3.1. Binér relációk és tulajdonságaik	36
1.3.2. Binér műveletek és tulajdonságaik	43
2. Számhalmazok és számelmélet	54
2.1. A számok keletkezése	54
2.2. Természetes számok halmaza	55
2.3. Egész számok halmaza	63
2.3.1. Oszthatóság	64
2.3.2. Legnagyobb közös osztó	70
2.3.3. Euklideszi algoritmus	71
2.3.4. Legkisebb közös többszörös	72
2.3.5. Prímszámok	73
2.4. Racionális számok halmaza	80
2.5. Valós számok halmaza	84
2.5.1. Irracionális számok halmaza	84
2.5.2. Valós számok halmazának axiomatizálása	85
2.5.3. Valós számokkal kapcsolatos fogalmak	86
2.6. Számelméleti alapfogalmak	89
2.6.1. A kongruencia fogalma	89
2.6.2. Maradékosztályok	90
2.6.3. Számok adott modulo szerinti rendje	91
2.6.4. Oszthatósági szabályok	95
2.6.5. Diofantoszi (diofantikus) egyenletek	97
2.7. Matematikai indukció alkalmazása - összetett feladatok	107
3. Racionális algebrai kifejezések	114
3.1. Algebrai mennyiségek és kifejezések	114
3.2. Nevezetes alakú szorzatok - algebrai azonosságok	115
3.3. Egyváltozós polinomok	119
3.4. Polinomok legnagyobb közös osztója és legkisebb közös többszöröse	133
3.5. Műveletek racionális algebrai törtekkel	140

3.5.1.	Algebrai törtek egyszerűsítése	140
3.5.2.	Algebrai törtek összeadása és kivonása	141
3.5.3.	Algebrai törtek szorzása és osztása	142
3.6.	Néhány fontosabb egyenlőtlenség	147
4.	Lineáris egyenletek, egyenlőtlenségek és egyenletrendszerek	152
4.1.	Lineáris egyenletek	152
4.2.	Lineáris egyenlőtlenségek és egyenlőtlenségrendszerek	163
4.3.	Lineáris egyenletrendszerek	171
4.4.	Kétváltozós lineáris egyenlőtlenségrendszerek	187
4.5.	Lineáris programozás	193
5.	Hatványozás és gyökvonás	199
5.1.	Természetes és egész kitevőjű hatványok	199
5.2.	A gyökvonás fogalma és műveleti szabályai	202
5.2.1.	A gyök fogalma és jelentése	202
5.2.2.	Műveletek a gyökökkel	204
5.2.3.	Gyöktelenítés	208
5.2.4.	Racionális kitevőjű hatványok	211
6.	Komplex számok	225
6.1.	Komplex számok algebrai alakja	225
6.2.	Műveletek komplex számokkal	227
7.	Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek és egyenletrendszerek	236
7.1.	Másodfokú egyenletek	236
7.1.1.	Alapfogalmak	236
7.1.2.	A teljes másodfokú egyenlet megoldóképlete	237
7.1.3.	Viéte képletek	240
7.1.4.	A másodfokú trinom tényezőkre bontása	242
7.1.5.	A másodfokú egyenlet valós gyökeinek előjele	243
7.1.6.	Másodfokú egyenletre visszavezethető egyismeretlenes egyenletek	244
7.2.	Másodfokú egyenlőtlenségek	256
7.3.	Kétismeretlenes másodfokú egyenletrendszerek	261
7.4.	Irracionális egyenletek	272
7.5.	Irracionális egyenlőtlenségek	281
8.	Exponenciális és logaritmikus egyenletek, egyenlőtlenségek és egyenletrendszerek	287
8.1.	A hatványozás kiterjesztése irracionális kitevőkre és az exponenciális függvény fogalma	287
8.2.	Exponenciális egyenletek, egyenlőtlenségek és egyenletrendszerek	290
8.2.1.	Exponenciális egyenletek	290
8.2.2.	Exponenciális egyenlőtlenségek	293
8.2.3.	Exponenciális egyenletrendszerek	294

8.3.	A logaritmus fogalmának bevezetése	305
8.4.	A logaritmus műveleti azonosságai	307
8.5.	Logaritmusos egyenletek, egyenlőtlenségek és egyenletrendszerek	310
8.5.1.	A logaritmusfüggvény és logaritmusos egyenletek	310
8.5.2.	Logaritmusos egyenlőtlenségek	313
8.5.3.	Logaritmusos egyenletrendszerek	314
9.	Kombinatorika	328
9.1.	Kombinatorikai alapfogalmak	328
9.1.1.	Logikai szita	328
9.1.2.	Permutáció	331
9.1.3.	Variáció	336
9.1.4.	Kombináció	337
9.2.	Binomiális képlet	356
9.2.1.	A binomiális együtthatók és tulajdonságai	356
9.2.2.	A binomiális képlet	360
10.	Komplex számok trigonometrikus és exponenciális alakja	365
10.1.	Komplex számok trigonometrikus alakja	365
10.2.	Komplex számok szorzása és osztása trigonometrikus alakban	368
10.3.	Komplex számok hatványozása trigonometrikus alakban	370
10.4.	Komplex számok gyökvonása	372
10.5.	Komplex számok exponenciális alakja	375
11.	Polinomok	389
11.1.	Komplex együtthatós polinom fogalma	389
11.2.	Műveletek polinomokkal	390
11.3.	Polinomok oszthatósága	394
11.4.	Polinomok gyökei	396
11.5.	Az algebra alaptétele és annak következményei	402
11.6.	Viéte képletek	404
11.7.	Valós együtthatós polinomok	408
11.8.	Egész együtthatós polinom racionális gyökei	409
11.9.	Harmadfokú egyenletek	417
11.10.	Magasabbfokú egyenletrendszerek	418

1. Matematikai logika és a halmazelmélet alapjai

1.1. Matematikai logika

Az ókori görög filozófusok a világ megismerhetőségén elmélkedve a következtetéseik helyességét is vizsgálták. Ez vezetett a logika tudományának kialakulásához. A logikai törvények első nagy rendszerezője Arisztotelész (i.e. 384–322) volt.

A matematikai logika és a halmazelmélet a XIX. században indult gyors fejlődésnek. Ez arra készítette a matematikusokat, hogy az addig elért eredményeiket újraértelmezzék, új alapokra helyezték. Eközben több paradoxon is megrengette a matematika építményét, amelyek tisztázása végetvetett a matematika intuitív korszakának. Míg korábban a nagy matematikus, Leonhard Euler (1707-1783) sokszor olyan fogalmakra is támaszkodott, amelyeket nem definiált pontosan, addig a XIX. századtól kezdve minden matematikus számára kötelezővé vált a szigorú logikai szabályokra épülő axiomatikus építkezés.

A matematikai logika és a halmazelmélet ma már a matematika minden ágát átszövi. A következtetések szerkezetének a vizsgálata, valamint a helyes következtetések szerkezetének a feltárása képezi a matematikai logika alapvető feladatát.

1.1.1. Kijelentések és a velük való műveletek

A matematikai logikában *kijelentéseken* (*logikai kijelentéseken vagy ítéleteken*) olyan kijelentő mondatokat értünk, amelyekről egy adott tárgyaláson belül egyértelműene eldönthető, hogy igazak, vagy hamisak. Ezt a matematikai logika nyelvén úgy mondjuk, hogy egy kijelentés *logikai értéke* igaz, vagy hamis. A „kijelentés” a matematikai logika alapfogalma, ezért nem definiáljuk.

1.1. Példa. Tekintsük a következő mondatokat.

1° Az 5 természetes szám.

2° Minden négyzet téglalap?

3° Zenta a Tisza bal partján fekszik.

4° A π 100. tizedesjegye 1.

5° Vajdaság lakosainak 72,5%-a magas.

6° Minden kék tegnap nagyobb a hídon.

7° A folyó árad.

A megadott mondatok közül kijelentések az 1°, 3° és 4°. A 2° nem kijelentés, mert nem kijelentő mondat, az 5° sem kijelentés, mert nem eldönthető a logikai értéke (nem definiált, hogy kit tekintünk magasnak). A 6° mondat értelmetlen. A 7° mondatban nem világos, hogy melyik folyóról van szó, így ezt sem tekintjük kijelentésnek.

A bevezetőben említettük, hogy Arisztotelészt tartjuk az elsőnek, aki kijelentésekkel és következtetésekkel tudományosan foglalkozott. Tőle származik az a két alapelv is, amelyet a következőkben mi is érvényeseknek tekintünk. Ezek az *Ellentmondástalanság elve* és a *Harmadik kizárásának elve*, melyeket a következőképpen fogalmazhatunk meg:

1. *Ellentmondástalanság elve*: Egy kijelentés egyidejűleg nem lehet igaz is és hamis is.

2. *Harmadik kizárásának elve*: Ha egy kijelentés nem igaz, akkor hamis, mert harmadik lehetőség nincs (dichotomia).

A továbbiakban bevezetünk néhány jelölést. A kijelentéseket p, q, r, \dots betűkkel jelöljük, a logikai értékek közül az igaz jele \top (1 vagy i), a hamisé, illetve nem igazé \perp (0 vagy h). A $\tau(p) = \top$ (vagy $|p| = \top$) azt jelenti, hogy a p kijelentés logikai értéke igaz, míg a $\tau(p) = \perp$ (vagy $|p| = \perp$) azt jelenti, hogy a p kijelentés logikai értéke hamis.

A kijelentések között egyváltozós és kétváltozós műveletek definiálhatók.

A negáció („nem...”)

1.1. Definíció. A p kijelentés negációján azt a $\neg p$ (olvasd: „nem p ”) kijelentést értjük, amelynek logikai értéke pontosan akkor igaz, ha p logikai értéke hamis.

A definíció alapján a negáció értéktáblázata a következő:

p	$\neg p$
\top	\perp
\perp	\top

Az értéktáblázattal megadott művelet így is felírható:

$$\tau(\neg p) = \begin{cases} \top, & \text{ha } \tau(p) = \perp, \\ \perp, & \text{ha } \tau(p) = \top. \end{cases}$$

A negáció latin eredetű szó, jelentése: tagadás, visszautasítás.

A matematikai bizonyítások során gyakran élünk azzal a technikával, hogy bizonyos kijelentéseknek a tagadását használjuk fel. Ilyenek például a különböző típusú indirekt bizonyítások, de ilyen a kontrapozíciós következtetési séma és a diszjunktív szillogizmus is.

A negáció kapcsolatáról más logikai műveletekkel a későbbiekben lesz szó, de hadd említsük meg itt a negáció egy érdekes tulajdonságát. Tekintsük e célból a következő mondatokat:

1° Ma süt a nap.

2° Ma nem süt a nap.

3° Nem igaz, hogy ma nem süt a nap.

4° Téved az, aki szerint nem igaz, hogy ma nem süt a nap.

A fenti példamondatok logikai szerkezete rendre a következőképpen írható: p , $\neg p$, $\neg\neg p$ és $\neg\neg\neg p$. Attól függően, hogy a kijelentés elhangzásának napján a nap süt-e vagy sem, a következő logikai értékek adódnak:

p	$\neg p$	$\neg\neg p$	$\neg\neg\neg p$
\top	\perp	\top	\perp
\perp	\top	\perp	\top

A táblázat alapján kimondhatjuk a következő tételt.

1.1. Tétel. Egy kijelentés kétszeres negációjának logikai értéke megegyezik magának a kijelentésnek a logikai értékével.

1.1. Következmény. Egy kijelentés előtt álló páros számú negáció jel mindig elhagyható, páratlanszámú pedig eggyel helyettesíthető.

A köznyelvi használat itt is eltér a matematikaitól. Az „Én Pistát már nagyon régen láttam” mondat ugyanazt jelenti, mint az „Én Pistát már nagyon régen nem láttam”, holott az előzőekben leírtak szerint a két kijelentésnek ellentétes jelentésűnek kellene lenni.

A konjunkció („...és...”)

1.2. Definíció. A p és q kijelentések konjunkcióján azt a $p \wedge q$ (olvasd: „ p és q ”) kijelentést értjük, amelynek logikai értéke pontosan akkor igaz, amikor p és q is igaz.

A definíció alapján a konjunkció értéktáblázata a következő:

p	q	$p \wedge q$
\top	\top	\top
\top	\perp	\perp
\perp	\top	\perp
\perp	\perp	\perp

Az értéktáblázattal megadott művelet így is felírható:

$$\tau(p \wedge q) = \begin{cases} \top, & \text{ha } \tau(p) = \tau(q) = \top, \\ \perp, & \text{különben.} \end{cases}$$

A konjunkció latin eredetű szó, jelentése: összekapcsolás.

Az értéktáblázatból jól látszik, hogy:

$$\top \wedge p = p, \quad \perp \wedge p = \perp, \quad p \wedge \top = p, \quad p \wedge \perp = \perp. \quad (1.1)$$

A konjunkció jelentőségét az adja, hogy ez a művelet éppen megfelel a köznyelvi „és” szónak, ugyanis a

„Méne elbusulva, némán haragjában, és leült az udvar távolabb zugában.”

kijelentés éppen akkor igaz, ha mindkét része igaz, azaz Toldi Miklós (mert róla van szó) valóban ment haragosan, némán, és valóban leült az udvar egy távolabbi részén, különben a kijelentés hamis. A magyar nyelv azonban sokkal gazdagabb, mint a matematika nyelve, ugyanis a „de”, „noha”, „bár”, „ám”, „meg”, „viszont”, „pedig”, „...is...is” stb. szavak logikailag szintén a konjunkciót jelentik. Például: „Pista ötöst kapott, habár nem tanult” logikailag azt jelenti, hogy „Pista ötöst kapott és Pista nem tanult”.

A diszjunkció („...vagy...”)

1.3. Definíció. A p és q kijelentések diszjunkcióján azt a $p \vee q$ (olvasd: „ p vagy q ”) kijelentést értjük, amelynek logikai értéke pontosan akkor hamis, ha p és q is hamis.

A definíció alapján a diszjunkció értéktáblázata a következő:

p	q	$p \vee q$
\top	\top	\top
\top	\perp	\top
\perp	\top	\top
\perp	\perp	\perp

Az értéktáblázattal megadott művelet így is felírható:

$$\tau(p \vee q) = \begin{cases} \perp, & \text{ha } \tau(p) = \tau(q) = \perp, \\ \top, & \text{különben.} \end{cases}$$

A diszjunkció latin eredetű szó, jelentése: szétkapcsolás, szétválasztás.

Az értéktáblázatból jól látszik, hogy:

$$\top \vee p = \top, \quad \perp \vee p = p, \quad p \vee \top = \top, \quad p \vee \perp = p. \quad (1.2)$$

A diszjunkciónak megfelelő kötőszó a köznyelvben a „vagy”. Például „A diákok a kiránduláson sétáltak vagy fogócskáztak” kijelentést igaznak érezzük akkor is, ha a diákok csak sétáltak, akkor is, ha a diákok csak fogócskáztak, és akkor is, ha sétáltak is meg fogócskáztak is. Az ilyen értelemben használt „vagy” kötőszót „megengedő vagy”-nak nevezzük. Így különböztetjük meg a „kizáró vagy”-tól, amelyet a következő példa jól szemléltet: „Rabok legyünk vagy szabadok”. Itt a két mondatrész egyszerre nem teljesülhet, kizárják egymást.

A köznyelvben a „kizáró vagy” kihangsúlyozható a „vagy...vagy...” kötőszópárral, például: „Vagy moziba megyünk, vagy színházba” kijelentésben hangsúlyozott a két mondatrész egymással való logikai szembenállása.

Ez a művelet a matematikai logikában így definiálható:

1.4. Definíció. *A p és q kijelentések kizáró diszjunkcióján azt a $p \vee q$ (olvasd: „vagy p , vagy q ”) kijelentést értjük, amelynek logikai értéke pontosan akkor hamis, ha p és q kijelentések közül az egyik igaz, a másik hamis.*

A definíció alapján a kizáró diszjunkció értéktáblázata a következő:

p	q	$p \vee q$
\top	\top	\perp
\top	\perp	\top
\perp	\top	\top
\perp	\perp	\perp

Az értéktáblázattal megadott művelet így is felírható:

$$\tau(p \vee q) = \begin{cases} \top, & \text{ha } \tau(p) \neq \tau(q), \\ \perp, & \text{különben.} \end{cases}$$

A kizáró diszjunkció műveletet szokás még Zsegalkin-műveletnek nevezni, a $p \vee q$ jelölés helyett pedig a $p|q$ is használatos.

Az értéktáblázatból jól látszik, hogy:

$$\top \vee p = \neg p, \quad \perp \vee p = p, \quad p \vee \top = \neg p, \quad p \vee \perp = p.$$

Az implikáció („ha..., akkor...”)

1.5. Definíció. *A p és q kijelentések implikációján azt a $p \Rightarrow q$ (olv: „ha p , akkor q ”) kijelentést értjük, amelynek logikai értéke pontosan akkor hamis, ha p igaz és q hamis (azaz, ha igazból következtetünk hamisra).*

A definíció alapján az implikációnak értéktáblázata a következő:

p	q	$p \Rightarrow q$
\top	\top	\top
\top	\perp	\perp
\perp	\top	\top
\perp	\perp	\top

Az értéktáblázattal megadott művelet így is felírható:

$$\tau(p \Rightarrow q) = \begin{cases} \perp, & \text{ha } \tau(p) = \top \text{ és } \tau(q) = \perp, \\ \top, & \text{különben.} \end{cases}$$

Az implikáció latin eredetű szó, jelentése: belehajtogatás, belebonyolítás. Köznyelvi használatban arra utal, hogy valami kimondatlanul is benne rejlik valamiben.

Az értéktáblázatból jól látszik, hogy:

$$\top \Rightarrow p = p, \quad \perp \Rightarrow p = \top, \quad p \Rightarrow \top = \top, \quad p \Rightarrow \perp = \neg p. \quad (1.3)$$

1.2. Példa. Tekintsük a következő kijelentéseket:

1° Ha ma kedd van, akkor holnap szerda lesz.

2° Ha ma kedd van, akkor holnap csütörtök lesz.

3° Ha ma kisüt a nap, akkor elmegyek sétálni.

Az első mondatot igaznak tartjuk, mivel az első mondatrész igazsága maga után vonja a második igazságát, a második mondatot pedig hamisnak tartjuk. Mivel ítéletünket nem befolyásolják a tagmondatok logikai értékei, így az ezekben szereplő „ha..., akkor...” kifejezést nem tekintjük logikai műveleteknek. A harmadik mondat különbözik az első kettőtől, ugyanis a harmadik egy feltételes állítás, amely a jövőre vonatkozik. Az ilyen állítás igazságának eldöntéséhez ismerni kell a komponensek logikai értékeit. Ha az első komponens igaz, akkor a kijelentés logikai értékét a második komponens logikai értéke határozza meg, azaz ha kisütött a nap, akkor ha valóban elmentem sétálni, igaz a kijelentés, ha pedig mégsem mentem el sétálni, akkor hamis. Azonban ha a nap nem süt ki, akkor a harmadik mondatnak nem tulajdonítunk logikai értéket.

A fentiekből kiderült, hogy a köznyelvben előforduló „ha p , akkor q ” szerkezetű mondatok logikai értelmezése nem egyértelmű. Annyit azonban leszögezhetünk, hogy egy ilyen szerkezetű mondat igazsága kizárja a p igaz és q hamis esetet. Az implikációt definiáló műveleti tábla éppen megfelel ennek a kíváncsúnak.

1.3. Példa. Az implikáció a matematikában fontos szerepet tölt be. Ennek szemléltetésére tekintsük a következő kijelentést:

Ha egy szám osztható négygyel, akkor osztható kettővel is.

Ez a kijelentés tetszőleges természetes számra igaz. Azt mondjuk ilyenkor, hogy a négygyel való oszthatóságnak *szükséges feltétele* a kettővel való oszthatóság, a kettővel való oszthatóságnak pedig *elégleges feltétele* a négygyel való oszthatóság, azaz $p \Rightarrow q$ esetén p elégleges feltétele q -nak, q pedig szükséges feltétele p -nek.

Szokás beszélni az *implikáció megfordításáról*.

1.4. Példa. Az előző példa kijelentésének megfordítása így hangzik:

Ha egy szám osztható kettővel, akkor osztható négygyel is.

Nyilvánvaló, hogy a megfordítás logikai értéke hamis (például a 6 osztható kettővel és nem osztható négygyel). Ekkor azt mondjuk, hogy a négygyel való oszthatóságnak *szükséges, de nem elégséges feltétele* a kettővel való oszthatóság.

Az ekvivalencia

(„...akkor és csakis akkor...”)

1.6. Definíció. A p és q kijelentések ekvivalenciáján azt a $p \Leftrightarrow q$ (olvasd: „ p , akkor és csakis akkor q ”) kijelentést értjük, amelynek logikai értéke pontosan akkor igaz, ha p és q logikai értéke megegyezik.

A definíció alapján az ekvivalencia értéktáblázata a következő:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
\top	\top	\top
\top	\perp	\perp
\perp	\top	\perp
\perp	\perp	\top

Az értéktáblázattal megadott művelet így is felírható:

$$\tau(p \Leftrightarrow q) = \begin{cases} \top, & \text{ha } \tau(p) = \tau(q), \\ \perp, & \text{különben.} \end{cases}$$

Az ekvivalencia latin eredetű szó, jelentése: egyértelműség, egyenértékűség. Köznyelvi használatban arra utal, hogy valami megegyezik, megfelel valaminek, egyenértékű valamivel. Az értéktáblázatból jól látszik, hogy:

$$\top \Leftrightarrow p = p, \quad \perp \Leftrightarrow p = \neg p, \quad p \Leftrightarrow \top = p, \quad p \Leftrightarrow \perp = \neg p. \quad (1.4)$$

1.5. Példa. Tekintsük a következő mondatokat:

1° Ha egy szám nullára végződik, akkor osztható 10-zel.

2° Ha egy szám osztható 10-zel, akkor nullára végződik.

3° Ha egy szám osztható 10-zel, akkor és csakis akkor nullára végződik.

4° Ha egy szám nullára végződik, akkor és csakis akkor osztható 10-zel.

5° Egy szám pontosan akkor végződik nullára, ha osztható 10-zel.

Az első két kijelentés egy implikáció és annak megfordítása. (Mindkettő igaz minden természetes számra.) Ebből adódóan a két kijelentés egymásnak kölcsönösen szükséges és elégséges feltétele, azaz a két kijelentés egyszerre teljesül vagy egyszerre nem teljesül, azaz a két kijelentés ugyanazt jelenti, egymással ekvivalens. Ezt a viszonyt fogalmazza meg a harmadik, a negyedik és az ötödik mondat. Az „akkor és csakis akkor” szó szerkezet nyelvtanilag talán kicsit mesterkéltnek tűnhet, de a matematikában ez a megfogalmazás teljesen elfogadott.

1.1.2. Tautológiák és alkalmazásuk

Az előző részben logikai műveleteket definiáltunk. Ezeket a műveleteket ugyanúgy lehet alkalmazni a logikai értékekre, mint például a jól ismert összeadást a természetes számokra. Például a

$$5 \cdot (7 + 3) = 5 \cdot 10 = 50$$

számoláshoz hasonlóan „számolunk” a logikai értékekkel is:

$$\top \Rightarrow (\perp \wedge \top) = \top \Rightarrow \top = \top$$

A definiált műveletek felhasználásával kijelentéslogikai formulákat képezhetünk. Nézzük, mik is lehetnek egy kijelentéslogikai formula „építőkövei”:

- a) Kijelentéslogikai értékek: \top , \perp . Ezeket *állandóknak* nevezzük.
- b) Felbontatlan kijelentések: p , q , r , ... Ezeket *kijelentéslogikai változóknak* nevezzük.
- c) Kijelentéslogikai műveleti jelek: \neg , \wedge , \vee , \Rightarrow , \Leftrightarrow .
- d) A műveletek hatáskörét és sorrendjét leíró jelek. Ezek a különböző alakú zárójelpárok.

1.7. Definíció. *Kijelentéslogikai formuláknak nevezzük azokat az a), b), c) és d) részben leírt jelekből álló véges sorozatot, amely az alábbi szabályok szerint építhető fel:*

- 1° Az állandók és a kijelentéslogikai változók kijelentéslogikai formulák;
- 2° Ha A egy formula, akkor $\neg A$ szintén formula;
- 3° Ha A és B is egy-egy formula, akkor $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$ és $(A \Leftrightarrow B)$ szintén formulák;
- 4° Kijelentéslogikai formulát csak az 1°, 2° és 3° véges számú alkalmazásával nyerhetünk.

1.6. Példa. Nem kijelentéslogikai formula a következő: $p(\vee qr \Leftrightarrow \neg)$

Eleget tesznek a definíciónak a következők: $(p \vee (\neg q \Rightarrow p)) \wedge \neg p$ vagy $p \vee (\top \wedge q)$.

Tekintsünk most egy olyan kijelentéslogikai formulát, amely tartalmaz legalább egy változót:

$$p \Rightarrow (\top \wedge \neg q).$$

A kijelentéslogikai formula kiértékeléséhez legtöbbször ismernünk kell a benne szereplő változók logikai értékeit. Például a fenti formula logikai értéke a $\tau(p) = \top$ és a $\tau(q) = \perp$ értékek mellett $\top \Rightarrow (\top \wedge \neg \perp) = \top \Rightarrow (\top \wedge \top) = \top \Rightarrow \top = \top$.

1.8. Definíció. *Egy kijelentéslogikai formula interpretációján a benne szereplő összes változó értékének megadását értjük.*

Vajon bármilyen interpretáció mellett igaz lesz a fenti formula, vagy a fenti esetben csak „szerencsénk volt” a p és q értékeinek megválasztásánál? Erre a kérdésre könnyen választ adhatunk, ha kiszámoljuk a formula logikai értékét p -re és q -ra az összes lehetséges értéket választva.

- 1. $\tau(p) = \top$ és a $\tau(q) = \top$. Ekkor $\top \Rightarrow (\top \wedge \neg \top) = \top \Rightarrow (\top \wedge \perp) = \top \Rightarrow \perp = \perp$,
- 2. $\tau(p) = \top$ és a $\tau(q) = \perp$. Ekkor $\top \Rightarrow (\top \wedge \neg \perp) = \top \Rightarrow (\top \wedge \top) = \top \Rightarrow \top = \top$,
- 3. $\tau(p) = \perp$ és a $\tau(q) = \top$. Ekkor $\perp \Rightarrow (\top \wedge \neg \top) = \perp \Rightarrow (\top \wedge \perp) = \perp \Rightarrow \perp = \top$,
- 4. $\tau(p) = \perp$ és a $\tau(q) = \perp$. Ekkor $\perp \Rightarrow (\top \wedge \neg \perp) = \perp \Rightarrow (\top \wedge \top) = \perp \Rightarrow \top = \top$.

A fenti levezetés – különösen kettőnél több változó esetén – nagyon nehézkesé válhat, ezért az egyes interpretációk kiszámításánál keletkező részeredményeket táblázatba érdemes foglalni a következő módon:

p	q	$\neg q$	$\neg \wedge q$	$p \Rightarrow (\neg \wedge q)$
\top	\top	\perp	\perp	\perp
\top	\perp	\top	\top	\top
\perp	\top	\perp	\perp	\top
\perp	\perp	\top	\top	\top

A fenti táblázatot a kijelentéslogikai formula *értéktáblázatának* nevezzük. (Ha a táblázat kitöltését nem sor-, hanem oszlopfolytonosan végezzük, a tévedés lehetősége jelentősen csökken.)

További vizsgálódásaink során különösen fontos szerepet játszanak azok a formulák, amelyek minden interpretációja igaz.

1.9. Definíció. Azokat a logikai formulákat, amelyeknek minden interpretációja igaz, tautológiáknak vagy azonosan igaz formuláknak nevezzük.

Hasonlítsuk össze a következő két formulát: $p \vee p$ és $p \wedge p$. Észrevehetjük, hogy a két formula hasonlóan „viselkedik”, azaz azonos interpretáció mellett azonos logikai értéket ad eredményül.

1.10. Definíció. Ha két logikai formulában ugyanannyi különböző nevű változó van és ezen változók azonos értékadása mellett a formulák ugyanazt az értéket veszik fel, akkor a két formulát egyenértékűnek nevezzük. Ezt a viszonyt így jelöljük: $\tau(A) = \tau(B)$ vagy $|A| = |B|$.

1.2. Tétel. Az A és B formulák akkor és csak akkor egyenértékűek, ha $A \Leftrightarrow B$ tautológia.

1.2. Következmény. Két logikai formula egyenlőségének (egyenértékűségének) vizsgálatát elvégezhetjük egy tautológiavizsgálattal.

1.7. Példa. Bizonyítsuk be, hogy $\tau(p \vee (p \wedge q)) = \tau(p)$. (abszorbcíós tulajdonság)

Az 1.2. Következmény szerint elegendő belátni, hogy $(p \vee (p \wedge q)) \Leftrightarrow p$ tautológia. Készítsünk értéktáblázatot!

p	q	$(p \wedge q)$	$(p \vee (p \wedge q))$	$(p \vee (p \wedge q)) \Leftrightarrow p$
\top	\top	\top	\top	\top
\top	\perp	\perp	\top	\top
\perp	\top	\perp	\perp	\top
\perp	\perp	\perp	\perp	\top

A táblázat utolsó oszlopáról leolvasható, hogy az összes lehetséges interpretáció igaz, így a vizsgált formula tautológia.

1.1. Megjegyzés. A táblázat első néhány oszlopát, amelyben a változóknak adunk különböző értékeket, érdemes valamilyen jól kipróbált algoritmus szerint kitölteni. Azt könnyű belátni, hogy minden egyes újabb változó felbukkanása a lehetséges esetek számát megduplázza, tehát három változónál a táblázat 8, négyenél 16 soros, és így tovább.

A formulák tautológia-vizsgálatánál az értéktáblázatkészítésen kívül más módszer is a rendelkezésünkre áll. Ilyen például az *ellentmondásra való visszavezetés* (egyes szakirodal-makban *lehetetlenre való visszavezetés*), illetve a *változó szerinti vizsgálat*. Az alábbiakban mindkét bizonyítási módot megmutatjuk az előző példában tárgyalt tautológián.

1.8. Példa. Bizonyítsuk be az *ellentmondáshoz vezetés* módszerével, hogy $(p \vee (p \wedge q)) \Leftrightarrow p$ tautológia.

Tegyük fel, hogy a vizsgált kifejezés nem tautológia. Ekkor két eset lehetséges.

1^o A bal oldal igaz, a jobb oldal hamis. Ha a jobb oldal hamis, akkor $\tau(p) = \perp$, vagyis a bal oldalon a belső zárójelben hamisat kapunk, és így a bal oldal $\perp \vee \perp$ miatt hamisat ad, ez pedig ellentmond az 1^o pont alatti feltevésünknek.

2^o A bal oldal hamis, a jobb oldal igaz. Ha a jobb oldal igaz, akkor $\tau(p) = \top$, és így a bal oldal is igaz, hiszen a diszjunkció egyik tagja igaz. Ez ellentmond a 2^o pont alatti feltevésünknek.

Beláttuk, hogy a két oldalon nem lehetnek különbözők a logikai értékek, vagyis a két oldal mindig ekvivalens egymással.

1.9. Példa. Bizonyítsuk be *változó szerinti vizsgálattal*, hogy $(p \vee (p \wedge q)) \Leftrightarrow p$ tautológia. Legyen q az a változó, amely szerint a kifejezést vizsgáljuk. Tegyük fel, hogy $\tau(q) = \top$. Ekkor a bal oldal a következőképpen egyszerűsödik: $\tau((p \vee (p \wedge \top))) = \tau(p \vee p) = \tau(p)$. Ez éppen az, ami a jobb oldalon áll, így a két oldal egyenértékű.

Tegyük fel most, hogy $\tau(q) = \perp$. Ekkor a bal oldalon megint csak p marad, mert most $\tau((p \vee (p \wedge \perp))) = \tau(p \vee \perp) = \tau(p)$. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

A logikai műveletekről

Az alábbiakban összefoglaljuk az eddig tárgyalt logikai műveletek tulajdonságait, és azok egymáshoz való viszonyát.

1.3. Tétel. *A konjunkció kommutatív, asszociatív és idempotens, azaz*

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p), \quad ((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r)), \quad (p \wedge p) \Leftrightarrow p.$$

A fenti tétel a diszjunkcióra is kimondható és igazolható.

1.4. Tétel. *A diszjunkció kommutatív, asszociatív és idempotens, azaz*

$$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p), \quad ((p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee r)), \quad (p \vee p) \Leftrightarrow p.$$

A tulajdonságokat megnevező latin szavak helyett magyar elnevezések is használatban vannak. A kommutativitást felcserélhetőségnek, az asszociativitást társíthatóságnak, az idempontenciát azonos hatványúnak nevezi a magyar szakirodalom. Ez utóbbi elnevezés könnyebben érthetővé válik, ha arra gondolunk, hogy $p \wedge p = p^2 = p$, azaz $p^n = p$.

Az alábbi tétel a konjunkció és a diszjunkció közötti kapcsolatra mutat rá.

1.5. Tétel. *A konjunkció és a diszjunkció egymásra nézve disztributív és abszorbtív, azaz*

$$\begin{aligned} (p \wedge (q \vee r)) &\Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)), & (p \wedge (p \vee q)) &\Leftrightarrow p, \\ (p \vee (q \wedge r)) &\Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r)), & (p \vee (p \wedge q)) &\Leftrightarrow p, \end{aligned}$$

valamint mindkét műveletre érvényes De Morgan törvénye:

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q), \quad \neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q).$$

A tulajdonságokat megnevező latin szavak helyett magyar szavak is használatosak. A disztributivitás helyett szétoszthatóság, az abszorbtív tulajdonság helyett elnyelési tulajdonság mondható. Az utolsó két tulajdonság nevét Augustus De Morgan (1806-1871) angol matematikusról kapta.

1.3. Következmény. A De Morgan-azonosságok alkalmasak arra, hogy a diszjunkciót negációra és konjunkcióra, a konjunkciót pedig negációra és diszjunkcióra cseréljük az alábbiak szerint:

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \quad \text{és} \quad (p \vee q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q).$$

Bizonyítás. Az állítás belátására elég arra gondolnunk, hogy mindkét egyenlőség esetében mindkét oldal tagadásával és az 1.1. Következmény felhasználásával a De Morgan-azonosságokat kapjuk. \diamond

A továbbiakban közlünk néhány implikációt és ekvivalenciát is tartalmazó azonosságot.

1.6. Tétel. Érvényesek a következő állítások:

- 1° $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge q)$, 4° $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$ (kommutativitás),
 2° $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ 5° $((p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)))$
 (kontrapozíció), (asszociativitás),
 3° $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$, 6° $(p \Leftrightarrow p) \Leftrightarrow p$ (idempotencia).

1.4. Következmény. A 3° azonosság szerint bármely ekvivalencia felcserélhető két implikációra és egy konjunkcióra. Az 1° azonosság szerint bármely implikáció felcserélhető egy negációra és egy konjunkcióra. Ha figyelembe vesszük az 1.3. Következmény megállapítását, akkor adódik, hogy bármely kijelentéslogikai formula felírható vagy csak negáció és konjunkció, vagy csak negáció és diszjunkció felhasználásával.

1.7. Tétel. $\tau(p \wedge \neg p) = \perp$, $\tau(p \vee \neg p) = \top$, $\tau(p \vee \neg p) = \top$, $\tau(p \Rightarrow \neg p) = \neg p$, $\tau(p \Leftrightarrow \neg p) = \perp$.

A logikai műveletek bevezetésénél utalva a köznyelvvél való hasonlóságra valamennyire érzékeltettük, hogy a definiált műveletek bevezetése indokolt, de vajon definiálhattunk-e volna más kétváltozós logikai műveleteket, és ha igen, hányat.

1.8. Tétel. A kétértékű logikában a kétváltozós műveletek száma 16.

Bizonyítás. Egy kétváltozós műveletet úgy definiálunk, hogy megadjuk a két változó összes lehetséges értéke esetén a művelet eredményét. Az alábbi táblázat egy kitöltése tehát egy művelet definiálását jelenti. A kérdőjelek helyére az \top és a \perp jelet 16-féleképpen írhatjuk be, így lesz 16 különböző kétváltozós művelet. \diamond

p	q	$p \circ q$
\top	\top	?
\top	\perp	?
\perp	\top	?
\perp	\perp	?

Végül megemlítjük a következő, a számítógépek építése szempontjából gyakorlati hasznosságú tételt.

1.9. Tétel. Minden n -változós logikai művelet kifejezhető negáció és konjunkció (diszjunkció) segítségével.

Bizonyítás. Mutassuk meg, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott háromváltozós logikai műveletre érvényes a tétel állítása.

A mellékelt táblázattal adott művelet leírható a következő negációt, konjunkciót és diszjunkciót tartalmazó formulával: $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$. A kapott formula pedig az 1.4. Következmény szerint a kívánt alakba átírható. \diamond

p	q	r	
\top	\top	\top	\perp
\top	\top	\perp	\top
\top	\perp	\top	\perp
\top	\perp	\perp	\perp
\perp	\top	\top	\perp
\perp	\top	\perp	\top
\perp	\perp	\top	\top
\perp	\perp	\perp	\perp

Következmény és következtetési sémák

Bevezetőnkben említettük, hogy a logika egyik fő feladata a helyes következtetések szerkezetének a feltárása. A következőkben erről lesz szó.

1.10. Példa.

Ha vasárnap van, akkor együtt ebédel a család.

Ma vasárnap van.

Együtt ebédel a család.

A fenti példában a vonal fölötti kijelentéseket premisszáknak (feltételeknek), a vonal alatti mondatot konklúciónak (következménynek) szokták nevezni. Mit értsünk azonban a következmény szó alatt? Logikusnak tűnik az A kijelentés következményének tekinteni a B kijelentést, ha valahányszor A igaz, B is az, más szóval nem fordul elő olyan eset, hogy A igaz, B pedig nem. Ez vezet a következő definícióhoz.

1.11. Definíció. Az A formulának a B formulát a következményének nevezzük, ha az $A \Rightarrow B$ formula tautológia.

Ez a következményfogalom az implikációnál írtakhoz hasonlóan eltér a hétköznapi értelemben vett következménytől, mert az A = „A kutya ugat” kijelentésnek matematikai értelemben véve következménye a B = „A 3 prímszám” kijelentés, hiszen a definíció szerint az $A \Rightarrow B$ formula tautológia, mivel a B mindig igaz. A hétköznapi életben ezt nem tekintenénk következménynek, de a matematikában ez az értelmezés nem okoz gondot.

A fejezet elején bemutatott példában láttuk, hogy az A premisszából akkor következik a B konklúzió, ha $A \Rightarrow B$ tautológia. Megmutatjuk, hogy hogyan kell kezelni azt az esetet, amelynél a premissza több kijelentésből áll.

1.12. Definíció. A B formulát az $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ formulák következményének nevezzük, ha

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \dots \wedge A_n) \Rightarrow B$$

formula tautológia.

1.11. Példa. Formalizáljuk az előző példa kijelentéseit.

Ha vasárnap van, akkor együtt ebédel a család. $p \Rightarrow q$

Ma vasárnap van. p

Együtt ebédel a család. q

A következtetést pontosan akkor tekintjük helyesnek, ha a $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$ formula tautológia. Indirekt módon bizonyítsuk, azaz tegyük fel, hogy a kapott formula nem tautológia, ami azt jelenti, hogy az implikáció első tagja igaz, a második hamis, azaz most $\tau((p \Rightarrow q) \wedge p) = \top$ és $\tau(q) = \perp$. Az első egyenlőségből viszont az következik, hogy $\tau(p) = \tau(p \Rightarrow q) = \top$, emiatt q nem lehet hamis, tehát ellentmondáshoz jutottunk és ezzel bebizonyítottuk a következtetés helyességét.

1.12. Példa. Döntsük el, hogy igaz-e a következő következtetés:

Ha egy természetes szám nullára végződik, akkor az a szám osztható tízzel.

Az 1238907650 szám nullára végződik.

Az 1238907650 szám osztható tízzel.

Az egyes kijelentések formalizálása után azt kapjuk, hogy az első premissza logikai formulája $p \Rightarrow q$, a másodiké p , a következményé pedig q , így a helyesség igazolása az előző példában igazolt $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$ formula tautológia-vizsgálatára vezet vissza. Azt már bizonyítottuk az előző példában, hogy a formula tautológia, így ez egy helyes következtetés.

Most felsoroljuk a kijelentéslogika néhány gyakrabban előforduló következtetési sémáját.

1. Modus ponens (helyező mód)
$$\frac{p \Rightarrow q \quad p}{q}$$
2. Reductio ad absurdum (lehetetlenre való visszavezetés)
$$\frac{\begin{array}{c} \neg p \Rightarrow q \\ \neg p \Rightarrow \neg q \end{array}}{p}$$
3. Indirekt bizonyítás
$$\frac{\begin{array}{c} q \\ \neg p \Rightarrow \neg q \end{array}}{p}$$
4. Indirekt bizonyítás
$$\frac{\begin{array}{c} \neg p \Rightarrow q \\ \neg q \end{array}}{p}$$
5. Reductio ad absurdum cáfoló alakja
$$\frac{p \Rightarrow q \quad \neg p \Rightarrow \neg q}{\neg p}$$
6. Indirekt bizonyítás cáfoló alakja
$$\frac{q \quad \neg p \Rightarrow \neg q}{\neg p}$$
7. Indirekt bizonyítás cáfoló alakja (Modus tollens, azaz elvevő mód)
$$\frac{p \Rightarrow q \quad \neg q}{\neg p}$$
8. Kontrapozíciós következtetési séma
$$\frac{p \Rightarrow q}{\neg p \Rightarrow \neg q}$$
9. Láncszabály
$$\frac{p \Rightarrow q \quad q \Rightarrow r}{p \Rightarrow r}$$
10. Diszjunkt szillogizmus (Modus tollendo ponens, azaz elvéve helyező mód)
$$\frac{p \vee q \quad \neg p}{q}$$

Itt kell rámutatnunk arra, hogy a fenti következtetési szabályok nemcsak matematikai, hanem hétköznapi valóságunk részei is. Például tegyük fel, hogy egy zárt helyiségben tartózkodva meg szeretnénk állapítani, hogy esik-e az eső. Az ablakon kinézve ezt sokszor elég nehéz eldönteni, de tegyük fel, hogy azt látjuk, hogy a járókelők tartanak-e a fejük fölé esernyőt. Mondjuk lássuk azt, hogy nem tartanak. Ekkor így okoskodunk: Ha esne az eső, akkor a járókelők nyitott esernyővel járnának ($p \Rightarrow q$). De mi azt látjuk, hogy nem ezt teszik ($\neg q$). Tehát az eső nem esik ($\neg p$). Most a fent 7. sorszám alatt megemlített Modus tollensnek nevezett következtetési sémát alkalmaztuk.

1.1.3. Kvantorok

1.13. Példa.

Minden szarka farka tarka.

Csórka egy szarka.

Csórka farka tarka.

Ez a példa érzésünk szerint egy helyes következtetést ír le, ám ezt a korábban tárgyalt kijelentéslogikai eszközeinkkel nem tudjuk bebizonyítani. Ez azért is zavaró, mert az említett példában található kijelentésekhez hasonló szerkezetű kijelentések a matematikai nyelvzetben is gyakran előfordulnak. Mindez azt követeli meg, hogy olyan fogalmakat vezessünk be, amelyek a kijelentések belső szerkezetét is leírják valamilyen szinten.

Vezessük be a következő jelöléseket:

1° Jelentse Sx azt az állítást, hogy „ x szarka”.

2° Jelentse Tx azt az állítást, hogy „ x farka tarka”.

3° Csórikát jelöljük c -vel.

A bevezetett jelölések segítségével a kijelentés így írható át:

Minden szarka farka tarka.	Minden x -re: $Sx \Rightarrow Tx$.
Csórka egy szarka.	Sc
Csórka farka tarka.	Tc

Az Sx , Tx típusú kijelentéseket *predikátumoknak* nevezzük, a bennük szereplő x -et *individuumváltozónak*, c -t pedig *individumnak* (latin szó, jelentése: egyén, egyéniség, egyed). A Tc kijelentést *konkretizációnak* nevezzük.

1.14. Példa. Adott az *Anna és Béla testvérek, és ha Anna nincs otthon, akkor Béla harsonán gyakorol* kijelentés, melynek formalizálásához be vezetjük a következő jelöléseket: $Txy =$ „ x és y testvérek”, $Ox =$ „ x otthon van”, $Hx =$ „ x harsonán gyakorol”.

Individuumok: $a =$ Anna és $b =$ Béla, a formalizált kijelentés pedig $Tab \wedge (\neg Oa \Rightarrow Hb)$.

A fent leírt szerkezetű kijelentésekkel, következtetésekkel a *predikátumlogika* foglalkozik. Már a 1.13. Példa is tartalmazta a „minden” szót: Minden x -re: $Sx \Rightarrow Tx$. Ennek jelölésére külön jelet használunk: \forall . A kijelentés most így írható fel: $(\forall x)(Sx \Rightarrow Tx)$. Az univerzális kvantor megnevezésére alkalmas még a „bármely”, „tetszőleges”,... szó is.

1.13. Definíció. A „minden” szó jelölésére a \forall jelet használjuk, és univerzális kvantornak nevezzük. A \forall jelet mindig egy individuum-változó követi.

Ahhoz, hogy a „minden” szót használhassuk, léteznie kell egy tárgyalási univerzumnak, amelynek az elemeire a „minden” szó vonatkozik. Ha például a hetes azt jelenti órán a tanárnak, hogy mindenki jelen van az órán, azt úgy kell érteni, hogy mindenki ott van, akinek ott kell lennie. Ez esetben a tárgyalási univerzum az adott órán jelen lenni köteles tanulók halmaza. A tárgyalási univerzum jele: U .

Az univerzális kvantort akkor van értelme használni, ha azt olyan predikátum követi, amely tartalmazza az univerzális kvantor által jelölt individuumváltozót. Legyen Px egy predikátum és $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. Ekkor a

$$\tau(\forall x Px) = \tau(Pu_1 \wedge Pu_2 \wedge \dots \wedge Pu_n),$$

azaz az univerzális kvantifikáció a konjunkció általánosításaként is felfogható.

Matematikai szövegben gyakran jelenik meg a „van olyan..., amelyre...” szószerkezet, például: Van olyan háromszög, amely derékszögű. Ha bevezetjük a Hx = „ x háromszög”, Dx = „ x derékszögű” jelöléseket, akkor a fenti mondat így formalizálható: Van olyan x , amelyre $(Hx \wedge Dx)$. A \exists jel bevezetésével a kifejezés így egyszerűsödik: $\exists x(Hx \wedge Dx)$.

1.14. Definíció. A „van olyan..., amelyre” szószerkezet jelölésére a \exists jelet használjuk, és egzisztenciális kvantornak nevezzük. A \exists jelet mindig egy individuumváltozó követi.

Az egzisztenciális kvantor használatakor a tárgyalási univerzumnak egyértelműen adottnak kell lenni. Az egzisztenciális kvantort akkor van értelme használni, ha azt olyan predikátum követi, amely tartalmazza az egzisztenciális kvantor által jelölt individuumváltozót. Legyen Px egy predikátum és $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. Ekkor a

$$\tau(\exists x Px) = \tau(Pu_1 \vee Pu_2 \vee \dots \vee Pu_n),$$

azaz az egzisztenciális kvantifikáció a diszjunkció általánosításaként is felfogható. Az egzisztenciális kvantor megnevezésére a „van olyan” szószerkezeten kívül alkalmas még a „létezik olyan...”, „valamely...”, ... kifejezések is.

1.15. Példa. Tekintsük a „Mindenkinek van anyja” kijelentést, amelynek formalizálásához definiáljuk az Axy két argumentumú predikátumot: Axy = „ x -nek y az anyja”. A kijelentés ekkor a $\forall x \exists y Axy$ alakban írható. Itt hallgatólagosan feltételeztük, hogy az univerzum az emberek halmaza.

A kvantorokkal kapcsolatban végezetül megjegyezzük, hogy az univerzális kvantor jele (\forall) a német „alles”, az angol „all” (jelentésük: minden) szavak első betűjének megfordításából ered, az egzisztenciális kvantor jele (\exists) pedig a német „existiert”, az angol „exist” (jelentésük: létezik) szavak első betűjének megfordításából származik. Maga a kvantor és a kvantifikálás szó a latin quantum (jelentése: mennyi, hány) szóra vezethető vissza.

A továbbiakban a kvantorokat tartalmazó kijelentések tagadásával foglalkozunk, hiszen korábban láttuk, hogy több bizonyítási eljárásnál szerepet játszik a tagadás.

1.10. Tétel. A következő formulák tautológiák:

$$\neg \forall x Ax \Leftrightarrow \exists x \neg Ax \quad \text{és} \quad \neg \exists x Ax \Leftrightarrow \forall x \neg Ax.$$

Ezeket a tautológiákat (is) szokás De Morgan-törvényeknek nevezni.

Itt szeretnénk felhívni a figyelmet egy gyakori tévedésre, amely a tagadás buktatóira is valamennyire rámutat. „A bálna a legnagyobb emlős állat” kijelentés tagadása nem „A bálna a legkisebb emlős állat”. Az 1.10. Tétel szerint a keresett tagadás megfogalmazható a következőképpen:

„Nem igaz, hogy a bálna a legnagyobb emlős állat.” = „Létezik olyan emlős állat, amelynél a bálna nem nagyobb.” = „Létezik olyan emlős állat, amely legalább akkora, mint a bálna”. Ez utóbbi mondat pedig nem azt jelenti, hogy a bálna a legkisebb.

A fenti gondolatmenet logikai szimbólumokkal:

$$\tau(\neg(\forall x \in E)(b > x)) = \tau((\exists x \in E)\neg(b > x)) = \tau((\exists x \in E)(b \leq x)),$$

ahol E az emlősök halmazát, b a bálnát, a számoknál megszokott \leq és $>$ jel pedig az állatok nagyságára vonatkozik.

1.16. Példa. A $(\exists x)(x \in \mathbf{Q} \wedge 5x + 4 = 23)$ kifejezés tagadásához tekintsük a következő egyenértékű kifejezéseket:

$$\begin{aligned} \neg((\exists x)(x \in \mathbf{Q} \wedge 5x + 4 = 23)) &\iff (\forall x)\neg((x \in \mathbf{Q} \wedge 5x + 4 = 23)) \\ &\iff (\forall x)(\neg(x \in \mathbf{Q}) \vee \neg(5x + 4 = 23)) \\ &\iff (\forall x)((x \notin \mathbf{Q}) \vee (5x + 4 \neq 23)). \end{aligned}$$

1.17. Példa. Tagadjuk most a $(\forall x)(x \in \mathbf{R} \Rightarrow x^2 \geq 0)$ kijelentést.

$$\begin{aligned} ((\forall x)(x \in \mathbf{R} \Rightarrow x^2 \geq 0)) &\iff (\exists x)\neg(x \in \mathbf{R} \Rightarrow x^2 \geq 0) \\ &\iff (\exists x)\neg(\neg(x \in \mathbf{R} \wedge \neg(x^2 \geq 0))) \\ &\iff (\exists x)\neg(\neg(x \in \mathbf{R} \wedge (x^2 < 0))) \\ &\iff (\exists x)(x \in \mathbf{R} \wedge (x^2 < 0)). \end{aligned}$$

FELADATOK

1. Döntsük el a következő mondatokról, hogy kijelentések-e:

I. Minden deltoid érintőnégyyszög.

II. A 91 prímszám.

III. Addig jár a kórsó a kútra, amíg el nem törik.

IV. Kihajolni veszélyes.

Megoldás. Az I. és II. mondatok logikai értéke eldönthető, ha megfelelő matematikai ismerettel rendelkezünk. Ezeket tekinthetjük kijelentéseknek. A III. mondat igaz volta vita tárgya lehet, és nem is lehet eldönteni. (Sok közmondással így van ez.) A IV. mondat sem tekinthető kijelentésnek, mert például a veszélyesség fogalma nem teljesen egyértelmű.

2. Legyenek adottak a következő implikációk:

I. Ha egy szám osztható 3-mal és 4-gyel, akkor osztható 12-vel is.

II. Ha egy szám osztható 16-tal, akkor 2-vel és 8-cal is.

III. Ha egy négyszög paralelogramma, akkor minden szöge derékszög.

IV. Ha egy négyszög húrnégyszög, akkor az átlói felezik egymást.

Mindegyik kijelentés esetében válaszoljuk meg a következő kérdéseket:

a) Igaz-e az implikáció?

b) Fogalmazzuk meg az implikáció megfordítását, és döntsük el, hogy igaz-e!

c) Mit tudunk mondani az első mondatrész viszonyáról a másodikra nézve?

Megoldás. a) Az I. és a II. kijelentés igaz, a III. és a IV. hamis.

b) Az I. megfordítása: Ha egy szám osztható 12-vel, akkor osztható 3-mal és 4-gyel is. Ez igaz. A II. megfordítása: Ha egy szám osztható 2-vel és 8-cal, akkor osztható 16-tal is. Ez hamis. A III. megfordítása: Ha egy négyszög minden szöge derékszög, akkor az paralelogramma. Ez igaz. A IV. megfordítása: Ha egy négyszög átlói felezik egymást, akkor az húrnégyszög. Itt a megfordítás is hamis.

c) Az I. állításnál az implikáció első komponense szükséges és elégséges feltétele a másodiknak. A II. állításnál az, hogy egy szám osztható 16-tal, elégséges, de nem

szükséges feltétele annak, hogy osztható legyen 2-vel és 8-cal. A III. állítás első komponense (egy négyszög paralelogramma) szükséges, de nem elégséges feltétele a második komponensnek (a négyszög minden szöge derékszög). A IV. implikációnál a komponensekről szükségesség és elégségeség szempontjából semmi sem mondható.

3. Igazak-e a következő ekvivalenciák:

- a) Egy szorzat akkor és csak akkor nulla, hogyha a tényezők valamelyike nulla.
- b) Két egész szám szorzata akkor és csak akkor páros, hogyha mindkét szám páros.
- c) Két egész szám szorzata akkor és csak akkor páratlan, hogyha mindkét szám páratlan.
- d) Két egész szám összege akkor és csak akkor nem páratlan, hogyha mindkét szám nem páratlan.
- e) Minden valós szám négyzete pozitív.

Megoldás. Az a) kijelentés igaz, mert valóban legalább az egyik tényező zérus kell hogy legyen. A b) kijelentés hamis, mert két egész szám szorzata akkor is páros lehet, ha csak az egyik szám páros. A c) kijelentés igaz. A d) kijelentést fogalmazzuk át a „nem páratlan” helyébe „párost” írva: Két egész szám összege akkor és csak akkor páros, hogyha mindkét szám páros. Így sokkal érthetőbb, és tudunk mondani ellenpéldát: $5 + 5 = 10$, tehát nem csak páros tagok adnak páros összeget, így a kijelentés hamis. Az e) kijelentés hamis, mert a nulla valós szám és a négyzete nulla, nem pozitív.

4. Írjuk be az üres helyekre a \Rightarrow , \Leftarrow és \Leftrightarrow jeleket úgy, hogy igaz kijelentéseket kapjunk $(m, n, p \in \mathbf{Z}, x, y, a \in \mathbf{R})$:

- | | | | |
|----|-----------------|-----------|--------------|
| a) | $m + n = m + p$ | \square | $n = p$ |
| b) | $x = y$ | \square | $xz = yz$ |
| c) | $a > 0$ | \square | $a^2 > 0$ |
| d) | $x = x $ | \square | $x > 0$ |
| e) | n páros | \square | n^2 páros. |

Megoldás. a) \Leftrightarrow (az egyenletnek ekvivalens átalakítása mindkét oldalához hozzáadni vagy elvenni egy számot). b) \Rightarrow ($z = 0$ esetén „visszafelé” nem igaz).

c) \Rightarrow (visszafelé nem igaz, ha a negatív).

d) \Leftarrow (a másik irányban $x = 0$ miatt nem igaz). e) \Leftrightarrow .

5. Egyszer Béni barátai arról faggatták, hogy szereti-e a matematikát. Ő erre válaszul a következő igaz kijelentést tette: „Nincs igazuk azoknak, akik nem tagadják azt, hogy nem szeretem a matematikát.” Vajon szereti-e Béni a matematikát?

I. Megoldás. Béni kijelentése első ránézésre elég nyakatekertnek tűnhet. Próbáljuk meg hát bizonyos részeit vele azonos jelentésű egyszerűbb részekre cserélni. Ha nincs igazuk azoknak, akik nem tagadják, akkor azoknak van igazuk, akik tagadják. Tehát Béni mondata átfogalmazható így: „Igazuk van azoknak, akik tagadják, hogy nem szeretem a matematikát.” Akik tagadják, hogy nem szeretem, azok valójában azt állítják, hogy szeretem. Ezt figyelembe véve az állítás most így hangzik: „Igazuk van azoknak, akik azt állítják, hogy szeretem a matematikát.” Ennek a mondatnak az állítása egyértelmű: Béni szereti a matematikát.

II. Megoldás. Az előző megoldásban kétszer is alkalmaztuk az 1.1. Tételt. Próbáljuk most meg alkalmazni az 1.1. Következményt, azaz számoljuk meg, hogy a „szeretem a matematikát” kijelentés előtt páros vagy páratlan számú tagadás áll. Béni kijelentésében aláhúztuk a tagadó szavakat, kifejezéseket: „Nincs igazuk azoknak, akik nem tagadják azt, hogy nem szeretem a matematikát.” Pontosan négy olyan szó, szó szerkezet van, amely megváltoztatja a kijelentés logikai értékét: „nincs igazuk”, „nem”, „tagadják”, „nem”. A 1.1. Következmény szerint ez éppen azt jelenti, hogy Béni szereti a matematikát. (Csak zárójelben megjegyezzük, hogy az, aki egy ilyen kérdésre ilyen rejtvénnnyel felérő választ ad, az tényleg szeretheti a matematikát.)

6. Mi a logikai értéke a $(\top \wedge \perp) \Rightarrow (\top \wedge (\neg \top \vee \perp))$ kifejezésnek?

Megoldás.

$$\begin{aligned} (\top \wedge \perp) &\Rightarrow (\top \wedge (\neg \top \vee \perp)) \\ \perp &\Rightarrow (\top \wedge (\perp \vee \perp)) \\ \perp &\Rightarrow (\top \wedge \perp) \\ \perp &\Rightarrow \perp \\ &\top \end{aligned}$$

7. Mi a logikai értéke a $(\perp \Rightarrow \neg(\top \vee \perp)) \Leftrightarrow \neg(\top \wedge \neg(\perp \vee \top))$ kifejezésnek?

Megoldás.

$$\begin{aligned} (\perp \Rightarrow \neg(\top \vee \perp)) &\Leftrightarrow \neg(\top \wedge \neg(\perp \vee \top)) \\ (\perp \Rightarrow \neg \top) &\Leftrightarrow \neg(\top \wedge \neg \top) \\ (\perp \Rightarrow \perp) &\Leftrightarrow \neg(\top \wedge \perp) \\ \top &\Leftrightarrow \neg \perp \\ \top &\Leftrightarrow \top \\ &\top \end{aligned}$$

8. Oldjuk meg az $\tau((\top \wedge \neg \perp) \Rightarrow \neg(p \vee \perp)) = \tau(\top \Leftrightarrow p)$ „egyenletet”.

Megoldás. A p logikai változó csak két értéket vehet fel.

1° Ha $\tau(p) = \top$, akkor

$$\begin{aligned} (\top \wedge \neg \perp) \Rightarrow \neg(\top \vee \perp) &= \top \Leftrightarrow \top, \\ (\top \wedge \top) \Rightarrow \neg \top &= \top, \\ \top \Rightarrow \perp &= \top \\ \perp &= \top. \end{aligned}$$

2° Ha $|p| = \perp$, akkor

$$\begin{aligned} (\top \wedge \neg \perp) \Rightarrow \neg(\perp \vee \perp) &= \top \Leftrightarrow \perp, \\ (\top \wedge \top) \Rightarrow \neg \perp &= \perp, \\ \top \Rightarrow \top &= \perp, \\ \top &= \perp. \end{aligned}$$

Az egyenletnek nincs megoldása, mert p egyik értéke sem elégíti ki az egyenletet.

9. Bizonyítsuk be mindhárom tanult módszerrel, hogy a $((p \Rightarrow (q \wedge r)) \wedge (\neg q \vee \neg r)) \Rightarrow \neg p$ logikai formula tautológia!

I. Megoldás. (Bizonyítás értéktáblázattal) Vezessük be a következő jelölést:

$$A = ((p \Rightarrow (q \wedge r)) \wedge (\neg q \vee \neg r)).$$

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$(q \wedge r)$	$(p \Rightarrow (q \wedge r))$	$(\neg q \vee \neg r)$	A	$A \Rightarrow \neg p$
⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥	⊤
⊤	⊤	⊥	⊥	⊥	⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊤
⊤	⊥	⊤	⊥	⊤	⊥	⊥	⊥	⊤	⊥	⊤
⊤	⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊤
⊥	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥	⊤
⊥	⊤	⊥	⊤	⊥	⊤	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤
⊥	⊥	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤
⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤

Az utolsó oszlop logikai értékei azt bizonyítják, hogy a vizsgált formula összes lehetséges interpretációja mellett igaz logikai értéket kapunk, tehát a formula tautológia.

II. Megoldás. (Bizonyítás ellentmondásra való visszavezetéssel) Tegyük fel, hogy a vizsgált formula nem tautológia, azaz van olyan interpretációja, amely hamis értéket ad. Ez csak úgy lehetséges, hogy ha az implikáció első része igaz, a második hamis:

$$\tau((p \Rightarrow (q \wedge r)) \wedge (\neg q \vee \neg r)) = \top \text{ és } \tau(\neg p) = \perp.$$

A második egyenlőségből következik, hogy $\tau(p) = \top$, az elsőből pedig hogy

$$\tau(p \Rightarrow (q \wedge r)) = \top \text{ és } \tau(\neg q \vee \neg r) = \top.$$

Mivel p igaz, így a fenti első egyenlőség miatt $\tau(q \wedge r) = \top$ (különben az implikáció nem lehetne igaz), azaz q is és r is igaz, de akkor $\tau(\neg q \vee \neg r) = \perp$, és ezzel ellentmondáshoz jutottunk a második egyenlőséggel. Mivel minden következtetésünk szabályos volt, az ellentmondást csak az okozhatta, hogy téves volt a kiindulásul vett kijelentésünk, mely szerint a vizsgált formula nem tautológia, tehát tautológia.

III. Megoldás. (Bizonyítás változó vizsgálatával) Vizsgált változónak válasszuk a p logikai változót.

1° Legyen $\tau(p) = \top$. Ekkor

$$\begin{aligned} ((\top \Rightarrow (q \wedge r)) \wedge (\neg q \vee \neg r)) &\Rightarrow \neg \top, \\ ((\top \Rightarrow (q \wedge r)) \wedge (\neg q \vee \neg r)) &\Rightarrow \perp. \end{aligned}$$

Alkalmazva a (1.3)-ban leírtakat:

$$((q \wedge r) \wedge (\neg q \vee \neg r)) \Rightarrow \perp$$

Most használjuk fel De Morgan azonosságát: $\tau(\neg(q \wedge r)) = \tau(\neg q \vee \neg r)$. Eszerint

$$((q \wedge r) \wedge \neg(q \wedge r)) \Rightarrow \perp$$

Ha $(q \wedge r)$ hamis, akkor a konjunkció bal oldala hamis, ha $(q \wedge r)$ igaz, akkor meg a konjunkció jobb oldala hamis, tehát mindenképpen $\perp \Rightarrow \perp$ adódik, ami tautológia.
2^o Legyen $\tau(p) = \perp$. Ekkor

$$((\perp \Rightarrow (q \wedge r)) \wedge (\neg q \vee \neg r)) \Rightarrow \neg \perp, \\ \top \Rightarrow \top,$$

tehát ismét tautológiát kaptunk. Más eset nem lehetséges.

10. Vizsgáljuk ki a 1.4. Definícióban definiált kizáró diszjunkció következő tulajdonságait: a) kommutativitás; b) asszociativitás; c) idempotencia; d) disztributivitás a konjunkcióra és a diszjunkcióra nézve; e) abszorpció a konjunkcióra és a diszjunkcióra nézve.

Megoldás.

a) Bizonyítandó, hogy a $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ formula tautológia.

p	q	$p \vee q$	$(q \vee p)$	$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
\top	\top	\perp	\perp	\top
\top	\perp	\top	\top	\top
\perp	\top	\top	\top	\top
\perp	\perp	\perp	\perp	\top

Ezek szerint a kizáró vagy művelet kommutatív.

b) Bizonyítandó, hogy a $((p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$ formula tautológia.

p	q	r	$(p \vee q)$	$((p \vee q) \vee r)(= A)$	$(q \vee r)$	$(p \vee (q \vee r))(= B)$	$A \Leftrightarrow B$
\top	\top	\top	\perp	\perp	\perp	\top	\top
\top	\top	\perp	\perp	\perp	\top	\perp	\perp
\top	\perp	\top	\perp	\top	\perp	\perp	\perp
\top	\perp	\perp	\perp	\top	\top	\perp	\perp
\perp	\top	\top	\top	\perp	\perp	\top	\top
\perp	\top	\perp	\top	\perp	\top	\perp	\top
\perp	\perp	\top	\top	\top	\perp	\perp	\top
\perp	\perp	\perp	\top	\top	\top	\perp	\top

Ezek alapján a kizáró diszjunkció asszociatív művelet.

c) Bizonyítandó, hogy a $(p \vee p) \Leftrightarrow p$ formula tautológia.

p	$(p \vee p)$	$(p \vee p) \Leftrightarrow p$
\top	\perp	\perp
\perp	\perp	\top

A kizáró vagy művelet nem idempotens.

d) Bizonyítandó, hogy a $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$ és a $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow ((p \vee q) \vee (p \vee r))$ formula tautológia. (A bizonyítandó állítást a táblázatban rendre A és B jelöli.)

p	q	r	$(q \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q)$	$(p \vee r)$	$((p \vee q) \wedge (p \vee r))$	A
⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊤	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊤	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊥	⊤	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊥	⊥	⊤	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊥	⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤

p	q	r	$(q \vee r)$	$p \vee (q \vee r)$	$(p \vee q)$	$(p \vee r)$	$((p \vee q) \vee (p \vee r))$	B
⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊤	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊥	⊤	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊥	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊥	⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤

Ezek alapján a kizáró vagy művelet sem a konjunkcióra, sem a diszjunkcióra nézve nem disztributív.

e) Bizonyítandó, hogy a $(p \vee (p \wedge q)) \Leftrightarrow p$ és a $(p \vee (p \vee q)) \Leftrightarrow p$ formula tautológia.

p	q	$(p \wedge q)$	$(p \vee (p \wedge q))$	$(p \vee (p \wedge q)) \Leftrightarrow p$
⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥	⊤	⊤
⊥	⊤	⊥	⊤	⊤
⊥	⊥	⊥	⊤	⊤

p	q	$(p \vee q)$	$(p \vee (p \vee q))$	$(p \vee (p \vee q)) \Leftrightarrow p$
⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊤	⊤	⊤
⊥	⊤	⊤	⊤	⊤
⊥	⊥	⊥	⊤	⊤

Ezek alapján a kizáró vagy művelet sem a konjunkcióra, sem a diszjunkcióra nézve nem abszorbtív.

11. Írjuk fel a $p \Rightarrow (p \wedge q)$ kifejezéssel ekvivalens olyan kifejezést, amely csak negációt és konjunkciót tartalmaz.

Megoldás. A megadott formulát lépésről lépésre átalakítjuk úgy, hogy mindegyik lépés előtt megnevezzük azt az azonosságot, amelyet felhasználunk.

$p \Rightarrow (p \wedge q)$	1.6. Tétel 1. azonosság
$\neg p \vee (p \wedge q)$	1.5. Tétel (disztributivitás)
$(\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee q)$	mivel $\neg p \vee p = \top$, ezért
$\neg p \vee q$	1.1. Következmény (kettős tagadás)
$\neg(\neg p \vee q)$	1.3. Következmény (De Morgan)
$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	1.1. Következmény (kettős tagadás)
$\neg(p \wedge \neg q)$	

12. Írjuk fel a $(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$ kifejezéssel ekvivalens olyan kifejezést, amely csak negációt és konjunkciót tartalmaz.

Megoldás. A megadott formulát lépésről lépésre átalakítjuk úgy, hogy mindegyik lépés előtt megnevezzük azt az azonosságot, amelyet felhasználunk.

$(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$	1.6. Tétel 3. azonosság
$((p \wedge \neg q) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)) \wedge ((\neg p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (p \wedge \neg q))$	1.6. Tétel 1. azonosság
$((p \wedge \neg q) \Rightarrow (p \vee \neg q)) \wedge ((p \vee \neg q) \Rightarrow (p \wedge \neg q))$	1.6. Tétel 1. azonosság
$(\neg(p \wedge \neg q) \vee (p \vee \neg q)) \wedge (\neg(p \vee \neg q) \vee (p \wedge \neg q))$	1.3. Következmény
$((\neg p \vee \neg \neg q) \vee (p \vee \neg q)) \wedge ((\neg p \wedge \neg \neg q) \vee (p \wedge \neg q))$	1.1. Következmény
$((\neg p \vee q) \vee (p \vee \neg q)) \wedge ((\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q))$	\vee művelet asszociatív
$(\neg p \vee q \vee p \vee \neg q) \wedge ((\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q))$	\vee művelet kommutatív
$(\neg p \vee p \vee q \vee \neg q) \wedge ((\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q))$	$\neg p \vee p = \top$, ezért:
$(q \vee \neg q) \wedge ((\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q))$	$q \vee \neg q = \top$, ezért:
$(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$	1.1. Következmény
$\neg \neg((\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q))$	1.3. Következmény
$\neg(\neg(\neg p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge \neg q))$	

13. Hány ötváltozós logikai művelet definiálható?

Megoldás. Először számoljuk ki, hogy öt változó esetén a változók hány lehetséges értéket vehetnek fel, azaz a művelet műveleti táblája hány sort tartalmaz. Az 1.1. Megjegyzés szerint 32 soros lesz a táblázat. Most a 1.8. Tétel bizonyításában látottakhoz hasonlóan számoljuk meg, hány lehetséges kitöltése van ennek a táblázatnak. Mivel mind a 32 helyre az \top és a \perp jelek egyikét írhatjuk, ezért a lehetőségek száma 2^{32} .

14. Fejezzük ki az alábbi műveleti táblázattal megadott háromváltozós műveletet csak a) negáció és konjunkció; b) negáció és diszjunkció segítségével.

p	q	r	$?$
\top	\top	\top	\perp
\top	\top	\perp	\perp
\top	\perp	\top	\top
\top	\perp	\perp	\perp
\perp	\top	\top	\top
\perp	\top	\perp	\perp
\perp	\perp	\top	\perp
\perp	\perp	\perp	\top

Megoldás. A 1.9. Tétel bizonyításában láttuk, hogyan lehet egy olyan kifejezést felírni, amelynek éppen azok az interpretációi adnak igazat, amely sorokban a táblázat jobb szélső oszlopában \top jel áll:

$$(p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r).$$

a) alakítsuk át a fenti kifejezést a kettős tagadás tulajdonsága (1.1. Következmény) és De Morgan-azonosságai (1.3. Következmény) alapján.

$$\begin{aligned} & (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \neg \neg ((p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \neg ((\neg(p \wedge \neg q \wedge r)) \wedge (\neg(\neg p \wedge q \wedge r)) \wedge (\neg(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r))) \end{aligned}$$

A kapott kifejezés csak negációt és diszjunkciót tartalmaz.

b) A fenti formulát alakítsuk tovább a De Morgan-törvények szerint, közben pedig a kettős tagadásról tanultakat is alkalmazzuk:

$$\begin{aligned} & \neg ((\neg(p \vee \neg q \vee \neg r)) \wedge (\neg(\neg p \vee \neg q \vee \neg r)) \wedge (\neg(\neg p \vee \neg q \vee \neg r))) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \neg ((\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r)) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (\neg(\neg p \vee q \vee r) \vee \neg(p \vee \neg q \vee r) \vee \neg(p \vee q \vee \neg r)). \end{aligned}$$

15. Bizonyítsuk be tetszőleges módon a 12. oldalon található első négy következtetési sémát!

Megoldás.

1. Modus ponens. Bizonyítandó, hogy a $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$ formula tautológia. Legyen $|q| = \top$. Ekkor a kifejezés így írható: $((p \Rightarrow \top) \wedge p) \Rightarrow \top$, azaz az implikációk igazak, így az egész kifejezés is igaz. Tegyük fel most, hogy $|q| = \top$. Ekkor a kifejezés így írható: $((p \Rightarrow \perp) \wedge p) \Rightarrow \perp$. Könnyű végiggondolni, hogy ha $|p| = \top$, akkor a belső implikáció hamis, a külső pedig igaz. $|p| = \perp$ esetén pedig mindkét implikáció igaz, tehát a kifejezés is igaz.

2. Reductio ad absurdum. Bizonyítandó, hogy a $((\neg p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow \neg q)) \Rightarrow p$ formula tautológia. Tegyük fel, hogy nem az. Ekkor a zárójelen kívül lévő implikáció első komponense, a konjunkció, igaz, a második hamis, vagyis a p hamis. Megmutatjuk, hogy ez ellentmondás. Ugyanis ha $|p| = \perp$, akkor a kijelentés első fele így alakul: $(\neg \perp \Rightarrow q) \wedge (\neg \perp \Rightarrow \neg q)$, azaz $(\top \Rightarrow q) \wedge (\top \Rightarrow \neg q)$. q bármely értéke mellett a két implikáció közül az egyik hamis lesz, márpedig akkor a konjunkció is az lesz, miközben annak igaznak kellene lennie.

3. Indirekt bizonyítás. Bizonyítandó, hogy $(q \wedge (\neg p \Rightarrow \neg q)) \Rightarrow p$ formula tautológia. A kérdéses formulán ekvivalens átalakításokat alkalmazunk:

$$\begin{array}{ll} (q \wedge (\neg p \Rightarrow \neg q)) \Rightarrow p & 1.6. \text{ Tétel 1. azonosság} \\ (q \wedge (p \vee \neg q)) \Rightarrow p & 1.5. \text{ Tétel} \\ ((q \wedge p) \vee (q \wedge \neg q)) \Rightarrow p & |q \wedge \neg q| = \perp \text{ miatt:} \\ (q \wedge p) \Rightarrow p & 1.6. \text{ Tétel 1. azonosság} \\ \neg(q \wedge p) \vee p & 1.3. \text{ Következmény De Morgan} \\ (\neg q \vee \neg p) \vee p & \text{a } \vee \text{ asszociatív} \\ \neg q \vee (\neg p \vee p) & \text{mivel } |\neg p \vee p| = \top, \text{ így:} \\ \neg q \vee \top & \text{ez pedig mindig igaz.} \end{array}$$

4. Indirekt bizonyítás. Bizonyítandó, hogy $((\neg p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow p$ formula tautológia.

p	q	$\neg p$	$(\neg p \Rightarrow q)$	$\neg q$	$((\neg p \Rightarrow q) \wedge \neg q)$	$((\neg p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow p$
\top	\top	\perp	\top	\perp	\perp	\top
\top	\perp	\perp	\top	\top	\top	\top
\perp	\top	\top	\top	\perp	\perp	\top
\perp	\perp	\top	\perp	\top	\perp	\top

A táblázat utolsó oszlopáról leolvasható, hogy a formula valóban tautológia.

16. Ellenőrizzük le az alábbi következtetés helyességét:

Ha Péter tanul és ötöse lesz, akkor nem kap új könyvet.

Ha Péternek ötöse lesz, akkor a tengeren nyaralhat vagy új könyvet kap.

Péter nem nyaralhat a tengeren.

Péter új könyvet kap.

Megoldás. Vezessünk be jelöléseket a feladatban szereplő kijelentésekre:

p = Péter tanul;

q = Péternek ötöse lesz;

r = Péter a tengeren nyaralhat;

s = Péter új könyvet kap.

A feladat következtetési sémája a következő:

$$\frac{\begin{array}{l} (p \wedge q) \Rightarrow \neg s. \\ q \Rightarrow (r \vee s) \\ \neg r \end{array}}{s}$$

A következtetési séma pontosan akkor helyes, ha a

$$(((p \wedge q) \Rightarrow \neg s) \wedge (q \Rightarrow (r \vee s))) \wedge \neg r \Rightarrow s$$

formula tautológia. De vajon van-e olyan interpretáció, amely mellett hamisat kapunk? Ha van, akkor abban a

$$((p \wedge q) \Rightarrow \neg s) \wedge (q \Rightarrow (r \vee s)) \wedge \neg r$$

kifejezés igaz, miközben s hamis. De ha $|s| = \perp$, akkor

$$((p \wedge q) \Rightarrow \neg \perp) \wedge (q \Rightarrow (r \vee \perp)) \wedge \neg r,$$

amiből

$$((p \wedge q) \Rightarrow \top) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge \neg r,$$

azaz

$$\top \wedge (q \Rightarrow r) \wedge \neg r,$$

ahonnan

$$(q \Rightarrow r) \wedge \neg r.$$

Ahhoz, hogy ez a kifejezés igaz legyen, az utolsó tag miatt r -nek hamisnak kell lennie. Így adódik a $(q \Rightarrow \perp) \wedge \neg \perp$ formula, amely egyenértékű a $q \Rightarrow \perp$ formulával. Ez pontosan akkor igaz, ha q hamis. Így a következő választ adhatjuk a kérdésre: A feltételekből nem következik a konklúzió, mert ha $|q| = |r| = |s| = \perp$, akkor minden feltétel igaz, de a következmény hamis.

17. Alkalmasan választott predikátumlogikai jelölések bevezetésével formalizáljuk a következő kijelentéseket:

- a) Minden autós, akinek van megfelelő engedélye, behajthat a gyalogosövezetbe.
- b) Vilmos autós és nincs megfelelő engedélye.
- c) Létezik olyan autós, akinek ha nincs megfelelő engedélye, akkor nem hajthat be a gyalogosövezetbe.

Megoldás. Vezessük be a következő jelöléseket.

A az autósok halmaza,

$v = \text{„Vilmos”}$

$Ex = \text{„}x\text{-nek van megfelelő engedélye.”}$

$Bx = \text{„}x\text{ behajthat a gyalogosövezetbe.”}$

a)

$$\forall x((x \in A \wedge Ex) \Rightarrow Bx),$$

b)

$$v \in A \wedge \neg Ev,$$

c)

$$\exists x(x \in A \wedge (\neg Ex \Rightarrow \neg Bx)).$$

18. Az $Fxy = \text{„}x \text{ figyel } y\text{-t”}$ predikátum és az $a = \text{„Anna”}$, $b = \text{„Béla”}$ individuum-nevek felhasználásával írjuk le a következő kijelentések szerkezetét:

- a) Béla figyel Annát.
- f) Valaki mindenkit figyel.
- b) x mindenkit figyel.
- g) Mindenki figyel valakit.
- c) x -et mindenki figyel.
- h) Bélát valaki figyel.
- d) Valaki figyel x -et, x pedig y -t.
- i) Mindenkit figyel valaki.
- e) Mindenki mindenkire figyel.

Megoldás. a) Fba ,

b) $\forall y(Fxy)$,

c) $\forall y(Fyx)$,

d) $\exists y(Fyx)$,

e) $\forall x \forall y(Fxy)$,

f) $\exists x \forall y(Fxy)$,

g) $\forall x \exists y(Fxy)$,

h) $\exists x(Fxb)$,

i) $\exists x \forall y(Fxy)$.

19. Formalizáljuk a következő kijelentéseket:

- a) Bármely két különböző racionális szám között létezik egy racionális szám.
- b) Az $x^2 + 1 = 0$ egyenletnek nincs megoldása az \mathbf{R} halmazban.
- c) Pontosan egy olyan szám létezik, amelynek a négyzete 0.
- d) Az $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$ egyenletnek van legalább két különböző valós megoldása.
- e) Pontosan két olyan valós szám létezik, amelynek a négyzete egyenlő 3-mal.

Megoldás. a)

$$(\forall x \in \mathbf{Q})(\forall y \in \mathbf{Q})(\exists z \in \mathbf{Q})(x \neq y \Rightarrow x < z < y),$$

b)

$$\neg((\exists x \in \mathbf{R})(x^2 + 1 = 0)),$$

c)

$$(\forall x)(\forall y)((x^2 = 0 \wedge y^2 = 0) \Rightarrow x = y),$$

d)

$$(\exists x \in \mathbf{R})(\exists y \in \mathbf{R})(x^4 - 7x^2 + 12 = 0 \wedge y^4 - 7y^2 + 12 = 0 \wedge x \neq y),$$

e)

$$(\exists x \in \mathbf{R})(\exists y \in \mathbf{R})(\forall z \in \mathbf{R})((x^2 = 3 \wedge y^2 = 3 \wedge z^2 = 3) \Rightarrow (x = z \vee y = z)).$$

20. Tagadjuk a következő kijelentéseket:

- a) $(\forall x)(x = 0)$,
- b) $(\exists x)(x^2 < 0)$,
- c) $(\forall x)(x \cdot 0 = 0)$,
- d) $(\exists x)(x \in \mathbf{Z} \wedge x + 5 > 0)$,
- e) $(\forall x)(x \in \mathbf{N} \Rightarrow x \in \mathbf{Z})$.

Megoldás.

- | | |
|---|--|
| <p>a) $\neg(\forall x)(x = 0) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (\exists x)\neg(x = 0) \Leftrightarrow$
 $(\exists x)(x \neq 0);$</p> | <p>d) $\neg(\exists x)(x \in \mathbf{Z} \wedge x + 5 > 0) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (\forall x)\neg(x \in \mathbf{Z} \wedge x + 5 > 0) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (\forall x)(\neg(x \in \mathbf{Z}) \vee \neg(x + 5 > 0)) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (\forall x)(\neg(x \in \mathbf{Z}) \vee (x + 5 \leq 0)) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (\forall x)(x \notin \mathbf{Z} \vee x + 5 \leq 0);$</p> |
| <p>b) $\neg(\exists x)(x^2 < 0) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (\forall x)\neg(x^2 < 0) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (\forall x)(x^2 \geq 0)$</p> | <p>e) $\neg(\forall x)(x \in \mathbf{N} \Rightarrow x \in \mathbf{Z}) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (\exists x)\neg(x \in \mathbf{N} \Rightarrow x \in \mathbf{Z}) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (\exists x)(\neg(x \in \mathbf{N}) \vee x \in \mathbf{Z}) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (\exists x)(x \notin \mathbf{N} \vee x \in \mathbf{Z}) \Leftrightarrow$
 $(\exists x)(\neg(x \notin \mathbf{N}) \wedge \neg(x \in \mathbf{Z})) \Leftrightarrow$
 $(\exists x)(x \in \mathbf{N} \wedge x \notin \mathbf{Z}).$</p> |
| <p>c) $\neg(\forall x)(x \cdot 0 = 0) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (\exists x)\neg(x \cdot 0 = 0) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (\exists x)(x \cdot 0 \neq 0);$</p> | |

1.2. Halmazelméleti alapfogalmak

1.2.1. A halmaz fogalma

A *halmazt* a halmazelmélet alapfogalmának tekintjük és ezért nem definiáljuk, körülírva szokás azt mondani, hogy a halmaz *különböző dolgok összessége*.

Valamely halmazt akkor tekintünk adottnak, ha bármely pontosan meghatározott dologról egyértelműen el tudjuk dönteni, hogy hozzátartozik-e a szóban forgó halmazhoz, illetve eleme-e a halmaznak. A halmazokat nagybetűvel, elemeit pedig kisbetűvel jelöljük. Azt a tényt, hogy x az A halmaz eleme, $x \in A$ módon jelöljük. Ha valamely y elem nem tartozik az A halmazba, akkor azt $y \notin A$ módon jelöljük. Egy halmazban egy elem csak egyszer fordulhat elő, a felsorolás sorrendje pedig tetszőleges.

Egy halmazt kétféle módon adhatunk meg: vagy felsoroljuk a halmaz elemeit, vagy a halmaz elemeinek pontos körülírását adjuk.

1.18. Példa. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ és $B = \{x \in \mathbf{N} | x \leq 5\}$ az ötnél nem nagyobb természetes számok halmazát jelöli.

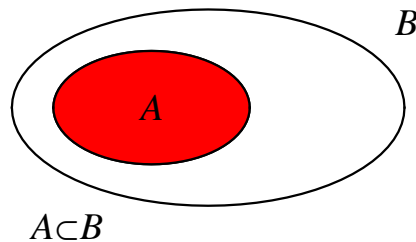
1.19. Példa. A $C = \{x \in \mathbf{R} | 0 \leq x < 6\}$ halmaz a 0 és 6 közé eső valós számok halmazát jelöli. A 0 hozzátartozik a C halmazhoz, a 6 viszont nem.

A halmazok jól szemléltethetők *Venn-diagrammal*, azaz zárt görbével határolt síkidommal, amelyben a halmazhoz tartozó elemek a síkidom belsejében levő pontok.

1.15. Definíció. Ha az A halmaz minden eleme a B halmaznak is eleme, akkor az A halmazt az B halmaz *részalmazának* nevezzük, és ezt a kapcsolatot így jelöljük: $A \subseteq B$ vagy $B \supseteq A$ (olv: A *részalmaz* B -nek).

Minden halmaz *részalmaz* önmagának, vagyis $A \subseteq A$.

1.16. Definíció. Ha az A halmaz minden eleme a B halmaznak is eleme, és a B halmaznak van olyan eleme, amely nem eleme A -nak, akkor az A halmazt az B halmaz *valódi részalmazának* nevezzük, és ezt a kapcsolatot így jelöljük: $A \subset B$ vagy $B \supset A$ (olv: A *valódi részalmaz* B -nek).



1.17. Definíció. A valós számok \mathbf{R} halmazának olyan *részalmazait*, melyek a és b két valós szám között vannak, *intervallumoknak* nevezzük. Nevezetesen:

$(a, b) = \{x \in \mathbf{R} | a < x < b\}$ *nyitott intervallum*,

$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} | a \leq x \leq b\}$ *zárt intervallum*,

$[a, b) = \{x \in \mathbf{R} | a < x \leq b\}$ *balról nyitott jobbról zárt intervallum*,

$(a, b] = \{x \in \mathbf{R} | a \leq x < b\}$ *balról zárt jobbról nyitott intervallum*.

1.20. Példa. A $C = \{x \in \mathbf{R} | 0 \leq x < 6\}$ halmaz felírható intervallumként is, mint $C = [0, 6)$.

1.18. Definíció. Két halmaz A és B akkor és csakis akkor egyenlő, ha ugyanazokat az elemeket tartalmazzák, vagyis

$$(A = B) \iff (x \in A \iff x \in B).$$

Ha két halmaz egyenlő, akkor $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$.

1.21. Példa. Az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ és $B = \{x \in \mathbf{N} | x \leq 5\}$ halmazok egyenlőek, azaz $A = B$.

1.19. Definíció. Üres halmazon az olyan \emptyset vagy $\{\}$ szimbólummal jelölt halmazt értjük, amelynek egy eleme sincs. Eszerint $\emptyset = \{x | x \neq x\}$.

1.22. Példa. Tekintsük az $A = \{x \in \mathbf{R} | x^2 + 3 = 0\}$ halmazt. Mivel \mathbf{R} a valós számok halmazát jelöli, és $x^2 + 3 = 0$ semmilyen valós számra nem teljesül, így az A halmaznak nincs eleme, azaz A üres halmaz.

Ha valamilyen halmazokról beszélünk, akkor általában ismertnek vesszünk egy *alaphalmaz*t, amelyből a szemlélt halmazok elemeit vesszük. Például, ha a páros természetes számok halmazát tekintjük, vagy a prímszámok halmazát szemléljük, akkor ezek a természetes számok \mathbf{N} halmazának a részhalmazai. Hasonlóképpen bármilyen nyitott (a, b) vagy zárt $[a, b]$ intervallum a valós számtengelyen a valós számok \mathbf{R} halmazának a részhalmazai. Ezt az alaphalmazt gyakran nem is említjük, de alapértelmezés szerint ismertnek vesszük. Ezt az alaphalmazt *univerzális* halmaznak nevezzük és U -val jelöljük.

1.20. Definíció. A halmaz elemeinek számát a halmaz kardinális számának nevezzük. Az A halmaz kardinális száma jelölhető $|A|$, $\#A$ vagy $\text{Card}(A)$ módon.

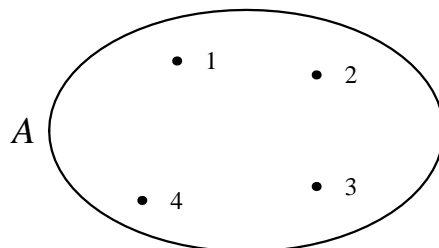
A halmazok elemeik száma szerint két csoportba oszthatók, véges és végtelen elemszámúakra.

Egy halmazt véges halmaznak nevezzük, ha van olyan természetes szám, amelynél e halmaznak nincs több eleme.

Végtelen halmaznak tekintjük a nem véges halmazokat.

1.23. Példa. Az $A = \{x \in \mathbf{R} | x^2 + 5x + 6 = 0\}$ halmaz véges, mert csupán két eleme van: -2 és -3 . Az \mathbf{N} halmaz végtelen, mert végtelen sok eleme van.

1.24. Példa. Az $A = \{1, 2, 3, 4\}$ halmaz Venn-diagrammal való ábrázolása:

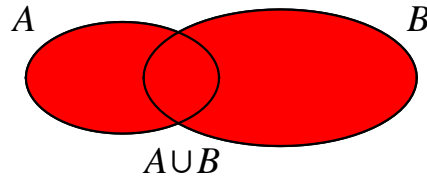


1.2.2. Műveletek halmazokkal

A halmazokkal a következőkben értelmezett műveleteket tudjuk elvégezni.

1.21. Definíció. Az A és B halmazok unióján (egyesítésén) azt a halmazt értjük, amelynek elemei az A vagy B halmazok legalább egyikének elemei, tehát

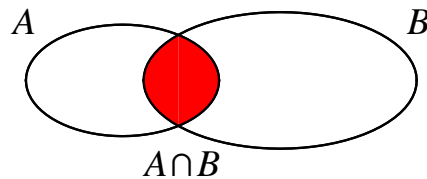
$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}.$$



1.25. Példa. Ha $A = \{2, 4, 6, 8\}$ és $B = \{n \in \mathbf{N} | n \leq 5\}$, akkor $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$.

A definícióból nyilvánvaló, hogy $A \subseteq (A \cup B)$ és $B \subseteq (A \cup B)$.

1.22. Definíció. Az A és B halmazok metszetén (közös részén) azt a halmazt értjük, amelynek elemei A -nak is és B -nek is elemei, tehát $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$.

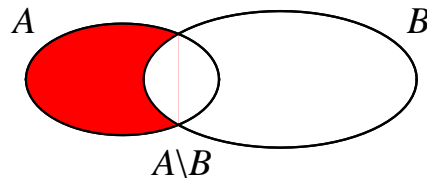


1.26. Példa. Ha $A = \{2, 4, 6, 8\}$ és $B = \{n \in \mathbf{N} | n \leq 5\}$, akkor $A \cap B = \{2, 4\}$.

A definícióból nyilvánvaló, hogy $(A \cap B) \subseteq A$ és $(A \cap B) \subseteq B$.

1.23. Definíció. Ha az A és a B halmazoknak nincs közös eleme, azaz $A \cap B = \emptyset$, akkor azt mondjuk, hogy A és B diszjunkt halmazok.

1.24. Definíció. Az A és B halmazok különbségén azt a halmazt értjük, amely azokat és csakis azokat az elemeket tartalmazza, amelyek A -nak elemei, de B -nek nem elemei, tehát $A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$.

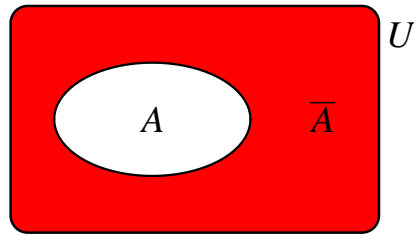


A definícióból azonnal látható, hogy ha A és B diszjunktak, azaz $A \cap B = \emptyset$, akkor $A \setminus B = A$ és $B \setminus A = B$.

1.27. Példa. Ha $A = \{x \in \mathbf{R} | -2 \leq x \leq 1\} = [-2, 1]$ és $B = \{x \in \mathbf{R} | |x| < 1\} = (-1, 1)$ adott halmazok (intervallumok), akkor

$$A \setminus B = [-2, -1] \cup \{1\} \quad \text{és} \quad B \setminus A = \emptyset.$$

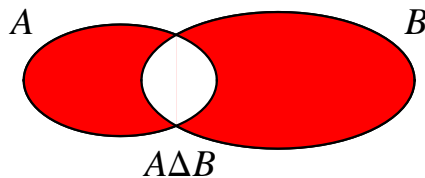
1.25. Definíció. Legyen A az U univerzális halmaz részhalmaza. Ekkor A -nak az U -ra vonatkozó komplementerén értjük az $U \setminus A$ halmazt, amelyet \bar{A} vagy A' módon jelölünk.



Könnyen belátható, hogy $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.

1.26. Definíció. Legyen A a B halmaz részhalmaza. Ekkor A -nak a B -re vonatkozó komplementerén értjük a $B \setminus A$ halmazt, amelyet \bar{A}_B módon jelölünk.

1.27. Definíció. Az A és B halmazok szimmetrikus különbségén azt az $A \Delta B$ módon jelölt halmazt értjük, amelynek elemei vagy csak az A halmaz vagy csak a B halmaz elemei, vagyis $A \Delta B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$.



1.28. Példa. Ha $A = \{2, 4, 6\}$ és $B = \{n \in \mathbb{N} | n \leq 5\}$, akkor $A \Delta B = \{1, 3, 5, 6\}$.

Könnyen belátható, hogy $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

1.11. Tétel. Az A , B és C tetszőleges halmazokra igazak a következő állítások:

1. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$ (idempotencia);
2. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (kommutativitás);
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ (asszociativitás);
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(az unió és a metszet kölcsönös disztributivitása);
5. $A \Delta B = B \Delta A$ (kommutativitás), $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$ (asszociativitás);
6. $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \setminus \emptyset = A$, $\emptyset \setminus A = \emptyset$, $A \Delta A = \emptyset$;
7. $\bar{\bar{A}} = A$ (invólúció), $A \cap \bar{A} = \emptyset$, $A \cup \bar{A} = U$;
8. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ (De Morgan-féle azonosságok).

Bizonyítás. A tételben kimondott halmazazonosságokat bizonyíthatjuk grafikus módszerrel (egy univerzális halmazban árnyekoljuk az azonosság bal oldalát, egy másikban a jobb oldalát, majd összehasonlítjuk a diagrammokat) vagy a halmazok egyenlőségének definíciója alapján, felhasználva az ismert tautológiákat.

1. $x \in A \cup A \iff x \in A \vee x \in A \iff x \in A$,
 $x \in A \cap A \iff x \in A \wedge x \in A \iff x \in A$,
 ahol az $x \in A = p$ jelölés mellett felhasználtuk a tetszőleges p kijelentésre vonatkozó $p \vee p \iff p$ és $p \wedge p \iff p$ tautológiákat.
2. $x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B \iff x \in B \vee x \in A \iff x \in B \cup A$,
 $x \in A \cap B \iff x \in A \wedge x \in B \iff x \in B \wedge x \in A \iff x \in B \cap A$,
 ahol az $x \in A = p$, $x \in B = q$ jelölés mellett felhasználtuk a tetszőleges p, q kijelentésekre vonatkozó $p \vee q \iff q \vee p$ és $p \wedge q \iff q \wedge p$ tautológiákat.
3. $x \in A \cup (B \cup C) \iff x \in A \vee x \in B \cup C \iff x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \iff$
 $\iff (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \iff x \in A \cup B \vee x \in C \iff x \in (A \cup B) \cup C$,
 $x \in A \cap (B \cap C) \iff x \in A \wedge x \in B \cap C \iff x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) \iff$
 $\iff (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C \iff x \in A \cap B \wedge x \in C \iff x \in (A \cap B) \cap C$,
 ahol az $x \in A = p$, $x \in B = q$, $x \in C = r$ jelölés mellett felhasználtuk a tetszőleges p, q, r kijelentésekre vonatkozó következő tautológiákat:
 $p \vee (q \vee r) \iff (p \vee q) \vee r$ és $p \wedge (q \wedge r) \iff (p \wedge q) \wedge r$.
4. $x \in A \cap (B \cup C) \iff x \in A \wedge x \in B \cup C \iff x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \iff$
 $\iff (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \iff x \in A \cap B \vee x \in A \cap C \iff$
 $\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
 $x \in A \cup (B \cap C) \iff x \in A \vee x \in B \cap C \iff x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \iff$
 $\iff (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \iff x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C \iff$
 $\iff x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
 ahol az $x \in A = p$, $x \in B = q$, $x \in C = r$ jelölés mellett felhasználtuk a tetszőleges p, q, r kijelentésekre vonatkozó következő tautológiákat:
 $p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ és $p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.
5. $x \in A \triangle B \iff x \in A \underline{\vee} x \in B \iff x \in B \underline{\vee} x \in A \iff x \in B \triangle A$,
 $x \in A \triangle (B \triangle C) \iff x \in A \underline{\vee} x \in B \triangle C \iff x \in A \underline{\vee} (x \in B \underline{\vee} x \in C) \iff$
 $\iff (x \in A \underline{\vee} x \in B) \underline{\vee} x \in C \iff (x \in A \triangle x \in B) \underline{\vee} x \in C \iff x \in (A \triangle B) \triangle C$,
 ahol az $x \in A = p$, $x \in B = q$, $x \in C = r$ jelölés mellett felhasználtuk a tetszőleges p, q, r kijelentésekre vonatkozó következő tautológiákat:
 $p \underline{\vee} q \iff q \underline{\vee} p$ és $p \underline{\vee} (q \underline{\vee} r) \iff (p \underline{\vee} q) \underline{\vee} r$.
6. $x \in A \cup \emptyset \iff x \in A \vee x \in \emptyset \iff x \in A \vee \perp \iff x \in A$,
 $x \in A \cap \emptyset \iff x \in A \wedge x \in \emptyset \iff x \in A \wedge \perp \iff \perp \iff x \in \emptyset$,
 $x \in A \setminus \emptyset \iff x \in A \wedge x \notin \emptyset \iff x \in A \wedge \top \iff x \in A$,
 $x \in \emptyset \setminus A \iff x \in \emptyset \wedge x \notin A \iff \perp \wedge x \notin A \iff \perp \iff x \in \emptyset$,
 $x \in A \triangle A \iff x \in A \underline{\vee} x \in A \iff \perp \iff x \in \emptyset$,

ahol az $x \in A = p$ jelölés mellett felhasználtuk a tetszőleges p kijelentésre vonatkozó $p \vee \perp \iff p$, $p \wedge \perp \iff \perp$, $p \vee p \iff \perp$ tautológiákat.

$$7. x \in \overline{\overline{A}} \iff \neg(x \in \overline{A}) \iff \neg(\neg(x \in A)) \iff x \in A,$$

$$x \in A \cap \overline{A} \iff x \in A \wedge x \in \overline{A} \iff x \in A \wedge \neg(x \in A) \iff \perp \iff x \in \emptyset,$$

$$x \in A \cup \overline{A} \iff x \in A \vee x \in \overline{A} \iff x \in A \vee \neg(x \in A) \iff \top \iff x \in U,$$

ahol az $x \in A = p$ jelölés mellett felhasználtuk a tetszőleges p kijelentésre vonatkozó $\neg(\neg p) \iff p$, $p \wedge \neg p \iff \perp$ és $p \vee \neg p \iff \top$ tautológiákat.

$$8. x \in \overline{A \cap B} \iff \neg(x \in A \cap B) \iff \neg(x \in A \wedge x \in B) \iff$$

$$\iff \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B) \iff x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B} \iff x \in \overline{A} \cup \overline{B},$$

$$x \in \overline{A \cup B} \iff \neg(x \in A \cup B) \iff \neg(x \in A \vee x \in B) \iff$$

$$\iff \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B) \iff x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B} \iff x \in \overline{A} \cap \overline{B},$$

ahol az $x \in A = p$, $x \in B = q$ jelölés mellett felhasználtuk a tetszőleges p, q kijelentésekre vonatkozó $\neg(p \wedge q) \iff \neg p \vee \neg q$ és $\neg(p \vee q) \iff \neg p \wedge \neg q$ tautológiákat.

◇

1.28. Definíció. Az A halmaz összes részhalmazának halmazát az A halmaz hatványhalmazának vagy partitív halmazának nevezzük. Ennek jelölésére a $P(A)$ szimbólumot használjuk, tehát $P(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$.

Ha A elemeinek száma n , akkor $P(A)$ elemeinek száma 2^n .

1.29. Példa. Ha $A = \{a, b, c\}$, akkor

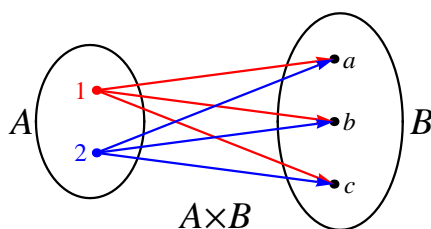
$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

1.29. Definíció. Az x és y elemekből alkotott rendezett pár $(x; y)$, ahol x a rendezett pár első komponense, y pedig a második komponense. Rendezett párok egyenlősége a megfelelő komponensek egyenlőségét jelenti: $(x; y) = (u; v) \iff (x = u \wedge y = v)$.

1.30. Definíció. Az A és B halmazok Descartes-féle szorzatán az $(x; y)$ rendezett párokból alkotott és az $A \times B$ szimbólummal jelölt halmazt értjük, ahol $x \in A$ és $y \in B$, azaz $A \times B = \{(x; y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$.

Ha $A = B$, akkor az $A \times A = A^2$ jelölés használatos. Ha A vagy B üres halmaz, akkor $A \times B = \emptyset$.

1.30. Példa. Ha $A = \{1, 2\}$ és $B = \{a, b, c\}$, akkor $A^2 = \{(1; 1), (1; 2), (2; 1), (2; 2)\}$,
 $A \times B = \{(1; a), (1; b), (1; c), (2; a), (2; b), (2; c)\}$,
 $A \times A \times B = \{(1; 1; a), (1; 1; b), (1; 1; c), (1; 2; a), (1; 2; b), (1; 2; c), (2; 1; a), (2; 1; b), (2; 1; c), (2; 2; a), (2; 2; b), (2; 2; c)\}$.



FELADATOK

1. Adott az $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ halmaz. Határozzuk meg az A , B , $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \triangle B$ és $P(A)$ halmazokat, ha $A = \left\{x \mid x \in S \wedge \frac{x}{3} - \frac{x}{4} \in S\right\}$ és $B = \left\{y \mid y \in S \wedge \frac{y}{2} - 1 \in S\right\}$.

Megoldás. Először az A és B halmazokat kell meghatározni. Némi számolás után megkapjuk, hogy $A = \{0, 12\}$ és $B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$. Ekkor
 $A \cup B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $A \cap B = \{0, 12\}$, $A \setminus B = \emptyset$, $B \setminus A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$,
 $A \triangle B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ és $P(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{12\}, \{0, 12\}\}$.

2. Adottak az $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d\}$ és $C = \{a, c, e\}$ halmazok. Mutassuk meg, hogy $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

Megoldás. A bizonyítandó azonosság bal oldala a következő halmazt eredményezi:
 $A \setminus (B \setminus C) = \{a, b, c, d\} \setminus \{d\} = \{a, b, c\}$. A jobb oldal esetében ugyanakkor megkapjuk, hogy $(A \setminus B) \cup (A \cap C) = \{a, b\} \cup \{a, c\} = \{a, b, c\}$, vagyis a halmaz-egyenlőség igaz.

3. Leírással adott az $A = \{x \mid x \text{ osztója } 9\text{-nek}\}$, a $B = \{x \mid x \text{ osztója } 12\text{-nek}\}$, valamint a $C = \{x \mid x \text{ osztója } 18\text{-nak}\}$ halmaz. Mutassuk meg, hogy ebben az esetben igaz, hogy $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

Megoldás. Ha felírjuk elemeikkel az A , B és C halmazokat, akkor $A = \{1, 3, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ és $C = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$. Ekkor
 $(A \cup B) \setminus C = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12\} \setminus \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} = \{4, 12\}$ és
 $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = \emptyset \cup \{4, 12\} = \{4, 12\}$, tehát valóban igaz a halmazegyenlőség.

4. Határozzuk meg az A , B és C halmazok elemeit, ha tudjuk, hogy $A \setminus B = \{1, 3, 5\}$, $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \emptyset$, $C \setminus B = \{2, 4\}$ és $(A \cap B) \setminus C = \{6\}$.

Megoldás. Következtessünk az összefüggésekből és ábrázoljuk Venn-diagrammal:
 Az $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ állításból következik, hogy az A , B , C halmazokban az 1, 2, 3, 4, 5, 6 elemeken kívül más elemek nem találhatók.

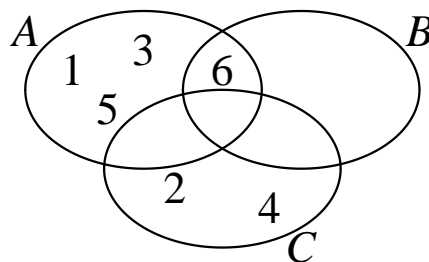
Az $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \emptyset$ állításból arra következtethetünk, hogy sem az $A \cap C$, sem a $B \cap C$ halmazoknak nincs eleme, valamint $A \cap B \cap C$ is üres halmaz.

Az $A \setminus B = \{1, 3, 5\}$ állítás azt jelenti, hogy az A halmazban vannak az 1, 3, 5 elemek és ezek nincsenek benne a B -ben, de tudjuk, hogy nem lehetnek C -ben sem.

A $C \setminus B = \{2, 4\}$ állítás szerint a C halmazban vannak a 2, 4 elemek és ezek nincsenek benne a B -ben, de tudjuk, hogy nem lehetnek A -ban sem.

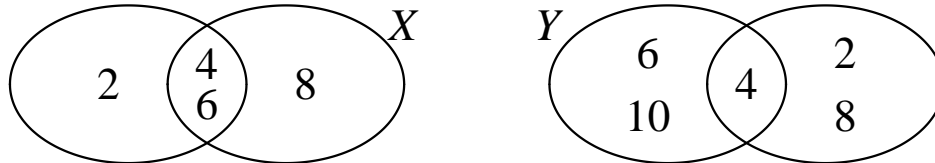
Az $(A \cap B) \setminus C = \{6\}$ állításból következik, hogy $A \cap B$ nem üres részébn van a 6.

Az elmondottak alapján $A = \{1, 3, 5, 6\}$, $B = \{6\}$ és $C = \{2, 4\}$.



5. Adottak az $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ halmaz. Határozzuk meg az X és Y halmazokat, ha tudjuk, hogy $X \subset A$, $\{2, 4, 6\} \cap X = \{4, 6\}$ és $X \setminus \{2, 4, 6\} = \{8\}$, valamint $Y \subset A$, $Y \setminus \{4, 8\} = \{6, 10\}$ és $Y \cap \{2, 4, 8\} = \{4\}$, majd írjuk fel az $X \setminus Y$, $X \triangle Y$ és $X \times Y$ halmazokat.

Megoldás. Következtessünk ismét az adott összefüggésekből és ábrázoljuk Venn-diagrammal: a $\{2, 4, 6\} \cap X = \{4, 6\}$ összefüggés alapján 4 és 6 benne van az X halmazban, de 2 nincs benne, az $X \setminus \{2, 4, 6\} = \{8\}$ állítás alapján pedig a 4, 6, 8 elemeken kívül más elem nem lehet, így $X = \{4, 6, 8\}$.

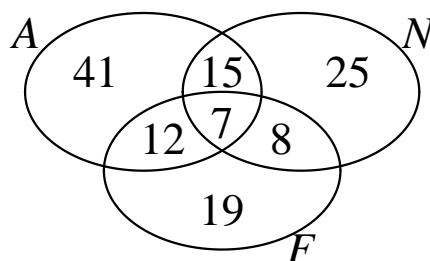


Az $Y \setminus \{4, 8\} = \{6, 10\}$ összefüggés alapján a 6 és 10 elemek benne vannak az Y halmazban, az $Y \cap \{2, 4, 8\} = \{4\}$ állítás alapján pedig a 4 benne van Y -ban, de nincs benne 2 és 8, így $Y = \{4, 6, 10\}$. Ekkor $X \setminus Y = \{8\}$, $X \triangle Y = \{8, 10\}$ és $X \times Y = \{(4; 4), (4; 6), (4; 10), (6; 4), (6; 6), (6; 10), (8; 4), (8; 6), (8; 10)\}$.

6. Egy nyelviskolában angol, német és francia nyelveket lehet tanulni, és az iskolának összesen 127 tanulója van. Közülük 75-en tanulnak angolul, 55-en németül és 46-an franciául. Angolul és németül 22-en, angolul és franciául 19-en, németül és franciául 15-en tanulnak, míg mindhárom nyelvet 7 diák tanulja.
- Hányan tanulnak pontosan két nyelvet?
 - Hányan tanulnak németül vagy franciául, de angolul nem?
 - Hányan tanulnak csak angolul?

Megoldás. Legyen A az angolul tanuló, N a németül tanuló, F pedig a franciául tanuló diákok halmaza. Ekkor érvényesek a következő relációk: $|A \cup N \cup F| = 127$, $|A| = 75$, $|N| = 55$, $|F| = 46$, $|A \cap N| = 22$, $|A \cap F| = 19$, $|N \cap F| = 15$, $|A \cap N \cap F| = 7$. Legyen $x = |A \cap N| - |A \cap N \cap F| = 22 - 7 = 15$, valamint $y = |A \cap F| - |A \cap N \cap F| = 19 - 7 = 12$ és $z = |N \cap F| - |A \cap N \cap F| = 15 - 7 = 8$.

- Ennek alapján $x + y + z = 15 + 12 + 8 = 35$ diák tanul pontosan két nyelvet.
- Mivel $n = |N| - (x + z + |A \cap N \cap F|) = 55 - (15 + 8 + 7) = 25$ diák tanul csak németül és $f = |F| - (y + z + |A \cap N \cap F|) = 46 - (12 + 8 + 7) = 19$ diák tanul csak franciául, ezért $b = n + f + z = 25 + 19 + 8 = 52$ diák tanul vagy németül vagy franciául.
- $a = |A| - (x + y + |A \cap N \cap F|) = 75 - (15 + 12 + 7) = 41$ diák csak angolul tanul.



7. Adott az $S = \{1, 2, 3, \dots, 500\}$ alaphalmaz, valamint a következő módon adott halmazok: $A = \{x | x \in S \text{ és } x = 2k, k \in \mathbb{N}\}$ és $B = \{x | x \in S \text{ és } x = 7k, k \in \mathbb{N}\}$.

- Hány 2-vel osztható szám van az S halmazban?
- Hány 7-tel osztható szám van az S halmazban?
- Hány szám osztható az S halmazban 2-vel vagy 7-tel?
- Hány olyan szám van az S alaphalmazban, amely nem osztható sem 2-vel, sem 7-tel?

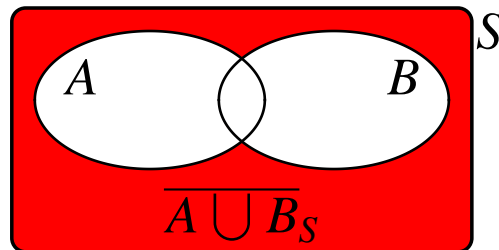
Fejezzük ki a kérdéseket és a rájuk adott válaszokat az A és B halmazok segítségével.

Megoldás. Ha tudjuk, hogy $[x]$ az x valós szám egész részét jelöli, akkor

$$|A| = \left\lfloor \frac{500}{2} \right\rfloor = 250, \quad |B| = \left\lfloor \frac{500}{7} \right\rfloor = 71, \quad |A \cap B| = \left\lfloor \frac{500}{14} \right\rfloor = 35,$$

ahol $A \cap B$ halmazban azok a számok találhatók, melyek 2-vel is és 7-tel is, vagyis 14-gyel oszthatók. Mivel $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 250 + 71 - 35 = 286$, így $|(\overline{A \cup B})_S| = 500 - 286 = 214$.

- 250 2-vel osztható szám van az S alaphalmazban.
- 71 7-tel osztható szám van az S halmazban.
- Mivel a 2-vel vagy 7-tel osztható számok az $A \cup B$ halmazban vannak, így az S alaphalmazban ezekből 286 van.
- A sem 2-vel sem 7-tel nem osztható számok az $(\overline{A \cup B})_S$ halmazban vannak, ezért ezek száma 214.



8. Sün Balázs és testvérei erdei sétára indultak bogyó-, falevél-, kavics-, illetve termés-gyűjteményeiket gazdagítani. Mindegyiküknek van legalább egy gyűjteménye. Azok, akik bogyókat vagy terméseket gyűjtenek, azok faleveleket is gyűjtenek. Azok akik kavicsokat gyűjtenek, azok terméseket is gyűjtenek. Azok, akik faleveleket és kavicsokat gyűjtenek, azok bogyókat is gyűjtenek. Melyik fajt gyűjteményből van a legtöbb és melyikből a legkevesebb Sün Balázsnál?

Megoldás. Legyen B a bogyókat gyűjtők, F a faleveleket gyűjtők, K a kavicsokat gyűjtők, T pedig a terméseket gyűjtők halmaza. Ekkor érvényesek az alábbi relációk: $B \cup T \subset F$, $K \subset T$ és $F \cap K \subset B$.

A $B \cup T \subset F$ és $K \subset T$ relációból következik, hogy $K \subset F$. Figyelembe véve a $F \cap K \subset B$ összefüggést is, megkapjuk, hogy $K \cap F = K \subset B$. Ebből $B \cup K \cup T \subset F$ adódik, miszerint legtöbben faleveleket gyűjtenek. Mivel $K \subset B \cap F \cap T$, ebből azt kapjuk, hogy a legkevesebben kavicsokat gyűjtenek.

9. Ha A és B nemüres halmazok, akkor bizonyítsuk be, hogy

$$(A \setminus B) \cap B = \emptyset \quad \text{és} \quad (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = \overline{B}.$$

Megoldás. Az első esetben a halmazok egyenlőségének definícióját alkalmazzuk:

$$\begin{aligned} x \in (A \setminus B) \cap B &\iff x \in A \setminus B \wedge x \in B \\ &\iff (x \in A \wedge \neg(x \in B)) \wedge x \in B \\ &\iff x \in A \wedge (\neg(x \in B) \wedge x \in B) \\ &\iff x \in A \wedge \perp \\ &\iff \perp \\ &\iff x \in \emptyset, \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk a konjunkció asszociativitását, valamint az $x \in A = p$, $x \in B = q$ jelölés mellett a tetszőleges p , q kijelentésekre vonatkozó következő tautológiákat: $\neg q \wedge q \iff \perp$ és $p \wedge \perp \iff \perp$.

A második esetben halmazegyenlőségek felhasználásával igazoljuk az egyenlőséget:

$$(A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = (A \cap \overline{A}) \cup \overline{B} = \emptyset \cup \overline{B} = \overline{B}.$$

10. Ha A , B és C nemüres halmazok, akkor bizonyítsuk be, hogy érvényes a következő halmazegyenlőség:

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C).$$

Megoldás. Alkalmazzuk a halmazok egyenlőségének definícióját:

$$\begin{aligned} (x, y) \in (A \cup B) \times C &\iff x \in A \cup B \wedge y \in C \\ &\iff (x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C \\ &\iff (x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C) \\ &\iff (x, y) \in A \times C \vee (x, y) \in B \times C \\ &\iff (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C), \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk a konjunkció asszociativitását, valamint az $x \in A = p$, $x \in B = q$ jelölés mellett a tetszőleges p , q kijelentésekre vonatkozó következő tautológiákat: $\neg q \wedge q \iff \perp$ és $p \wedge \perp \iff \perp$.

1.3. Relációk, leképezések (függvények)

1.3.1. Binér relációk és tulajdonságai

A hétköznapi életben gyakran előfordul, hogy valamilyen kapcsolatot, viszonyt vizsgálunk két vagy több dolog között. Például vizsgálhatunk iskolákat aszerint, hogy melyik milyen fokú képzést nyújt, vagy aszerint is, hogy melyiknek van több diákja, vagy melyik van messzebb lakóhelyüinktől. De nem csak azonos jellegű dolgok között kereshetünk kapcsolatot (például két iskola között), hanem különböző dolgok között is. Például vizsgálhatunk egy iskolát és a körülötte lévő településeket abból a szempontból, hogy az iskola diákjai honnan származnak.

A hétköznapi élet mellett a tudományokban is fontos szerepet játszanak a különböző kapcsolatok. Az alábbiakban ennek a matematikai megalapozására kerül sor.

1.31. Definíció. Legyen A és B két nem üres halmaz. Az A és B halmazok elemei közötti ρ (binér) relációnak nevezzük az $A \times B$ halmaz bármely részhalmazát, azaz $\rho \subseteq A \times B$.

A reláció szó helyett szokás még használni a *megfeleltetés* elnevezést.

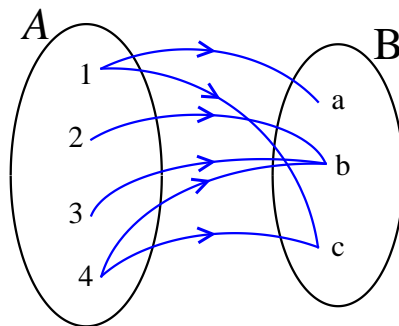
1.31. Példa. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4\}$ és $B = \{a, b, c\}$. Ekkor a

$$\rho = \{(1; a), (1; c), (2; b), (3; b), (4; b), (4; c)\}$$

egy A és B halmaz közötti reláció. Az $(1; a) \in \rho$ viszonyt úgy olvassuk, hogy az 1 elem ρ relációban van az a elemmel. Ezt még így is írhatjuk: $1\rho a$ vagy ritkábban $\rho(1; a)$. Az 1 elem nincs relációban a b -vel, amit röviden így írunk: $(1; b) \notin \rho$ vagy $1\not\rho b$.

A relációkat nem csak rendezett párokkal lehet szemléltetni, hanem táblázattal és Venn-diagrammal is.

	a	b	c
1	+		+
2		+	
3		+	
4		+	+



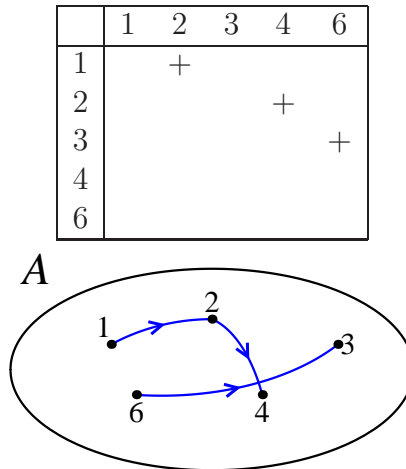
A relációt alkotó rendezett párok első komponenseinek halmaza a reláció *értelmezési tartománya*, a második komponensek halmaza pedig a reláció *értékkészlete*.

A binér (kétváltozós) relációhoz hasonlóan lehet definiálni a kettőnél több, n -változós relációkat is, csak akkor a definícióban az $A \times B$ helyett $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ kell hogy álljon. Ekkor a relációt nem rendezett párok, hanem rendezett n -esek alkotják.

1.32. Példa. Legyen az A egy osztály tanulóinak, a B járműveknek, a C távolságoknak a halmaza. Ekkor $\rho \subseteq A \times B \times C$ és $(a; b; c) \in \rho \Leftrightarrow$ az a tanuló előző nap b járművel c kilométert tett meg.

Későbbi tanulmányaink során leggyakrabban olyan kétváltozós relációkkal fogunk találkozni, amelyeknél az A és a B halmaz ugyanaz.

1.33. Példa. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ és a ρ relációt definiáljuk a következőképp: $\rho = \{\forall(x; y) \in A \times A | 2x = y\}$. A definíció szerint $\rho = \{(1; 2), (2; 4), (3; 6)\}$. Ugyanez táblázatban és Venn-diagramon:



A $\rho \subseteq A^2$ reláción értelmezzük a következő tulajdonságokat:

- 1.32. Definíció.**
1. A ρ relációt *reflexívnek* nevezzük, ha $(\forall x \in A)(x\rho x)$.
 2. A ρ relációt *szimmetrikusnak* nevezzük, ha $(\forall x \in A)(\forall y \in A)(x\rho y \Rightarrow y\rho x)$.
 3. A ρ relációt *antiszimmetrikusnak* nevezzük, ha $(\forall x \in A)(\forall y \in A)((x\rho y \wedge y\rho x) \Rightarrow x = y)$.
 4. A ρ relációt *transzitivnak* nevezzük, ha $(\forall x \in A)(\forall y \in A)(\forall z \in A)((x\rho y \wedge y\rho z) \Rightarrow x\rho z)$.

1.34. Példa. Állapítsuk meg, hogy az 1.33. Példa ρ relációja a fenti tulajdonságok közül melyekkel rendelkezik.

1. Nem reflexív, mivel például az $1 \in A$ és $1 \not\rho 1$.
2. Nem szimmetrikus, mert $1 \in A$, $2 \in A$, $1\rho 2$ de $2 \not\rho 1$.
3. Antiszimmetrikus, mert az antiszimmetria implikációjának első tagja sosem teljesül, és így az implikáció mindig igazat ad.
4. Nem transzitiv, mert $1\rho 2$ és $2\rho 4$ teljesül, ugyanakkor $1\rho 4$ nem teljesül.

A relációk különböző szemléltetési módjai alkalmasak arra, hogy az egyes tulajdonságokról szemléletes fogalmunk alakuljon ki.

A reflexivitás a Venn-diagramon maga után vonja, hogy minden elem körül „hurok” legyen, ez jelenti azt, hogy relációban van önmagával. A táblázatban ezt a táblázat főátlójában elhelyezett „+”-ok mutatják.

Ha a Venn-diagramon létezik olyan elempár, amelynél az egyikből megy nyíl a másikba, de visszafelé nem, akkor az nem szimmetrikus. Ha ilyen elempár nem létezik, akkor a reláció szimmetrikus. A táblázaton a szimmetrikus tulajdonság igazi szimetriaként jelenik meg, ugyanis ha egy táblázat tengelyesen szimmetrikus a főátlóra, akkor és csak akkor a reláció szimmetrikus.

Ha egy reláció nem szimmetrikus, az még nem jelenti azt, hogy antiszimmetrikus. Az antiszimmetria jele a Venn-diagramon, hogy nem létezik olyan elempár, amelynél az egyikből megy nyíl a másikba és vissza. A táblázatból is megállapítható ez a tulajdonság, ugyanis antiszimmetria esetén nincs két olyan „+” jel a táblázatban, amely szimmetrikus lenne a főátlóra.

A tranzitivitás már nehezebben vehető észre. Ezt a definíció közvetlen alkalmazásával érdemes vizsgálni.

Az általunk felsorolt reláció-tulajdonságok között nincs különösebb kapcsolat, amelyet a következő példa jól szemléltet.

1.35. Példa. Legyen $\rho \subseteq \{1, 2, 3\}^2$. Állapítsuk meg a következő relációk tulajdonságait:

1. $\rho_1 = \{(1; 1), (1; 2), (1; 3), (2; 1), (2; 2), (2; 3), (3; 1), (3; 2), (3; 3)\}$

2. $\rho_2 = \{\}$

3. $\rho_3 = \{(1; 1), (1; 2), (1; 3), (2; 1), (2; 2), (3; 1), (3; 3)\}$

4. $\rho_4 = \{(1; 2), (1; 3), (2; 1), (3; 1)\}$

5. $\rho_5 = \{(1; 2), (2; 3), (3; 1)\}$

6. $\rho_6 = \{(1; 1), (1; 2), (2; 1), (2; 2), (2; 3), (3; 3)\}$

7. $\rho_7 = \{(1; 2), (2; 1), (2; 3), (3; 2)\}$

8. $\rho_8 = \{(1; 1), (1; 2), (2; 1), (2; 2), (2; 3), (3; 3)\}$

9. $\rho_9 = \{(1; 1), (1; 2), (2; 2), (2; 3), (3; 3)\}$

10. $\rho_{10} = \{(1; 2), (1; 3), (2; 1), (2; 3), (3; 1), (3; 2)\}$

11. $\rho_{11} = \{(1; 2)\}$

12. $\rho_{12} = \{(1; 1), (2; 2), (3; 3)\}$

13. $\rho_{13} = \{(1; 1), (2; 2), (2; 3), (3; 3)\}$

14. $\rho_{14} = \{(1; 1), (1; 2), (1; 3), (2; 2), (2; 3), (3; 3)\}$

A felsorolt relációk tulajdonságai táblázatba foglalva:

reláció	reflexív	szimmetrikus	antiszimmetrikus	tranzitív
1	+	+		+
2		+	+	+
3	+	+		
4		+		
5			+	
6	+			
7		+		
8	+			+
9	+		+	
10		+		+
11			+	+
12	+	+	+	+
13	+		+	+
14	+		+	+

Gyakorlásképp nézzük meg a ρ_9 és a ρ_{10} tulajdonságainak a kivizsgálását.

A $\rho_9 = \{(1; 1), (1; 2), (2; 2), (2; 3), (3; 3)\}$ reláció:

a) reflexív, mert $(\forall x \in A)(x\rho x)$;

b) nem szimmetrikus, mert $1\rho 2$ de $2\not\rho 1$;

c) antiszimmetrikus, mert $x\rho y \wedge y\rho x$ bármely x -re, y -ra hamisat ad, így az implikáció igaz;

d) nem tranzitív, mert $1\rho 2$, $2\rho 3$, de $1\not\rho 3$.

A $\rho_{10} = \{(1; 2), (1; 3), (2; 1), (2; 3), (3; 1), (3; 2)\}$ reláció:

a) nem reflexív, mert $1 \in A$ és $1\not\rho 1$;

b) szimmetrikus, mert $(\forall x \in A)(\forall y \in A)(x\rho y \Rightarrow y\rho x)$;

c) nem antiszimmetrikus, mert $1 \in A$, $2 \in A$, $1\rho 2$, $2\rho 1$, de $2 \neq 1$;

d) tranzitív, mert $(\forall x \in A)(\forall y \in A)(\forall z \in A)((x\rho y \wedge y\rho z) \Rightarrow x\rho z)$.

A fentiekben láttuk, hogy ha egy tulajdonsággal nem rendelkezik egy reláció, akkor ezt egy a definíciónak ellentmondó konkrét példával bizonyítjuk.

Tekintsünk egy A nem üres halmazt, és daraboljuk fel ezt a halmazt részekre úgy, hogy közben ügyeljünk arra, hogy minden részbe jusson legalább egy elem. Ezt a felbontást *osztályozásnak* (idegen szóval: *partíciónak*) nevezzük.

1.33. Definíció. Az A nem üres halmaz osztályozásának nevezzük a C_1, C_2, \dots, C_n halmazok képzését a következő feltételek szerint:

1. $C_i \neq \{\}$, ahol $i = 1, 2, \dots, n$;
2. $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n = A$;
3. $C_i \cap C_j = \{\}$, ahol $i, j = 1, 2, \dots, n$ és $i \neq j$.

A C_1, C_2, \dots, C_n halmazokat ekvivalenciaosztályoknak nevezzük.

Vegyük az A halmaz egy konkrét osztályozását, és definiáljunk az A halmazon egy ρ relációt úgy hogy az A halmaz bármely x eleme akkor legyen relációban egy tetszőleges y elemével, ha ugyanazon osztálynak az elemei. A definiált reláció:

a) reflexív (triviális);

b) szimmetrikus, ugyanis ha x azonos osztályba esik y -nal, akkor y is x -szel.

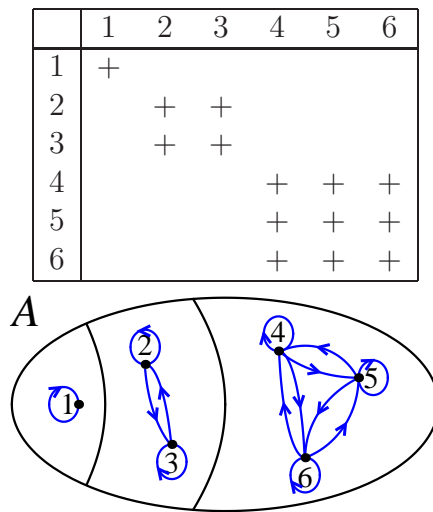
c) tranzitív, mert ha x azonos osztályba esik y -nal, és y z -vel, akkor x is z -vel.

1.34. Definíció. Azt a relációt, amely reflexív, szimmetrikus és tranzitív, ekvivalencia-relációnak nevezzük.

1.12. Tétel. Egy tetszőleges nem üres halmaz bármely osztályozása meghatároz egy ekvivalenciarelációt.

1.36. Példa. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Képezzük a következő osztályokat: $C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{2, 3\}$, $C_3 = \{4, 5, 6\}$. Ekkor ez az osztályozás a következő ekvivalenciarelációt határozza meg:

$$\rho = \{(1; 1), (2; 2), (2; 3), (3; 2), (3; 3), (4; 4), (4; 5), (4; 6), (5; 4), (5; 5), (5; 6), (6; 4), (6; 5), (6; 6)\}.$$



Láttuk, hogy egy osztályozás meghatároz egy ekvivalenciarelációt. Nézzük meg, hogy vajon így van-e ez fordítva is.

1.13. Tétel. A $\rho \subseteq A^2$ reláció meghatározza az A halmaz egy osztályozását.

Bizonyítás. Jelölje $C(a)$ A -nak azt az osztályát, amelybe az a elem tartozik, és ez a $C(a)$ halmaz pedig álljon azokból az elemekből, amelyek a -val relációban vannak, szimbólumokkal:

$$C(a) = \{x | x \in A \wedge a\rho x\}.$$

Megmutatjuk, hogy így valóban osztályokat definiáltunk, vagyis az így kapott halmazokra teljesül az 1.33. Definíció mindhárom feltétele.

- 1) Nyilvánvaló, hogy $C(a)$ nem üres halmaz, mert $a \in C(a)$.
- 2) Az is nyilvánvaló, hogy az A halmaz minden eleme benne van egy ilyen halmazban, hiszen $(\forall x \in A)(x \in C(x))$, tehát ezeknek az osztályoknak az egyesítése a teljes A halmazt kell hogy adja.
- 3) Megmutatjuk, hogy a definiált $C(a), C(b), \dots$ halmazok páronként vagy egyenlők, vagy diszjunktak. Tegyük fel, hogy $C(a) \cap C(b) \neq \{\}$. Ekkor létezik egy $c \in A$ elem, amely mindkét osztálynak eleme: $c \in C(a)$ és $c \in C(b)$. Az osztályokat definiáló reláció szerint $a\rho c$ és $c\rho b$, ahonnan a tranzitivitás miatt következik, hogy $a\rho b$. Legyen d a $C(a)$ halmaz egy tetszőleges eleme. Mivel $d \in C(a)$, ezért $d\rho a$, és korábról tudjuk, hogy $a\rho b$, ezért a tranzitivitásból következően $d\rho b$, ami azt jelenti, hogy $d \in C(b)$. Ezzel megmutattuk, hogy $C(a)$ tetszőleges eleme benne van a $C(b)$ halmazban, vagyis $C(a) \subseteq C(b)$. Hasonlóan

megmutatható, hogy ez a tartalmazás fordítva is fennáll, tehát ha a $C(a)$ és a $C(b)$ halmaznak van közös eleme, akkor $C(a) = C(b)$, amit bizonyítani is kellett. \diamond

Az utóbbi két tétel szerint egy A halmazon megadni egy ekvivalenciarelációt ugyanazt jelenti, mintha az A halmazt osztályokra bontanánk.

Az ekvivalenciaosztály a matematika egyik legfontosabb fogalma. Elég csak arra gondolni, hogy a pozitív racionális számok mint mennyiségek is tekinthetők ekvivalenciaosztályoknak, hiszen hogy ha vesszük a természetes számok alkotta törtek halmazát, és azt osztályokra bontjuk úgy, hogy azonos osztályba az egymással egyenlő törtek kerüljenek (az egyenlőség is ekvivalenciareláció!), akkor például az $\frac{1}{2}$, a $\frac{2}{4}$, a $\frac{3}{6}$, ... törtek egy osztályba kerülnek. Ekkor az a mennyiség, amelyet ezek a törtek leírnak, magával az ekvivalenciaosztállyal definiálható. Ilyenkor azt mondjuk, hogy például a $\frac{4}{8}$ tört az egyik *reprezentánsa* az ekvivalenciaosztálynak, vagyis annak a mennyiségnek, amit jelöl.

Az előző fejtegetés előrevetítette a faktorhalmaz fogalmát:

1.35. Definíció. Legyen az A egy nem üres halmaz, amelyen értelmezünk egy ρ ekvivalenciarelációt, amely meghatároz egy C_ρ osztályozást. A keletkezett ekvivalenciaosztályok halmazát az A ρ által meghatározott faktorhalmazának nevezzük. Jele: A/C_ρ vagy csak A/ρ .

A következőkben néhány példát adunk ekvivalenciarelációra.

1.37. Példa. Legyen A az emberek halmaza, és a testvérvizonyt definiáljuk úgy, hogy egyik ember pontosan akkor testvére a másiknak, ha az anyjuk és az apjuk is azonos. Ezzel egy ekvivalenciarelációt adtunk meg, és az embereknek egy olyan osztályozását, ahol a testvérek tartoznak egy ekvivalenciaosztályba. A reláció definiálására egyszerűen a „testvére” szót használni hiba lett volna, mert azt nem mondjuk, hogy valaki testvére saját magának, és emiatt a definiált reláció nem lenne reflexív.

1.38. Példa. Legyen az A halmaz a zentai Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium tanulójának a halmaz. Az egyik tanuló akkor van relációban a másikkal, ha ugyanaz az osztályfőnökük. Triviális, hogy ez a reláció ekvivalenciareláció. Az ekvivalenciaosztályok éppen az iskola osztályai, az osztályok halmaza pedig a faktorhalmaz. Vegyük észre, hogy ha a definíció fenti formája helyett az „osztálytársa” fogalmát használnám, akkor veszélybe kerülne a reláció reflexivitása, mert a köznyelvben nem mondjuk azt, hogy például Béla a saját maga osztálytársa.

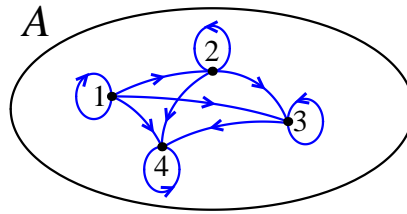
1.39. Példa. Legyen az A halmaz a sík egyeneseinek a halmaza. Egy egyenes legyen relációban egy másik egyenessel pontosan akkor, ha létezik egy harmadik egyenes, amelyre mindkettő merőleges. Itt az ekvivalenciaosztályt a párhuzamos egyenesseregek alkotják, ezeknek a halmaza pedig a faktorhalmaz.

1.40. Példa. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4\}$, és vegyük a következő relációt:

$$\rho = \{(x, y) \in A^2 \mid x \leq y\}.$$

	1	2	3	4
1	+	+	+	+
2		+	+	+
3			+	+
4				+

$$\rho = \{(1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 2), (2; 3), (2; 4), (3; 3), (3; 4), (4; 4)\}.$$



Megállapítható, hogy a ρ reláció reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív.

1.36. Definíció. Azt a relációt, amely reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív, rendezési relációnak nevezzük.

A rendezési relációt általában a \preceq jellel fogjuk jelölni, így az $a \preceq b$ azt jelenti, hogy $(a, b) \in \rho$, ahol ρ egy rendezési reláció.

Egy halmaznak általában fontos tulajdonsága az, hogy definiálható-e rajta a rendezési reláció.

1.37. Definíció. Egy A halmazt részben rendezettnek nevezünk, ha értelmezhető rajta egy \preceq rendezési reláció. Jele: $(A; \preceq)$.

Ha egy részben rendezett $(A; \preceq)$ halmaz valamely a és b elemére $a \preceq b$ vagy $b \preceq a$ fennáll, akkor az a és b elemeket összehasonlíthatóknak nevezzük.

1.38. Definíció. Ha egy $(A; \preceq)$ részben rendezett halmaz bármely két eleme összehasonlítható, akkor az $(A; \preceq)$ halmazt (teljesen) rendezett halmaznak nevezzük.

A részben vagy teljesen rendezett halmazoknak szép példái a következők:

1.41. Példa. A számhalmazok közül a természetes számok halmaza, az egész számok halmaza, a racionális számok halmaza és a valós számok halmaza rendezett halmaz. Rendezési reláció mindegyik esetében a „kisebb vagy egyenlő” („nem nagyobb”). A komplex számok halmazán nem lehet rendezést definiálni.

1.42. Példa. Legyen az A halmaz a magyar nyelv szavai. Itt az

$$a \preceq b \Leftrightarrow a \text{ előbb van az ábécében, mint } b$$

reláció rendezési reláció, és mivel bármelyik két szó összehasonlítható, ezért az $(A; \preceq)$ halmaz rendezett.

1.43. Példa. A természetes számok halmazán értelmezett „osztója” viszony rendezési reláció, és az $(\mathbb{N}; |)$ egy részben rendezett halmaz. Ezt nem nehéz belátni: reflexív, mert minden szám osztója önmagának, antiszimmetrikus, mert $a|b \wedge b|a \Rightarrow a = b$, tranzitív, mert $a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$. Továbbá nem minden eleme összehasonlítható (például $3|5$ és $5|3$ egyaránt hamis), így valóban csak részben rendezésről beszélhetünk.

1.3.2. Binér műveletek és tulajdonságaik

Eddigi tanulmányaink során már találkoztunk különböző műveletekkel. Ilyen például az összeadás a természetes számok halmazán, a szorzás a racionális számok halmazán, a hatványozás a valós számok halmazán, a metszetképzés egy hatványhalmazon, a logikai „és” a logikai értékek halmazán, a skaláris szorzás egy adott sík vektorainak halmazán, és így tovább. A rengeteg művelet jobb megértése, könnyebb összehasonlítása végett definiálni fogunk bizonyos műveleti tulajdonságokat, amelyekkel a különböző műveletek jellemezhetők lesznek.

Azt a halmazt, amelyen egy művelet értelmezve van, *tartóhalmaznak* szokás nevezni. Ne feledjük, egy művelet csak a tartóhalmazával együtt tanulmányozható.

1.39. Definíció. *Egy nem üres A halmaz $A \times A$ Descartes-féle szorzatának a leképezését az A halmazba az A halmazon értelmezett kétváltozós (binér) műveletnek nevezzük.*

Ezt szimbólumokkal így írhatjuk: $f : A \times A \rightarrow A$, $(a; b) \mapsto f(a, b)$. Az $f(a, b)$ helyett gyakrabban használatos az $a + b$, $a \cdot b$, $a \times b$, $a \circ b$, $a \wedge b$, ... jelölés.

A bevezetőben említett példákon kívül megemlíjtük még a következőket:

1.44. Példa. A szorzás a racionális számok halmazán művelet.

1.45. Példa. A kivonás a természetes számok halmazán nem művelet, mert például az $f(3, 5) \mapsto 3 - 5$ leképezésben a $3 - 5$ nem eleme a természetes számok halmazának.

1.46. Példa. A kivonás az egész számok halmazán művelet.

1.47. Példa. Értelmezzük a valós számok halmazán az $f(a, b) = x$ megfeleltetést, ahol $a^2 + b^2 = x^2$. Ez az f megfeleltetés nem is leképezés, mert nem egyértelmű: $f(3, 4) = 5$ és $f(3, 4) = -5$, ezért az f nem is művelet.

1.48. Példa. Az összeadás a páratlan egész számok halmazán nem művelet, mert például $1 + 1 = 2$, és a 2 nem páratlan szám.

1.49. Példa. A szorzás a páratlan egész számok halmazán művelet.

1.50. Példa. Legyen az A egy sík pontjainak a halmaza, és $(P; Q) \in A \times A$ esetén $f(P, Q) = R$, ahol R a PQ szakasz felezőpontja. f az A halmazon értelmezett művelet.

1.51. Példa. A legnagyobb közös osztó képzése a páratlan természetes számok halmazán művelet.

A kétváltozós művelethez hasonlóan definiálhatjuk az n -változós műveletet is.

1.40. Definíció. *Egy nem üres A halmaz A^n Descartes-féle szorzatának a leképezését az A halmazba az A halmazon értelmezett n -változós műveletnek nevezzük. ($n \in \mathbf{N}$)*

Ha $n = 1$, akkor egyváltozós műveletet kapunk. Ezekből vonultatunk itt fel néhányat:

1.52. Példa. Az abszolút érték képzése a racionális számok halmazán egyváltozós művelet. A négyzetgyökvonás a valós számok halmazán nem művelet, mert negatív számok négyzetgyöke nem lehet valós szám. Az ellentett szám képzése az egész számok halmazán művelet. A köbre emelés a természetes számok halmazán művelet.

Véges halmazon értelmezett műveleteket (főleg kis elemszám esetén) leggyakrabban *Cayley-féle műveleti táblázattal* adunk meg. Például az $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ halmazon értelmezett $f : (a, b) \mapsto x$, ahol x az a és a b legnagyobb közös osztója.

	2	4	6	8	10	12
2	2	2	2	2	2	2
4	2	4	2	4	2	4
6	2	2	6	2	2	6
8	2	4	2	8	2	4
10	2	2	2	2	10	2
12	2	4	6	4	2	12

1.41. Definíció. *Algebrai struktúrának nevezzük azt a legalább kéttagú $(S; f, g, \dots)$ rendszert, amelynek első eleme egy S nem üres halmaz, a többi pedig az S -en értelmezett n -változós ($n \in \mathbf{N}$) algebrai művelet.*

1.53. Példa. $(\mathbf{R}; +, \cdot)$ egy algebrai struktúra.

Mint azt már a bevezetőben említettük, a műveleteket a tulajdonságaik segítségével jellemezzük, hasonlítjuk össze. Ebben a részben csak a legalapvetőbb tulajdonságokkal ismerkedünk meg. Egy struktúrában létezhetnek olyan elemek, amelyeket a struktúra (valamelyik) művelete tesz kitüntetetté. Ezek közül csak az egységelemmel fogunk foglalkozni.

1.42. Definíció. *Legyen az $(S; \cdot, \circ)$ egy struktúra. $A \cdot$ művelet*

1. *kommutatív, ha $(\forall a \in S)(\forall b \in S)(a \cdot b = b \cdot a)$;*

2. *asszociatív, ha $(\forall a \in S)(\forall b \in S)(\forall c \in S)((a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c))$;*

3. *idempotens, ha $(\forall a \in S)(a \cdot a = a)$;*

4. *disztributív $a \circ$ műveletre nézve, ha*

$$(\forall a \in S)(\forall b \in S)(\forall c \in S)(a \cdot (b \circ c) = (a \cdot b) \circ (a \cdot c) \wedge (b \circ c) \cdot a = (b \cdot a) \circ (c \cdot a)),$$

azaz balról és jobbról is disztributív;

5. *abszorbtív $a \circ$ műveletre nézve, ha $(\forall x \in S)(\forall y \in S)(x \cdot (x \circ y) = x)$;*

6. *invertálható, ha*

$$(\exists x \in S)(\exists y \in S)(\forall a \in S)(\forall b \in S)(x \cdot a = b \wedge a \cdot y = b),$$

azaz balról is és jobbról is invertálható;

7. *semleges elemes, ha $(\exists e \in S)(\forall a \in S)(e \cdot a = a \cdot e = a)$.*

Az semleges elemet szokás még neutrális elemnek is nevezni. Összeadás, illetve additív művelet esetén nevezhetjük zéruselemnek is, szorzás, illetve multiplikatív művelet esetén pedig egységelemnek. Belátható, hogy egy struktúrában legfeljebb egy semleges elem lehet.

A struktúrákat a műveletek/műveleteik tulajdonságai szerint különböző nevekkal illetjük, és ezzel a témakörrel az absztrakt algebra foglalkozik.

FELADATOK

1. Milyen tulajdonságúak a következő relációk:

- a) Legyen E a valaha élt emberek halmaza, és $\rho \subseteq E \times E$ legyen a következő:
 $a\rho b \Leftrightarrow b$ anyja a -nak;
- b) Legyen O az 1-m osztály tanulóinak a halmaza, és $\rho \subseteq O \times O$ legyen a következő:
 $a\rho b \Leftrightarrow b$ többször utazott vonaton, mint a ;
- c) Legyen O az 1-m osztály tanulóinak a halmaza, és $\rho \subseteq O \times O$ legyen a következő:
 $a\rho b \Leftrightarrow b$ legalább annyiszor utazott vonaton, mint a ;
- d) Legyen S a tér egyenesének a halmaza, és $\rho \subseteq S \times S$ legyen a következő:
 $a\rho b \Leftrightarrow a \perp b$;
- e) Legyen K egy adott sík köreinek a halmaza, és $\rho \subseteq K \times K$ legyen a következő:
 $a\rho b \Leftrightarrow a$ közös középpontú (koncentrikus) b -vel;
- f) Legyen $\rho \subseteq \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, és $a\rho b \Leftrightarrow a|b$;
- g) Legyen $\rho \subseteq \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, és $a\rho b \Leftrightarrow |a| = |b|$;
- h) Legyen H egy nem üres halmaz, és értelmezzük a ρ -t a H hatványhalmazán:
 $A\rho B \Leftrightarrow A \subseteq B$;
- i) Legyen ρ értelmezve a természetes számok alkotta rendezett párok halmazán:
 $(a, b)\rho(c, d) \Leftrightarrow ad = bc$.

Megoldás. a) Nem reflexív, mert van, aki nem anyja saját magának (sőt, senki sem). Nem szimmetrikus, mert ha b anyja a -nak, nem következik, hogy a is anyja b -nek. Antiszimmetrikus, mert $a\rho b \wedge b\rho a$ sosem teljesül, így az antiszimmetriát definiáló implikáció első tagja mindig hamis, tehát az implikáció igaz. Nem tranzitív, mert b anyja a -nak és c anyja b -nek nem vonja maga után, hogy c anyja a -nak.

b) Nem reflexív, mert senki sem utazott többször, mint saját maga. Nem szimmetrikus, mert ha b többször utazott vonaton, mint a , nem vonja maga után (sőt kizárja), hogy a is többször utazott, mint b . Antiszimmetrikus, mert az implikáció első tagja mindig hamis, akár csak az a) részben. Tranzitív, mert ha b többször utazott, mint a , és c többször utazott, mint b , akkor c többször utazott, mint a .

c) Ennek átgondolása gyakorlatilag teljesen megegyezik a b) részben leírtakkal, egyedül a reflexivitásnál van különbség, mert mindenkire igaz, hogy legalább annyiszor utazott vonaton, mint saját maga. Emiatt ez a reláció az osztály tanulóinak egy rendezését adja, amely szerint bármelyik két tanuló összehasonlítható.

d) Nem reflexív, mert egyik egyenes sem merőleges saját magára. Szimmetrikus, mert ha $a \perp b$, akkor $b \perp a$. Nem antiszimmetrikus, mert $a \perp b \wedge b \perp a$ nem vonja maga után, hogy $a = b$ (sőt, kizárja azt). Nem tranzitív, mert $a \perp b$ és $b \perp c$ viszonyból nem következik $a \perp c$.

e) Reflexív, mert minden körnek saját magával megegyező középpontja van. Hasonlóan könnyen átgondolható a szimmetria, és a tranzitivitás is. Ezek szerint a „koncentrikus” viszony a síkbeli körök egy osztályozását adja, és ez a reláció ekvivalenciareláció. Az antiszimmetria nyilván nem teljesül, mert különböző körök is lehetnek koncentrikusak.

f) Reflexív, mert minden szám osztója saját magának. Nem szimmetrikus, mert például $2 \mid 8$, de $8 \nmid 2$. Antiszimmetrikus, mert teljesül a definíció. Tranzitív, mert általánosan igaz, hogy $a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c$. Ezek alapján az „oszthatóság” egy rendezési reláció, és az $(\mathbf{N}; \mid)$ halmaz részben rendezett, hiszen sem $4 \mid 3$, sem $3 \mid 4$ nem teljesül.

g) Reflexív, mert $|a| = |a|$. Szimmetrikus, mert $|a| = |b| \Rightarrow |b| = |a|$. Hasonlóan egyszerűen belátható, hogy tranzitív is. Ebből következően ez ekvivalenciareláció. Az egymással ellentett számok alkotják az ekvivalencia-osztályokat.

h) Könnyen belátható, hogy a halmazoknál a tartalmazás relációja reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív, így ez egy rendezési reláció, de a hatványhalmaznak csak részben rendezése, ugyanis bármely két részhalmazra nem igaz, hogy egyik részhalmaza a másiknak.

i) A reflexivitás teljesül, mert $(a, b)\rho(a, b)$, mivel definíció szerint $ab = ba$, és a természetes számok halmazán a szorzás felcserélhető.

Nézzük, teljesül-e a szimmetria definíciója, azaz hogy

$$(a; b)\rho(c; d) \Rightarrow (c; d)\rho(a; b).$$

Az implikáció bal oldalából kiindulva megmutatjuk, hogy következik a jobb oldal:

$$(a; b)\rho(c; d) \Leftrightarrow ad = bc \Leftrightarrow da = cb \Leftrightarrow cb = da \Leftrightarrow (c; d)\rho(a; b).$$

Nem antiszimmetrikus, mert két különböző tört is kölcsönös kapcsolatban lehet egymással. A tranzitivitáshoz meg kell mutatni, hogy

$$(a; b)\rho(c; d) \wedge (c; d)\rho(e; f)$$

maga után vonja, hogy $(a; b)\rho(e; f)$. A könnyebbség kedvéért most mindkét oldalt egyszerre kezdjük alakítani.

$$\begin{array}{ll} (a; b)\rho(c; d) \wedge (c; d)\rho(e; f) & (a; b)\rho(e; f) \\ ad = bc \wedge cf = de & af = be \\ ad = bc \wedge bcf = bde & \\ adf = bde & \\ af = be & \end{array}$$

Ezek alapján a reláció ekvivalenciareláció.

2. Melyek azok a relációk, amelyek egyszerre szimmetrikusak és antiszimmetrikusak is?

Megoldás. Legyen $a \neq b$. Ha apb , akkor két eset lehetséges. a) bpa . Ebben az esetben a reláció nem lehet antiszimmetrikus. b) $b\bar{p}a$, de ekkor ρ nem lehet szimmetrikus. Ezek szerint csak azok a relációk lehetnek szimmetrikusak és antiszimmetrikusak egyszerre, amelyeknél két különböző elem nincs relációban egymással. Megmutatjuk, hogy ez elégséges is.

Ha két különböző elem nincs relációban egymással, akkor egyedül apa típusú relációk jöhetnek számításba. Erre pedig egyidőben teljesül a szimmetria és az antiszimmetria definíciója is.

3. Az A halmazon értelmezett ρ reláció a következő rendezett párokkal van megadva: $\rho = \{(a; a), (a; c), (b; d), (c; d)\}$. Melyik az a minimális bővítése a ρ relációnak, amelyre ρ
- a) ekvivalenciareláció; b) rendezési reláció lesz?

Megoldás. a) Reflexivitás miatt mindenképpen ki kell bővíteni ρ -t a következőkkel: (b,b) , (c,c) , (d,d) . Tudjuk, hogy az ekvivalenciareláció egyben osztályozást is jelent. Látható, hogy ezek az elemek csakis egy osztályba kerülhetnek, azonos osztálybeli elemek között pedig az összes lehetséges kapcsolat fennáll, úgyhogy a keresett „legszűkebb” reláció az $A \times A$.

b) A reflexivitást az a) részben leírt módon elérhetjük. Az antiszimmetrikus tulajdonság már megvan, tehát ennek megőrzésével kell a tranzitív tulajdonságot „beállítani”. $a\rho c$ és $c\rho d$ miatt hozzá kell venni ρ -hoz $(a;d)$ -t. Ezzel elértük a tranzitivitást, tehát a keresett bővített reláció:

$$\rho^* = \{(a;a), (a;c), (b;d), (c;d), (b;b), (c;c), (d;d), (a;d)\}.$$

4. Legyen $H = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, és értelmezzük a H halmazon a ρ relációt a következő módon: $a\rho b \Leftrightarrow a = -b$.

a) Írjuk fel a relációt rendezett párokkal;

b) Állapítsuk meg a reláció tulajdonságait!

Megoldás. a) $\rho = \{(-3;3), (-2;2), (-1;1), (0;0), (1;-1), (2;-2), (3;-3)\}$;

b) Nem reflexív, mert például $2\rho 2$, mivel $2 \neq -2$. Szimmetrikus, hiszen $a = -b$ esetén az egyenlet -1 -gyel való szorzásával kapjuk, hogy $b = -a$.

Nem antiszimmetrikus, mert szimmetrikus.

Nem tranzitív, mert $1\rho -1 \wedge -1\rho 1$, de $1\rho 1$.

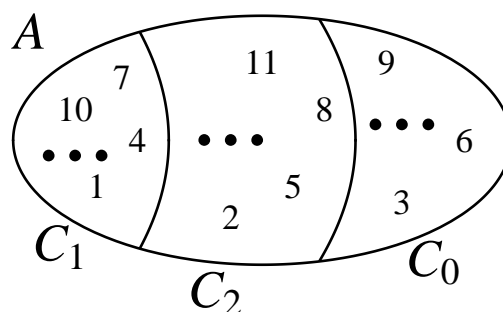
5. Értelmezzük az \mathbf{N} halmazon a következő relációt:

$a\rho b \Leftrightarrow a$ és b 3-mal osztva ugyanazt a maradékot adja.

Mit állapíthatunk meg erről a relációról?

Megoldás. Reflexív, mert a és a 3-mal osztva ugyanazt a maradékot adja. Szimmetrikus, mert ha a és b 3-mal osztva ugyanazt adja maradékkul, akkor igaz ez b -re és a -ra is. Nem antiszimmetrikus, mert szimmetrikus. Tranzitív, mert ha a és b , valamint b és c ugyanazt a maradékot adja hárommal osztva, akkor ez a -ra és c -re is igaz. Ezek alapján a ρ ekvivalenciareláció, amely osztályokra bontja az \mathbf{N} halmazt. Ezek az osztályok a következők:

$$C_0 = \{3, 6, 9, 12, \dots\}; C_1 = \{1, 4, 7, 10, \dots\}; C_2 = \{2, 5, 8, 11, \dots\}.$$



Ezeket az osztályokat a három *maradékosztály*ainak nevezzük.

6. Legyen A egy nem üres halmaz. Bizonyítsuk be, hogy ha $\rho_1 \subseteq A^2, \rho_2 \subseteq A^2$, valamint ρ_1 és ρ_2 ekvivalenciarelációk, akkor a $\rho_1 \cap \rho_2$ is ekvivalenciareláció!

Megoldás. Be kell látni, hogy a két relációról az ekvivalenciareláció tulajdonságai öröklődnek a metszetükre is.

I. Mivel ρ_1 és ρ_2 is reflexív, így az A halmaz minden a elemére igaz, hogy $(a; a) \in \rho_1$ és $(a; a) \in \rho_2$, tehát $(a; a) \in (\rho_1 \cap \rho_2)$, így $\rho_1 \cap \rho_2$ reflexív.

II. Tegyük fel, hogy a $\rho_1 \cap \rho_2$ nem szimmetrikus, azaz létezik az A halmazban két olyan elem, amelyekre

$$(a, b) \in (\rho_1 \cap \rho_2) \wedge (b, a) \notin (\rho_1 \cap \rho_2).$$

Ebből az következik, hogy $(a; b) \in \rho_1$ és $(a; b) \in \rho_2$, de a $(b; a)$ a két reláció közül legalább az egyikben nincs benne, mert különben benne lenne a metszetükben. Ekkor az a reláció, amely nem tartalmazza (b, a) -t nem lehet szimmetrikus, mert tartalmazza $(a; b)$ -t. Ez ellentmondás, hiszen ρ_1 és ρ_2 is szimmetrikus volt. Feltételezésünk, mely szerint a $\rho_1 \cap \rho_2$ nem szimmetrikus, ellentmondáshoz vezetett, tehát a $\rho_1 \cap \rho_2$ reláció szimmetrikus.

III. Tegyük fel, hogy a $\rho_1 \cap \rho_2$ nem tranzitív. Ez azt jelenti, hogy léteznek az A halmazban olyan (nem feltétlenül különböző) a, b, c elemek, amelyekre nem teljesül a tranzitivitás definíciója, azaz

$$(a; b) \in (\rho_1 \cap \rho_2) \wedge (b; c) \in (\rho_1 \cap \rho_2) \wedge (a; c) \notin (\rho_1 \cap \rho_2).$$

A konjunkció első két tagjából az következik, hogy az $(a; b)$ és a $(b; c)$ rendezett párok elemei mindkét relációnak. Mivel a ρ_1 és a ρ_2 külön-külön tranzitív, így az $(a; c)$ a ρ_1 -ben is és a ρ_2 -ben is benne kell hogy legyen. Emiatt a metszetükben is benne kell hogy legyen, ezért annak feltételezése, hogy $\rho_1 \cap \rho_2$ nem tranzitív, ellentmondáshoz vezetett.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a $\rho_1 \cap \rho_2$ ekvivalenciareláció.

7. Műveletet határoznak-e meg a következő definíciók:

- a) Az \mathbf{N} halmazon értelmezett \circ művelet: $a \circ b = a + b - 3$;
- b) Az \mathbf{N} halmazon értelmezett $*$ művelet: $a * b = a + b - LKO(a, b)$;
- c) Az \mathbf{N} halmazon értelmezett Δ művelet: $\frac{a^2 - b^2}{a - b}$;
- d) A \mathbf{Z} halmazon értelmezett \bullet művelet: $a \bullet b = \max(a, b)$;
- e) A \mathbf{Q} halmazon értelmezett ∇ művelet: $a \nabla b = \frac{a + b}{2}$.

Megoldás. a) nem, mert például $1 \circ 1 = 1 + 1 - 3 = -1$ nem eleme az \mathbf{N} -nek.

b) a definiált művelet eredménye mindig egész szám, de kérdés, hogy természetes szám-e. Figyelembe véve azt az ismert tényt, hogy $LKO(a, b) \leq a$ és $LKO(a, b) \leq b$ következik, hogy

$$a \circ b = a + b - LKO(ab) \geq LKO(a, b + LKO(a, b) - LKO(a, b)) = LKO(a, b) \geq 1.$$

Tehát $a \circ b \geq 1$, így ez művelet.

c) nem, mert $a = b$ esetén értelmetlen a leképezés.

d) igen, mert két egész szám maximuma is egész.

e) igen, mert két racionális szám felének az összege is racionális.

8. Végezzük el a műveleteket a műveleti táblázat alapján:

*	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

a) $(a * (b * b)) * c$; b) a^5 .

Megoldás. a) $(a * (b * b)) * c = (a * a) * c = b * c = b$;

b) habár a hatványozást külön nem definiáltuk, értelemszerűen:

$$a^5 = (((a * a) * a) * a) * a = ((b * a) * a) * a = (c * a) * a = a * a = b.$$

9. Vajon I. kommutatív-e, II. asszociatív-e, III. idempotens-e, IV. invertálható-e és V. semleges elemes-e a következő néhány művelet:

a) a \mathbf{Z} halmazon értelmezett \circ művelet: $a \circ b = a + b - 3$;

b) az \mathbf{N} halmazon értelmezett $*$ művelet: $a * b = \max(a, b)$;

c) az \mathbf{N} halmazon értelmezett \triangle művelet: $a \triangle b = a^b$;

d) a $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ halmazon értelmezett ∇ művelet: $(a, b) \nabla (c, d) = (ad + bc, bd)$;

e) a $H = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ halmazon táblázattal megadott \diamond művelet:

\diamond	α	β	γ
α	α	α	α
β	α	β	β
γ	α	β	γ

Megoldás. a) I. Ellenőrizzük le, teljesül-e a kommutativitás definíciója:

$$(\forall a \in \mathbf{Z})(\forall b \in \mathbf{Z})(a \circ b = b \circ a)$$

$$(\forall a \in \mathbf{Z})(\forall b \in \mathbf{Z})(a + b - 3 = b + a - 3)$$

Ez nyilvánvalóan igaz, tehát a \circ művelet kommutatív;

II. Ellenőrizzük le, teljesül-e az asszociativitás definíciója:

$$(\forall a \in \mathbf{Z})(\forall b \in \mathbf{Z})(\forall c \in \mathbf{Z})((a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c))$$

$$(\forall a \in \mathbf{Z})(\forall b \in \mathbf{Z})(\forall c \in \mathbf{Z})((a + b - 3) \circ c = a \circ (b + c - 3))$$

$$(\forall a \in \mathbf{Z})(\forall b \in \mathbf{Z})(\forall c \in \mathbf{Z})((a + b - 3) + c - 3 = a + (b + c - 3) - 3)$$

$$(\forall a \in \mathbf{Z})(\forall b \in \mathbf{Z})(\forall c \in \mathbf{Z})(a + b + c - 6 = a + b + c - 6)$$

tehát asszociatív;

III. Ellenőrizzük le, teljesül-e az idempotencia definíciója:

$$(\forall a \in \mathbf{Z})(a \circ a = a)$$

$$(\forall a \in \mathbf{Z})(a + a - 3 = a)$$

$$(\forall a \in \mathbf{Z})(a = 3)$$

A $*$ művelet csak akkor lehetne idempotens, ha a $H = \{3\}$ halmazon értelmeznénk, \mathbf{Z} -n nem az.

IV. Ellenőrizzük le, teljesül-e az invertálhatóság definíciója:

$$(\forall a \in \mathbf{Z})(\forall b \in \mathbf{Z})(\exists x \in \mathbf{Z})(\exists y \in \mathbf{Z})(x \circ a = b \wedge a \circ y = b)$$

$$(\forall a \in \mathbf{Z})(\forall b \in \mathbf{Z})(\exists x \in \mathbf{Z})(\exists y \in \mathbf{Z})(x + a - 3 = b \wedge a + y - 3 = b)$$

$$(\forall a \in \mathbf{Z})(\forall b \in \mathbf{Z})(\exists x \in \mathbf{Z})(\exists y \in \mathbf{Z})(x = b - a + 3 \wedge y = b - a + 3)$$

és ilyen x és y valóban létezik a \mathbf{Z} halmazban. Megjegyezzük, hogy elég lett volna csak az egyik oldali invertálhatóságot vizsgálni a művelet kommutatív volta miatt;

V. Induljunk ki ismét a definícióból:

$$(\exists e \in \mathbf{Z})(\forall a \in \mathbf{Z})(e \circ a = a \circ e = a)$$

$$(\exists e \in \mathbf{Z})(\forall a \in \mathbf{Z})(e + a - 3 = a + e - 3 = a)$$

Látható, hogy $e = 3$, tehát a művelet semleges elemes.

b) I. Kommutatív, mert bármely két a és b szám esetén a számok sorrendjétől függetlenül ugyanaz a maximumuk;

II. Asszociatív, mert ha például $a \leq b \leq c$, akkor a maximumképzés sorrendjétől függetlenül c -t kapjuk eredményül;

III. Az idempotencia triviálisan teljesül;

IV. Nem invertálható, mert például nem létezik olyan $x \in \mathbf{Z}$, amelyre $\max(4, x) = 2$;

V. Induljunk ki a definícióból:

$$(\exists e \in \mathbf{Z})(\forall a \in \mathbf{Z})(e * a = a * e = a)$$

$$(\exists e \in \mathbf{Z})(\forall a \in \mathbf{Z})(\max(e, a) = \max(a, e) = a)$$

Az \mathbf{N} halmaz legkisebb eleme kielégíti az egyenlőséget, tehát semleges elemes, és $e = 1$.

c) I. Nem kommutatív, mert például $2^3 \neq 3^2$;

II. Az asszociativitás definícióját alkalmazva:

$$(\forall a \in \mathbf{N})(\forall b \in \mathbf{N})(\forall c \in \mathbf{N})((a \triangle b) \triangle c = a \triangle (b \triangle c))$$

$$(\forall a \in \mathbf{N})(\forall b \in \mathbf{N})(\forall c \in \mathbf{N})(a^b \triangle c = a \triangle b^c)$$

$$(\forall a \in \mathbf{N})(\forall b \in \mathbf{N})(\forall c \in \mathbf{N})((a^b)^c = a^{(b^c)})$$

Ez utóbbi állítás pedig nyilvánvalóan hamis például $a = 2$, $b = 1$ és $c = 2$ esetén, ugyanis az egyenlőség bal oldalán ekkor 4, a jobb oldalán 2 lesz;

III. Az idempotencia definíciója sem teljesül, mert például $2^2 \neq 2$;

IV. Nem invertálható, mert a $2^x = 3$ egyenletnek nincs megoldása a természetes számok halmazában;

V. Semleges elemet keresve azt találjuk, hogy jobb oldali semleges eleme van, mert

$$(\exists e \in \mathbf{N})(\forall a \in \mathbf{N})(a \triangle e = a)$$

$$(\exists e \in \mathbf{N})(\forall a \in \mathbf{N})(a^e = a)$$

ahonnan $e = 1$ következik, de az 1 nem lehet bal oldali egységelem is, mivel $1^a = a$ nem teljesül minden $a \in \mathbf{N}$ -re. Megjegyezzük, hogy ha a Δ műveletet a $H = \{1\}$ halmazon definiáltuk volna, akkor mind az öt tulajdonsággal rendelkezett volna.

d) I. Induljunk ki a kommutativitás definíciójából. Igaz-e $(\forall(a; b) \in \mathbf{Z}^2)(\forall(c; d) \in \mathbf{Z}^2)$ esetén, hogy

$$(a; b) \nabla (c; d) = (c; d) \nabla (a; b)$$

$$(ad + bc; bd) = (cb + da; db)$$

A két oldal nyilvánvalóan egyenlő, a művelet kommutatív;

II. Induljunk ki az asszociativitás definíciójából. Igaz-e $(\forall(a, b) \in \mathbf{Z}^2)(\forall(c; d) \in \mathbf{Z}^2)(\forall(e; f) \in \mathbf{Z}^2)$ esetén, hogy

$$((a; b) \nabla (c; d)) \nabla (e; f) = (a; b) \nabla ((c; d) \nabla (e; f))$$

$$(ad + bc; bd) \nabla (e; f) = (a; b) \nabla (cf + de; df)$$

$$((ad + bc)f + bde; bdf) = (adf + (cf + de)b; bdf)$$

$$(adf + bcf + bde; bdf) = (adf + bcf + bde; bdf).$$

A két oldal nyilvánvalóan egyenlő, a művelet asszociatív;

III. Mutassuk meg, hogy $(\forall(a; b) \in \mathbf{Z}^2)$ esetén teljesül az idempotencia definíciója:

$$(a; b) \nabla (a; b) = (a; b)$$

$$(ab + ba, b^2) = (a, b).$$

Láthatjuk, hogy a két oldal nem egyenlő, ezért a ∇ művelet nem idempotens;

IV. A művelet kommutativitása miatt elég csak az egyik oldali invertálhatósággal foglalkozni, azaz azt kell megmutatni, hogy $(\forall(a; b) \in \mathbf{Z}^2)(\forall(c; d) \in \mathbf{Z}^2)(\exists(x; y) \in \mathbf{Z}^2)$, amelyekre $(a; b) \nabla (x; y) = (c; d)$. Ebből kiindulva

$$(a, b) \nabla (x; y) = (c; d)$$

$$(ay + xb; by) = (c; d)$$

ahonnan az

$$ay + xb = c$$

$$by = d$$

egyenletrendszert kapjuk, amelynek megoldásai nem minden esetben egész számok (például $y = \frac{d}{b}$ miatt), így a ∇ művelet nem invertálható;

V. A kommutativitás miatt elég csak az egyik oldali semleges elemet megkeresni, azaz azt kell megmutatni, hogy $(\exists(e_1; e_2) \in \mathbf{Z}^2)(\forall(a; b) \in \mathbf{Z}^2)$ esetén $(e_1; e_2) \nabla (a; b) = (a; b)$. Ismét egy egyenletrendszerhez fogunk jutni, mert

$$(e_1; e_2) \nabla (a; b) = (a; b)$$

$$(e_1b + ae_2; e_2b) = (a; b)$$

egyenlőségéből adódik:

$$e_1b + ae_2 = a$$

$$e_2 b = b.$$

Az egyenletrendszer megoldásai $e_2 = 1$ és $e_1 = 0$, vagyis a művelet semleges elemes, és semleges eleme a $(0; 1)$ elem.

e) I. A műveleti táblázat szimmetrikus a főátlóra, ami maga után vonja a művelet kommutativitását;

II. Az asszociativitáshoz a $(a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c)$ egyenlőséget kellene igazolni. Azt láthatjuk a műveleti táblázatból, hogy ha a három határozatlan közül valamelyik α , akkor mindkét oldalon α -t kapunk eredményül, tehát az egyenlőség ekkor fennáll. Ha nincs a határozatlanok között α , de van β , akkor mindkét oldalon β lesz az eredmény. Ha pedig csupa γ -t tartalmaz az egyenlőség, akkor γ lesz az egyenlőség mindkét oldalán, tehát a művelet asszociatív;

III. Idempotens, ami egyszerűen kiolvasható a táblázatból;

IV. Nem invertálható, mert például az $\alpha \diamond x = \beta$ egyenletet kielégítő x nem létezik;

V. A semleges elem definícióját a γ elem kielégíti, így a művelet semleges elemes.

10. Disztributívak-e a következő műveletek a megfelelő halmazon definiált összeadásra nézve:

a) a \mathbf{Z} halmazon értelmezett \circ művelet: $a \circ b = a + b - 3$;

b) az \mathbf{N} halmazon értelmezett $*$ művelet: $a * b = \max(a, b)$.

Megoldás. a) Először mutassuk meg, hogy

$$(\forall a \in \mathbf{Z})(\forall b \in \mathbf{Z})(\forall c \in \mathbf{Z})(a \circ (b + c) = (a + b) \circ (a + c)).$$

A művelet definíciója alapján

$$a \circ (b + c) = (a + b) \circ (a + c)$$

$$a + (b + c) - 3 = (a + b) + (a + c) - 3$$

$$a = 3$$

ez pedig nem igaz minden \mathbf{Z} -beli elemre, tehát a \circ nem disztributív a $+$ -ra nézve.

b) Ez előző megoldáshoz hasonlóan $(\forall a \in \mathbf{N})(\forall b \in \mathbf{N})(\forall c \in \mathbf{N})$ esetén igazolandó, hogy

$$a \circ (b + c) = (a + b) \circ (a + c)$$

$$\max(a, b + c) = \max(a + b, a + c)$$

Ez nem áll fenn $a = 5$, $b = 2$ és $c = 4$ esetén, mert $\max(5, 2 + 4) \neq \max(5 + 2, 5 + 4)$, tehát a $*$ nem disztributív a $+$ -ra nézve.

11. Legyen a \oplus és a \odot művelet a következőképpen definiálva a $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ halmazon:

$$(a; b) \oplus (c; d) = (a + c; b + d) \text{ és } (a; b) \odot (c; d) = (ac - bd; ad + bc)$$

Bizonyítsuk be, hogy a \odot művelet disztributív a \oplus műveletre nézve.

Megoldás. Meg kell mutatnunk, hogy tetszőleges $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ -beli rendezett párokra teljesül, hogy $(a; b) \odot ((c; d) \oplus (e; f)) = ((a; b) \odot (c; d)) \oplus ((a; b) \odot (e; f))$, valamint,

hogy $((c; d) \oplus (e; f)) \odot (a; b) = ((c; d) \odot (a; b)) \oplus ((e; f) \odot (a; b))$. Előbb nézzük az első egyenlőséget.

$$(a; b) \odot ((c; d) \oplus (e; f)) = ((a; b) \odot (c; d)) \oplus ((a; b) \odot (e; f))$$

$$(a; b) \odot (c + e; d + f) = (ac - bd; ad + bc) \oplus (ae - bf; af + be)$$

$$(a(c + e) - b(d + f); a(d + f) + b(c + e)) = (ac - bd + ae - bf; ad + bc + af + be)$$

$$(ac + ae - bd + bf; ad + af + bc + be) = (ac - bd + ae - bf; ad + bc + af + be)$$

tehát a bal oldali disztributivitás fennáll.

$$((c; d) \oplus (e; f)) \odot (a; b) = ((c; d) \odot (a; b)) \oplus ((e; f) \odot (a; b))$$

$$(c + e; d + f) \odot (a; b) = (ca - db; cb + da) \oplus (ea - fb; eb + fa)$$

$$((c + e)a - (d + f)b; (c + e)b + (d + f)a) = (ca - db + ea - fb; cb + da + eb + fa)$$

$$(ca + ea - db - fb; cb + eb + da + fa) = (ca - db + ea - fb; cb + da + eb + fa),$$

vagyis ez is teljesül, így a disztributivitást bizonyítottuk.

- 12.** Bizonyítsuk be, hogy a maximumképzés abszorbtív a minimumképzésre nézve a valós számok halmazában.

Megoldás. Bizonyítandó, hogy $\max(a, \min(a, b)) = a$ fennáll tetszőleges valós számokra.

Ha $a \geq b$, akkor	Ha $a < b$, akkor
$\max(a, \min(a, b)) = a$	$\max(a, \min(a, b)) = a$
$\max(a, b) = a$	$\max(a, a) = a$
$a = a$	$a = a$

Ezzel az abszorbtivitást igazoltuk.

2. Számhalmazok és számelmélet

2.1. A számok keletkezése

A számfogalom kialakulása nagyon hosszú folyamat volt, és a mai napig állandó fejlődésben van. Az emberek számára fontos dolgok megszámlálására már a történeti fejlődés kezdeti szakaszában, a történelem előtti időkben is szükség volt. A szám nyilvánvalóan a *számlálás* tevékenységéből származik. A számlálás igénye kialakította az egy, kettő, három,... számokat, amelyeket mi *természetes számoknak* neveziünk. A számfogalom kialakulásakor az emberek eredetileg a megszámolandó tárgyakkal kapcsolatban gondolták ki a számokat, és csak a fejlődésük jóval magasabb fokán kezdtek róluk elvontan gondolkodni. Valószínű, hogy már az ősember is megszámlált tárgyakat, például állatbőröket, kifogott halakat, és különböző számokkal jelezte, hogy az azonos tárgykból hány darab van. Beszélt hét bőrről, nyolc halról, stb. Sokkal későbbi folyamat lehetett a számok *absztrakciója*, vagyis az, hogy például a nyolcas szám bármely nyolc tárgyat tartalmazó halmazt jelenthet. A három mint szám nem három ujjat, három almát vagy három állatbőrt jelent, hanem azt, ami mindezekben közös, a belőlük absztrahált számukat. A számlálásból fejlődtek ki az első, legegyszerűbb számolási műveletek: az *összeadás*, a *szorzás*, a *hatványozás*, melyek nagyon hasznosnak és célszerűnek bizonyultak az ember józan tevékenységeiben.

A szám tehát elvont fogalom és kialakulásában fontos szerepe volt a munkamegosztásnak is. A pásztorok például tudni akarták, hogy hány birkából áll a nyájuk és hogy hány káposztát kapnak a piacon például egy birkáért. A piacon a kereskedők és a vásárlók összehasonlították és összeadták az árakat. Aki hajózni akart, annak tudnia kellett, hogy melyik irányba induljon, ha célba akar jutni. A számok segítségével tanulta meg az ember mérni az időt, a távolságokat, a területet, és ezekkel mérte a térfogatot is. Egy piramis építéséhez az ókori egyiptomiaknak például tudniuk kellett, hogy mennyi kőre lesz szükségük. Ezekhez a bonyolult számításokhoz már írással is rögzítették a számokat. A kereskedelem kétségkívül meggyorsította a számfogalom kialakulását. A fejlettebb kereskedelmi életet elérve történhetett, hogy a számokat a számolásnál kezdték csoportokba foglalni, például a kéz ujjainak mintájára ötös vagy tízes csoportokba. Így jöttek létre a *számrendszerek*, amelyekhez azután a számnevek kialakulása is igazodott. Megjegyezzük, hogy a számrendszer nem jelenti a *helyi érték* létezését is. A sokféle számrendszer között a tízes terjedt el legjobban, bár más számrendszerek emlékei, maradványai ma is élnek. Az *ősmagyarok* a történelmi időkben tízes számrendszert használtak, ez azonban az előző idők hatos és hetes számrendszerén át, hosszú fejlődés eredménye volt. A hetes számrendszerre lehet következtetni például a mesék hétfejű sárkányáról, a hetedhét országról, a hétmérföldes csizmáról, a hétpecsétetes titokról, vagy arról, ha népmeséinkben valaki hétszerte szebb lett.

Már az ókorban is törekedtek a matematikai ismeretek deduktív módon történő felépítésére, de a XIX. század végén, miután megszületett a geometria axiomatikus felépítése, fontosnak tűnt a többi matematikai tudományág axiomatizálása is. A természetes számok axiomatizálása Giuseppe Peano (1858-1932) olasz matematikus nevéhez fűződik.

2.2. Természetes számok halmaza

Az $1, 2, 3, \dots$ természetes számok halmazát \mathbf{N} -nel jelöljük, azaz

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

A természetes számokat bevezethetjük halmazelméleti alapokon vagy pedig axiomatikusán. A halmazelméleti alapokon való bevezetés esetében definiálni kell a halmazok között a „számosságilag ekvivalens” relációt, amelyről belátható hogy ekvivalenciareláció, majd a „kisebb számosságú” relációt, amelyről belátható hogy rendezési reláció. Ez a fajta megközelítés azon alapszik, hogy egy természetes szám tulajdonképpen nem más, mint egy véges halmaz számossága.

Az alábbiakban a természetes számok bevezetésének másik módját, a Peano-axiómákkal való bevezetés gondolatait ismertetjük, amely nem használ semmiféle halmazelméleti ismeretet. Az axiomatikus bevezetés előtt ejtsünk néhány szót arról, hogy miből is áll egy axioma rendszer és mit jelent maga az axiomatikus megközelítés.

Bármely elmélet axiomatikus tárgyalás a következő módon történik:

1. Néhány egyszerű fogalmat definíció nélkül mindenki által ismertnek tételezünk fel (például ilyen a geometriában a pont, az egyenes vagy a sík fogalma). Ezek lesznek az *alfogalmak*.
2. Néhány – az alapfogalmakra vonatkozó – mindenki által elfogadható, nagyon szemléletes állítást fogalmazunk meg, melyeket bizonyítás nélkül igaznak fogadunk el (például a geometriában: két ponton keresztül pontosan egy egyenes húzható). Ezek lesznek az *alapigazságok* vagy *axiómák*.
3. Az alapfogalmakra épülő definíciókon és az axiómák segítségével bizonyított tételeken keresztül szigorú logikai úton – logikai következtetési szabályok segítségével – jutunk el egy tudományterület további fogalmaihoz és tételeihez (például a geometriában, hogy egy háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást).

A Peano-axiómák alapfogalmai: természetes szám, egy (1), rákövetkezés.

Peano-axiómák:

P1. Az 1 természetes szám.

P2. Minden természetes számnak van egy egyértelműen meghatározott rákövetkezője, amely szintén természetes szám.

P3. Nincs olyan természetes szám, amelynek az 1 rákövetkezője lenne.

P4. Különböző természetes számoknak a rákövetkezőjük is különböző.

P5. Ha egy P tulajdonság olyan, hogy

–igaz a $k_0 \in \mathbf{N}$ számra, továbbá

–abból a feltevésből, hogy a P tulajdonság igaz egy tetszőleges k ($k \geq k_0$, $k \in \mathbf{N}$) számra, következik, hogy igaz a k rákövetkezőjére is,

akkor a P tulajdonság minden $k \geq k_0$ természetes számra igaz lesz.

A természetes számok \mathbf{N} halmazában ismertnek tekintjük az összeadás és szorzás binér műveleteket, ami azt jelenti, hogy a természetes számokból álló $(a; b)$ számpárhoz az összeadás esetén hozzárendeljük az $a + b$ összeget, a szorzás esetén pedig az $a \cdot b$ szorzatot. A természetes számoknak az összeadásra és szorzásra vonatkozó minden eddig megismert tulajdonsága belátható az axiómák alapján is, s ezeket most bizonyítás nélkül fogjuk felsorolni:

- N1.** Az összeadás művelete kommutatív, azaz $(\forall a, b \in \mathbf{N}) \ a + b = b + a$.
- N2.** Az összeadás művelete asszociatív, azaz $(\forall a, b, c \in \mathbf{N}) \ (a + b) + c = a + (b + c)$.
- N3.** A szorzás művelete kommutatív, azaz $(\forall a, b \in \mathbf{N}) \ ab = ba$.
- N4.** A szorzás művelete asszociatív, azaz $(\forall a, b, c \in \mathbf{N}) \ (ab)c = a(bc)$.
- N5.** Van olyan $1 \in \mathbf{N}$ elem, hogy bármelyik természetes számmal megszorozva, ugyanazt a számot adja ("neutrális a szorzásra"), azaz $(\exists 1 \in \mathbf{N})(\forall a \in \mathbf{N}) \ 1 \cdot a = a$.
- N6.** A szorzás az összeadásra nézve disztributív, azaz $(\forall a, b, c \in \mathbf{N}) \ a(b + c) = ab + ac$.
- N7.** $A \leq$ reláció reflexív, azaz $(\forall a \in \mathbf{N}) \ a \leq a$.
- N8.** $A \leq$ reláció antiszimmetrikus, azaz $(\forall a, b \in \mathbf{N}) \ (a \leq b \wedge b \leq a \implies a = b)$.
- N9.** $A \leq$ reláció tranzitív, azaz $(\forall a, b, c \in \mathbf{N}) \ (a \leq b \wedge b \leq c \implies a \leq c)$.
- N10.** $A \leq$ rendezés lineáris, azaz $(\forall a, b \in \mathbf{N}) \ (a \leq b \vee b \leq a)$.
- N11.** $A \leq$ reláció monoton az összeadás műveletére nézve:
 $(\forall a, b, c \in \mathbf{N}) \ (a \leq b \implies a + c \leq b + c)$.
- N12.** $A \leq$ reláció monoton a szorzás műveletére nézve:
 $(\forall a, b, c \in \mathbf{N}) \ (a \leq b \implies ac \leq bc)$.

Megemlítjük a természetes számok halmazának két fontos tulajdonságát. Az egyik a *Legkisebb szám elve*, amely szerint az \mathbf{N} halmaz bármely nem üres részhalmazának van legkisebb eleme, a másik pedig az *Arkhimédészi tulajdonság*, amely kimondja, hogy bármely két a, b természetes számhoz található olyan n természetes szám, hogy $a < nb$.

A természetes számok nullával kibővített halmazát \mathbf{N}_0 jelöli, azaz $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$. Egyes könyvek (például a magyarországi tankönyvek) a természetes számok \mathbf{N} halmazába már besorolják a nullát is. Abban az esetben nincs értelme beszélni az \mathbf{N}_0 halmazról.

Az indiai népek legnagyobb tudományos és általános kutúrtörténeti vívmánya a helyi érték elvén alapuló tízes számrendszer megteremtése volt, amelynek kiteljesedése hosszú időt vett igénybe, és még távolról sem ismert fejlődésének minden állomása. Megközelítőleg a VI. század közepén alakult ki Indiában az új helyiértékrendszer, amely arab közvetítéssel jutott el Európába és Fibonacci *Liber abaci* című könyve által terjedt el. Az új helyiértékrendszer a következő három tulajdonságot egyesítette: multiplikatív írásmód, a tíz hatványai jeleinek elhagyása, valamint a helyiérték-rendszer teljességéhez szükséges, a *nullát* jelző számjegy kialakulása, amely megmutatja, hogy a megfelelő helyen nem szerepel a tíz valamely hatványa. A nullát jelentő "szunja" szó először a hinduknál jelent meg a 346 előtti szövegekben, valószínűleg 100 körül. A babiloni matematikában is felbukkant ugyan a nulla az i.e. I. évezred közepe táján, de ott nem használták rendszeresen.

Belátható, hogy a k -ra rákövetkező természetes szám a $k + 1$. E tény és a **P5** axióma alapján megfogalmazhatjuk a matematikai indukció elvét, amely lehetőséget ad arra, hogy természetes számokra vonatkozó tulajdonságokat bizonyítsunk be, illetve olyan állításokat, melyek végtelen sok számra teljesülnek.

Matematikai indukció elve. Legyen $P(n)$ egy olyan állítás, amely az n természetes számra vonatkozik.

1° Igazoljuk, hogy a $P(n)$ állítás érvényes $n = 1$ -re (vagy $n = n_0$ -ra, ahol $n_0 > 1$ egy kezdőérték).

2° Feltesszük, hogy a $P(n)$ állítás igaz $n = k$ -ra, és ezt a $P(k)$ feltételezést nevezzük indukciós feltevésnek.

3° Igazoljuk, hogy a $P(n)$ állítás igaz $n = k + 1$ esetén.

Ekkor a $P(n)$ állítás 1-től (vagy n_0 -tól) kezdve minden n természetes számra igaz.

2.1. Példa. Ha matematikai indukcióval szeretnénk igazolni, hogy minden n természetes szám esetén $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, akkor a következő módon járunk el.

1° Találjuk meg az első olyan természetes számot, amelyre igaz az állítás. Próbálkozzunk mindig a lehető legkisebb számmal, ebben az esetben $n = 1$ -gyel. Behelyettesítés után azt kapjuk, hogy $1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$, azaz $1 = 1$, vagyis az állítás $n = 1$ -re igaz.

2° Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$ -ra, azaz

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Ezt az egyenlőséget indukciós feltevésnek nevezzük, és felhasználjuk a bizonyítás során.

3° Igazoljuk most az állítást $n = k + 1$ -re. Behelyettesítés után azt kapjuk, hogy az

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

egyenlőségnek kell teljesülnie. Induljunk ki a bal oldalból és használjuk fel az indukciós feltevést. Némi rendezés után kapjuk, hogy

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

vagyis az állítás igaz $n = k + 1$ -re, ezért minden természetes számra igaz.

2.2. Példa. Matematikai indukcióval igazolhatjuk azt az összefüggést is, hogy minden n természetes szám esetén $1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{n-1} = \frac{10^n - 1}{9}$. Az eljárás a következő.

1° $n = 1$ -re $1 = \frac{10^1 - 1}{9}$, azaz $1 = 1$, vagyis az állítás igaz.

2° Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$ -ra, azaz az indukciós feltevés

$$1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{k-1} = \frac{10^k - 1}{9}.$$

3° Igazoljuk most az állítást $n = k + 1$ -re. Behelyettesítés után belátjuk, hogy most az $1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{k-1} + 10^k = \frac{10^{k+1} - 1}{9}$ egyenlőségnek kell teljesülnie. Induljunk ki a bal oldalból és használjuk fel az indukciós feltevést. Ekkor

$$1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{k-1} + 10^k = \frac{10^k - 1}{9} + 10^k = \frac{10^k - 1 + 9 \cdot 10^k}{9} = \frac{10 \cdot 10^k - 1}{9} = \frac{10^{k+1} - 1}{9},$$

vagyis az állítás igaz $n = k + 1$ -re, ezért minden természetes számra igaz.

FELADATOK.

Bizonyítsuk be matematikai indukcióval, hogy minden n természetes számra érvényesek az alábbi egyenlőségek.

1. $1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2$.

Megoldás. 1° $n = 1$ -re $1 = 1^2$, azaz $1 = 1$, tehát az állítás igaz.

2° Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$ -ra, vagyis az indukciós feltevés

$$1 + 3 + 5 + \dots + 2k - 1 = k^2.$$

3° Igazoljuk most az állítást $n = k + 1$ -re. Behelyettesítés után belátjuk, hogy az $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$ egyenlőségnek kell teljesülnie. Induljunk ki a bal oldalból és használjuk fel az indukciós feltevést. Ekkor

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2,$$

vagyis az állítás igaz $n = k + 1$ -re, ezért minden természetes számra igaz.

2. $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$.

Megoldás. 1° $n = 1$ -re $2 = 1 \cdot (1 + 1)$, azaz $2 = 2$, tehát az állítás igaz.

2° Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$ -ra, vagyis az indukciós feltevés

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2k = k(k + 1).$$

3° Igazoljuk most az állítást $n = k + 1$ -re. Behelyettesítés után belátjuk, hogy az $2 + 4 + 6 + \dots + 2k + 2(k + 1) = (k + 1)(k + 2)$ egyenlőségnek kell teljesülnie. Induljunk ki a bal oldalból és használjuk fel az indukciós feltevést. Ekkor

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2k + 2(k + 1) = k(k + 1) + 2(k + 1) = (k + 1)(k + 2),$$

vagyis az állítás igaz $n = k + 1$ -re, ezért minden természetes számra igaz.

3. $1 + 3 + 6 + \dots + \frac{n(n + 1)}{2} = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{6}$.

Megoldás. 1° $n = 1$ -re $1 = \frac{1(1 + 1)(1 + 2)}{6}$, azaz $1 = 1$, tehát az állítás igaz.

2° Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$ -ra, vagyis az indukciós feltevés

$$1 + 3 + 6 + \dots + \frac{k(k + 1)}{2} = \frac{k(k + 1)(k + 2)}{6}.$$

3° Igazoljuk most az állítást $n = k + 1$ -re. Behelyettesítés után belátjuk, hogy az $1 + 3 + 6 + \dots + \frac{k(k + 1)}{2} + \frac{(k + 1)(k + 2)}{2} = \frac{(k + 1)(k + 2)(k + 3)}{6}$ egyenlőségnek kell teljesülnie. Kiindulva a bal oldalból adódik, hogy

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 6 + \dots + \frac{k(k + 1)}{2} + \frac{(k + 1)(k + 2)}{2} &= \frac{k(k + 1)(k + 2)}{6} + \frac{(k + 1)(k + 2)}{2} = \\ &= \frac{k(k + 1)(k + 2) + 3(k + 1)(k + 2)}{6} = \frac{(k + 1)(k + 2)(k + 3)}{6}, \end{aligned}$$

vagyis az állítás igaz $n = k + 1$ -re, ezért minden természetes számra igaz.

$$4. \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Megoldás. 1^o $n = 1$ -re $1^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$, azaz $1 = 1$, tehát az állítás igaz.
2^o Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$ -ra, vagyis az indukciós feltevés

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

3^o Igazoljuk most az állítást $n = k + 1$ -re. Behelyettesítés után belátjuk, hogy az

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

egyenlőségnek kell teljesülnie. Kiindulva a bal oldalból adódik, hogy

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1))}{6} = \\ &= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}, \end{aligned}$$

vagyis az állítás igaz $n = k + 1$ -re, ezért minden természetes számra teljesül.

$$5. \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

Megoldás. 1^o $n = 1$ -re $1^3 = \left[\frac{1(1+1)}{2} \right]^2$, azaz $1 = 1$, tehát az állítás igaz.
2^o Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$ -ra, vagyis az indukciós feltevés

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2} \right]^2.$$

3^o Igazoljuk most az állítást $n = k + 1$ -re. Behelyettesítés után belátjuk, hogy az

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right]^2$$

egyenlőségnek kell teljesülnie. Kiindulunk a bal oldalból és rendezzük a kifejezést. Ekkor

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 &= \left[\frac{k(k+1)}{2} \right]^2 + (k+1)^3 = \\ &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = (k+1)^2 \left[\frac{k^2}{4} + k + 1 \right] = \\ &= (k+1)^2 \frac{k^2 + 4k + 4}{4} = (k+1)^2 \frac{(k+2)^2}{2^2} = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right]^2 \end{aligned}$$

vagyis a szemlélt összefüggés teljesül $n = k + 1$ -re, ami annyit jelent, hogy minden természetes számra igaz.

$$6. 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

Megoldás. 1^o $n = 1$ -re $1^2 = \frac{1(4 \cdot 1^2 - 1)}{3}$, azaz $1 = 1$, tehát az állítás igaz.

2^o Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$ -ra, vagyis az indukciós feltevés

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2k-1)^2 = \frac{k(4k^2-1)}{3}.$$

3^o Igazoljuk most az állítást $n = k+1$ -re. Behelyettesítés után belátjuk, hogy az

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2k-1)^2 + (2k+1)^2 = \frac{(k+1)(4(k+1)^2-1)}{3}$$

egyenlőségnek kell teljesülnie. Kiindulunk a bal oldalból és rendezzük a kifejezést. Ekkor

$$\begin{aligned} 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2k-1)^2 + (2k+1)^2 &= \frac{k(4k^2-1)}{3} + (2k+1)^2 = \\ &= \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2 = (2k+1) \left(\frac{k(2k-1)}{3} + 2k+1 \right) = \\ &= (2k+1) \frac{2k^2 - k + 6k + 3}{3} = (2k+1) \frac{2k^2 + 5k + 3}{3} = (2k+1) \frac{(2k+3)(k+1)}{3} = \\ &= \frac{(k+1)(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}{3} = \frac{(k+1)(4(k+1)^2-1)}{3}, \end{aligned}$$

vagyis az adott egyenlőség teljesül $n = k+1$ -re, vagyis minden természetes számra.

$$7. \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Megoldás. 1^o $n = 1$ -re $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1+1}$, azaz $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, vagyis az állítás igaz.

2^o Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$ -ra, azaz az indukciós feltétel

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}.$$

3^o $n = k+1$ -re

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2},$$

vagyis ennek az egyenlőségnek kell teljesülnie. Kiindulva a bal oldalból kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \\ &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}, \end{aligned}$$

vagyis az állítás igaz $n = k+1$ -re, ezért minden természetes számra is teljesül.

$$8. \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}.$$

Megoldás. 1° $n = 1$ -re $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(1+1)(1+2)}$, azaz $\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$, ami igaz.

2° Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$ -ra, azaz az indukciós feltevés

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(k+1)(k+2)}.$$

3° Igazoljuk most az állítást $n = k + 1$ -re. Behelyettesítés után azt kapjuk, hogy az

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(k+2)(k+3)}$$

egyenlőségnek kell teljesülnie. Induljunk ki a bal oldalból és használjuk fel az indukciós feltevést. Ekkor

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \\ & = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \\ & = \frac{1}{4} - \frac{k+3-2}{2(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{4} - \frac{k+1}{2(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(k+2)(k+3)}, \end{aligned}$$

vagyis az állítás igaz $n = k + 1$ -re, ezért bármely természetes számra igaz.

$$9. \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

Megoldás. 1° $n = 1$ -re $\frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1}$, azaz $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, vagyis az állítás igaz.

2° Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$ -ra, azaz az indukciós feltétel

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1}.$$

3° $n = k + 1$ -re

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3},$$

vagyis ennek az egyenlőségnek kell teljesülnie. Kiindulva a bal oldalból kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \\ & = \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k(2k+3) + 1}{(2k+1)(2k+3)} = \\ & = \frac{2k^2 + 3k + 1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3}, \end{aligned}$$

vagyis az állítás igaz $n = k + 1$ -re, ezért minden természetes számra is teljesül.

$$10. \quad 3 + 33 + 333 + \cdots + \underbrace{33 \dots 3}_{n \text{ számjegy}} = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{27}.$$

Megoldás. 1° $n = 1$ -re

$$3 = \frac{10^{1+1} - 9 \cdot 1 - 10}{27}, \quad \text{illetve} \quad 3 = \frac{81}{27}, \quad \text{azaz} \quad 3 = 3,$$

tehát az állítás ebben az esetben igaz.

2° Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$ -ra, vagyis az indukciós feltevés

$$3 + 33 + 333 + \cdots + \underbrace{33 \dots 3}_{k \text{ számjegy}} = \frac{10^{k+1} - 9k - 10}{27}.$$

3° Igazoljuk most az állítást $n = k + 1$ -re. Behelyettesítés után belátjuk, hogy az

$$3 + 33 + 333 + \cdots + \underbrace{33 \dots 3}_{k \text{ számjegy}} + \underbrace{33 \dots 3}_{k+1 \text{ számjegy}} = \frac{10^{k+2} - 9(k+1) - 10}{27}$$

egyenlőségnek kell teljesülnie.

Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned} 3 &= 3 \cdot 10^0 \\ 33 &= 3 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 = 3(10^1 + 10^0) \\ 333 &= 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 = 3(10^2 + 10^1 + 10^0) \\ 3333 &= 3 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 = 3(10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0) \end{aligned}$$

és így tovább. Ezt a gondolatmenetet használjuk majd ki a bizonyítás során.

Induljunk most ki a bal oldalból, használjuk fel az indukciós feltevést és a 2.2. Példa állítását, majd rendezzük a kifejezést. Ekkor

$$\begin{aligned} 3 + 33 + 333 + \cdots + \underbrace{33 \dots 3}_{k \text{ számjegy}} + \underbrace{33 \dots 3}_{k+1 \text{ számjegy}} &= \frac{10^{k+1} - 9k - 10}{27} + \underbrace{33 \dots 3}_{k+1 \text{ számjegy}} = \\ &= \frac{10^{k+1} - 9k - 10}{27} + 3(10^k + 10^{k-1} + \cdots + 10^1 + 10^0) = \\ &= \frac{10^{k+1} - 9k - 10}{27} + 3 \cdot \frac{10^{k+1} - 1}{10 - 1} = \frac{10^{k+1} - 9k - 10 + 9 \cdot 10^{k+1} - 9}{27} = \\ &= \frac{10^{k+1}(1 + 9) - 9(k+1) - 10}{27} = \frac{10^{k+2} - 9(k+1) - 10}{27}, \end{aligned}$$

vagyis az állítás igaz $n = k + 1$ -re, ezért minden természetes számra teljesül.

2.3. Egész számok halmaza

A *Matematika kilenc könyvben* című értekezés összegezte az i.e. I. évezredben élt kínai matematikusok munkáját, és annak VIII. könyvében a tudomány történetében először találkozunk a pozitív és negatív számok megkülönböztetésével, valamint itt fogalmazták meg a negatív számokkal végzett műveletek legegyszerűbb szabályait is. A táblázat pozitív elemeit piros pálcikákkal ábrázolták, a negatívokat feketével.

A negatív számok igen jelentős szerepet játszottak az indiaiak algebrájában is, ahol a pozitív számok neve "tulajdon" volt, a negatív számokat pedig a "csökkenés" vagy "adósság" szóval illették. Az első utalás a negatív számokra Brahmagupta műveiben szerepel a VI. században. Lehetséges, hogy az indiaiak a negatív számokat a kínaiaktól vették át, de a pozitív és negatív számokra vonatkozó szabályokat továbbfejlesztették. Brahmagupta ezt írja: "Két pozitív szám összege pozitív, két negatív számé negatív. Pozitív és negatív szám összege ezek különbségével egyenlő." Persze tudta, hogyan kell a különbség előjelét megválasztani.

Nehéz megmondani, hogy mikor váltak a negatív együtthatók negatív számokká, vagy legalábbis, mikortól kezdték ekként értelmezni őket. Európában aránylag későn jelentkeztek a negatív számok, s eleinte maguk a matematikusok sem tudtak mit kezdeni vele. A XII-XV. századbeli itáliai matematikusok azonban már kezdték használni e hiányt jelentő számokat. Cardano (1501-1576) olasz matematikus már tekintetbe vette, de *fiktív számoknak* nevezte őket. Stifel (1487?-1567) német matematikus, aki a másodfokú egyenletek megoldását egyszerűsítette, a negatív számokat *abszurd számoknak* nevezte. Még a francia Viète (1540-1603) is elvetette a negatív számokat, Descartes (1596-1650) 1637-ben megjelent "Geometria" című könyvében pedig még *hamis számoknak* hívta, de már minden előítélet nélkül használta őket.

Tekintsük át most, hogy matematikailag hogyan indokljuk az egész számok kialakulását. Természetes számok összege és szorzata mindig természetes szám, de ez a különbségről már nem mondható el. Ezért van szükség a természetes számok \mathbf{N} halmazának kibővítésére. A számkörbővítés a *permanencia-elv* alapján történik, amelynek néhány alapelve például az, hogy a bővített halmaznak az eredeti halmaz a részhalmaza legyen és hogy az összeadás és szorzás tulajdonságai érvényben maradjanak.

Tetszőleges m, n természetes számok esetén az $m + x = n$ egyenletnek nincs mindig \mathbf{N} -beli megoldása. Ezért a természetes számok halmazát ki kell bővíteni a *nullával* és a *negatív egész számok* $\{-1, -2, \dots\}$ halmazával, ahol $m + (-m) = 0$, minden $m \in \mathbf{N}$ esetén. Tehát

$$\mathbf{Z} = \{\dots - 4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}, \quad \mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$$

Az egész számok halmazában az $m + x = n$ egyenletnek mindig van megoldása, mégpedig

$$x = n + (-m).$$

Az egész számok \mathbf{Z} halmazában érvényesek a természetes számok halmazában felsorolt **N1-N11** tulajdonságoknak megfelelő tulajdonságok és még három tulajdonság, amelyeket az alábbiakban ismertetünk:

Z1. Az összeadás művelete kommutatív, azaz $(\forall a, b \in \mathbf{Z}) \ a + b = b + a$.

Z2. Az összeadás művelete asszociatív, azaz $(\forall a, b, c \in \mathbf{Z}) \ (a + b) + c = a + (b + c)$.

Z3. A szorzás művelete kommutatív, azaz $(\forall a, b \in \mathbf{Z}) \ ab = ba$.

- Z4.** A szorzás művelete asszociatív, azaz $(\forall a, b, c \in \mathbf{Z}) (ab)c = a(bc)$.
- Z5.** Van olyan $1 \in \mathbf{N}$ elem, hogy bármelyik természetes számmal megszorozva, ugyanazt a számot adja ("neutrális a szorzásra"), azaz $(\exists 1 \in \mathbf{Z})(\forall a \in \mathbf{Z}) 1 \cdot a = a$.
- Z6.** A szorzás az összeadásra nézve disztributív, azaz $(\forall a, b, c \in \mathbf{Z}) a(b + c) = ab + ac$.
- Z7.** A \leq reláció reflexív, azaz $(\forall a \in \mathbf{Z}) a \leq a$.
- Z8.** A \leq reláció antiszimmetrikus, azaz $(\forall a, b \in \mathbf{Z}) (a \leq b \wedge b \leq a \implies a = b)$.
- Z9.** A \leq reláció tranzitív, azaz $(\forall a, b, c \in \mathbf{Z}) (a \leq b \wedge b \leq c \implies a \leq c)$.
- Z10.** A \leq rendezés lineáris. azaz $(\forall a, b \in \mathbf{Z}) (a \leq b \vee b \leq a)$.
- Z11.** A \leq reláció monoton az összeadás műveletére nézve:
- Z12.** $(\forall x, y \in \mathbf{Z})(\forall z \geq 0)(x \leq y \implies xz \leq yz)$,
- Z13.** $(\exists 0 \in \mathbf{Z})(\forall z \in \mathbf{Z}) x + 0 = x$,
- Z14.** $(\forall x \in \mathbf{Z})(\exists (-x) \in \mathbf{Z}) x + (-x) = 0$.

A 0-át az összeadás *neutrális (vagy semleges) elemének* nevezzük, $-x$ pedig az x egész szám *ellentett száma*.

2.3.1. Oszthatóság

Az i.e. VI. században Pitagorasz és tanítványai már foglalkoztak a számok oszthatóságával. Szerintük a két egyenlő részre osztható számok a páros számok, a két egyenlő részre nem bonthatók pedig a páratlan számok. Első számelméleti tételeik is a páros és páratlan számok elméletéhez tartoztak. Ezek közül néhányat felsorolunk: *Páros számok összege és különbsége is páros. Két páratlan szám összege páros. Páros számú páratlan szám összege páros. Páratlan számú páratlan szám összege páratlan. Ha páros számból páratlant vonunk ki, akkor páratlant kapunk. Páratlan és páros szám szorzata páros.*

Vezessük most be a számok oszthatóságának matematikai definícióját.

2.1. Definíció. *Ha adott a és b egész számokhoz található olyan q egész szám, hogy $a = bq$ teljesül, akkor azt mondjuk, hogy a osztható b -vel, vagy másképpen: b osztója a -nak, és ezt a következőképpen jelöljük: $b|a$.*

2.3. Példa. Például: $4 = 2 \cdot 2$ miatt $2|4$ vagy 4 osztható 2-vel, $12 = 3 \cdot 4$ alapján $3|12$ vagy 12 osztható 3-mal és $4|12$ vagy 12 osztható 4-gyel. $m|0$ minden $m \in \mathbf{Z}$ számra igaz, hiszen $0 = m \cdot 0$, vagyis a 0 minden számmal osztható, de a 0 egy számnak sem osztója.

A definíció alapján könnyen beláthatók az alábbi tulajdonságok:

- a) Ha $b|a$, akkor $b|ac$ minden $c \in \mathbf{Z}$ esetén.
- b) Ha $a|b$ és $b|c$, akkor $a|c$.
- c) Ha $a|b$ és $a|c$, akkor $a|bx + cy$ minden $x, y \in \mathbf{Z}$ esetén.

- d) Ha $a|b$ és $b|a$, akkor $a = b$ vagy $a = -b$.
- e) Ha az a, b pozitív egész számokra igaz, hogy $a|b$, akkor $a \leq b$.
- f) Ha az $a_1 + a_2 + \dots + a_k = 0$ egyenlőségben ($k \geq 2, k \in \mathbf{N}$) a k számú összeadandó közül $k - 1$ osztható p -vel, akkor a k -adik összeadandó is osztható p -vel.

2.4. Példa. Figyeljük meg hogyan lehet általánosabb osztásokat bizonyítani, például azt, hogy bármely három egymást követő természetes szám összege osztható 3-mal. Vegyük fel a három egymást követő természetes számot $n - 1, n, n + 1$ alakban. Ezek összege $n - 1 + n + n + 1 = 3n$, azaz mindig osztható 3-mal.

Bizonyos kifejezések oszthatóságát matematikai indukcióval is bizonyíthatjuk.

2.5. Példa. Tekintsük át annak az állításnak a matematikai indukcióval történő bizonyítását, hogy $4|7^n + 3^{n+1}$ minden n természetes számra.

1° Igazoljuk az állítást $n = 1$ -re.

$7^1 + 3^{1+1} = 7 + 9 = 16 = 4 \cdot 4$, vagyis az oszthatóság $n = 1$ -re érvényes.

2° Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$ -ra.

Ekkor az indukciós feltevés, melyet felhasználunk majd a bizonyítás során az, hogy van olyan ℓ egész szám, hogy $7^k + 3^{k+1} = 4\ell$, azaz a $7^k + 3^{k+1}$ kifejezés osztható 4-gyel.

3° Igazoljuk most az állítást $n = k + 1$ -re.

Most azt kell belátnunk, hogy a $7^{k+1} + 3^{k+2}$ kifejezés is osztható 4-gyel. Ekkor

$$7^{k+1} + 3^{k+1+1} = 7 \cdot 7^k + 3 \cdot 3^{k+1} = 3(7^k + 3^{k+1}) + 4 \cdot 7^k = 3 \cdot 4\ell + 4 \cdot 7^k = 4(3\ell + 7^k),$$

vagyis az oszthatóság igaz $n = k + 1$ -re, ezért minden természetes számra igaz.

Két egész szám esetén nem mindig végezhető el az osztás művelete, viszont elvégezhető a maradékos osztás minden 0-tól különböző osztó esetén.

2.1. Tétel. Legyen az a tetszőleges, b pedig 0-tól különböző egész szám. Ekkor léteznek olyan egyértelműen meghatározott q, r egész számok, melyekre $a = bq + r, 0 \leq r < b$.
A q szám az a szám b számmal való osztásának hányadosa, r pedig az osztás maradéka.

Bizonyítás. Tekintsük az egész számok $\{\dots a - 2b, a - b, a, a + b, a + 2b, \dots\}$ halmazát és válasszuk ki közülük a legkisebb természetes számot vagy a nullát. Legyen ez a szám az $a - qb$, és jelöljük r -rel. Ekkor

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b, \quad (2.1)$$

mert az $r \geq b$ esetben az $a - qb$ számnál kisebb $a - (q + 1)b$ szám is természetes szám lenne vagy nulla. Ezzel beláttuk a q és r számok létezését. Mutassuk meg ezeknek a számoknak az egyértelműségét is. Tegyük fel, hogy van még egy olyan (q_1, r_1) számpár, hogy $a = bq_1 + r_1, 0 \leq r_1 < b$. Kivonva ezt az egyenlőséget a (2.1) egyenlőségből adódik, hogy $0 = b(q - q_1) + (r - r_1)$, vagyis $b|r - r_1|$. $|r - r_1| < b$ miatt adódik, hogy $r - r_1 = 0$, azaz $r = r_1$, amiből $q = q_1$ is következik. \diamond

2.6. Példa. $7 = 2 \cdot 3 + 1$, ezért 3 a 7 2-vel való osztásának hányadosa, 1 a maradék, $-17 = 5 \cdot (-4) + 3$ alapján -4 a -17 5-tel való osztásának hányadosa, 3 a maradék.

FELADATOK.

Bizonyítsuk be matematikai indukcióval az alábbi oszthatóságokat.

1. $5|2^{4n+1} + 3$.

Megoldás. 1^o Igazoljuk az állítást $n = 1$ -re.

$2^{4 \cdot 1 + 1} + 3 = 2^5 + 3 = 32 + 3 = 35 = 5 \cdot 7$, vagyis az oszthatóság $n = 1$ -re igaz.

2^o Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$ -ra, azaz feltesszük, hogy van olyan ℓ egész szám, hogy $2^{4k+1} + 3 = 5\ell$.

3^o Igazoljuk most az állítást $n = k + 1$ -re.

Most azt kell belátnunk, hogy a $2^{4(k+1)+1} + 3$ kifejezés is osztható 5-tel. Ekkor

$$\begin{aligned} 2^{4(k+1)+1} + 3 &= 2^4 \cdot 2^{4k+1} + 3 = 16 \cdot 2^{4k+1} + 1 \cdot 3 = 16 \cdot 2^{4k+1} + (16 - 15) \cdot 3 = \\ &= 16 \cdot 2^{4k+1} + 16 \cdot 3 - 15 \cdot 3 = 16(2^{4k+1} + 3) - 15 \cdot 3 = 16 \cdot 5\ell - 15 \cdot 3 = 5(16\ell - 9), \end{aligned}$$

vagyis az oszthatóság igaz $n = k + 1$ -re, ezért minden természetes számra teljesül.

2. $7|2^{n+1} + 3^{2n-1}$.

Megoldás. 1^o Igazoljuk az állítást $n = 1$ -re.

$2^{1+1} + 3^{2 \cdot 1 - 1} = 2^2 + 3^1 = 4 + 3 = 7 = 7 \cdot 1$, vagyis az oszthatóság $n = 1$ -re igaz.

2^o Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$ -ra, azaz feltesszük, hogy van olyan ℓ egész szám, hogy $2^{k+1} + 3^{2k-1} = 7\ell$.

3^o Igazoljuk most az állítást $n = k + 1$ -re.

Most azt kell belátnunk, hogy a $2^{k+2} + 3^{2k+1}$ kifejezés is osztható 7-tel. Ekkor

$$\begin{aligned} 2^{k+2} + 3^{2k+1} &= 2 \cdot 2^{k+1} + 3^2 \cdot 3^{2k-1} = (9 - 7) \cdot 2^{k+1} + 9 \cdot 3^{2k-1} = \\ &= 9(2^{k+1} + 3^{2k-1}) - 7 \cdot 2^{k+1} = 9 \cdot 7\ell - 7 \cdot 2^{k+1} = 7(9\ell - 2^{k+1}), \end{aligned}$$

vagyis az oszthatóság igaz $n = k + 1$ -re, ezért minden természetes számra igaz.

3. $7|5 \cdot 9^{n-1} + 2^{4n-3}$.

Megoldás. 1^o Igazoljuk az állítást $n = 1$ -re.

$5 \cdot 9^{1-1} + 2^{4 \cdot 1 - 3} = 5 \cdot 9^0 + 2^1 = 5 \cdot 1 + 2 = 7 = 7 \cdot 1$, vagyis az oszthatóság teljesül.

2^o Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$ -ra, azaz feltesszük, hogy van olyan ℓ egész szám, hogy $5 \cdot 9^{k-1} + 2^{4k-3} = 7\ell$.

3^o Igazoljuk most az állítást $n = k + 1$ -re. Ekkor

$$\begin{aligned} 5 \cdot 9^k + 2^{4k+1} &= 5 \cdot 9 \cdot 9^{k-1} + 2^4 \cdot 2^{4k-3} = 9 \cdot 5 \cdot 9^{k-1} + (9 + 7) \cdot 2^{4k-3} = \\ &= 9(5 \cdot 9^{k-1} + 2^{4k-3}) + 7 \cdot 2^{4k-3} = 9 \cdot 7\ell + 7 \cdot 2^{4k-3} = 7(9\ell + 2^{4k-3}), \end{aligned}$$

vagyis az oszthatóság igaz $n = k + 1$ -re, ezért minden természetes számra igaz.

4. $9|7^n + 3n - 1$.

Megoldás. 1° Igazoljuk az állítást $n = 1$ -re.

$7^1 + 3 \cdot 1 - 1 = 7 + 3 - 1 = 9 = 9 \cdot 1$, vagyis az oszthatóság teljesül.

2° Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$ -ra, azaz feltesszük, hogy van olyan ℓ egész szám, hogy $7^k + 3k - 1 = 9\ell$.

3° Igazoljuk most az állítást $n = k + 1$ -re. Ekkor

$$\begin{aligned} 7^{k+1} + 3(k+1) - 1 &= 7 \cdot 7^k + 3k + 3 - 1 = 7 \cdot 7^k + 1 \cdot 3k + 3 + 1 \cdot (-1) = \\ &= 7(7^k + 3k - 1) - 18k + 9 = 7 \cdot 9\ell - 18k + 9 = 9(7\ell - 2k + 1), \end{aligned}$$

vagyis az oszthatóság igaz $n = k + 1$ -re, ezért minden természetes számra teljesül.

5. $9|3 \cdot 4^{n+2} + 10^n - 4$.

Megoldás. 1° Igazoljuk az állítást $n = 1$ -re.

$3 \cdot 4^{1+2} + 10^1 - 4 = 3 \cdot 64 + 10 - 4 = 198 = 9 \cdot 22$, vagyis az oszthatóság teljesül.

2° Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$ -ra, azaz feltesszük, hogy van olyan ℓ egész szám, hogy $3 \cdot 4^{k+2} + 10^k - 4 = 9\ell$.

3° Igazoljuk most az állítást $n = k + 1$ -re. Ekkor

$$\begin{aligned} 3 \cdot 4^{k+3} + 10^{k+1} - 4 &= 4 \cdot 3 \cdot 4^{k+2} + 10 \cdot 10^k - 4 = 10(3 \cdot 4^{k+2} + 10^k - 4) - 6 \cdot 3 \cdot 4^{k+2} + 36 = \\ &= 10 \cdot 9\ell - 18 \cdot 4^{k+2} + 36 = 9(10\ell - 2 \cdot 4^{k+2} + 4), \end{aligned}$$

vagyis az oszthatóság igaz $n = k + 1$ -re, ezért minden természetes számra teljesül.

6. $17|7 \cdot 5^{2n-1} + 2^{3n+1}$.

Megoldás. 1° Igazoljuk az állítást $n = 1$ -re.

$7 \cdot 5^{2 \cdot 1 - 1} + 2^{3 \cdot 1 + 1} = 7 \cdot 5 + 2^4 = 35 + 16 = 51 = 17 \cdot 3$, vagyis az oszthatóság teljesül.

2° Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$ -ra, azaz feltesszük, hogy van olyan ℓ egész szám, hogy $7 \cdot 5^{2k-1} + 2^{3k+1} = 17\ell$.

3° Igazoljuk most az állítást $n = k + 1$ -re. Ekkor

$$\begin{aligned} 7 \cdot 5^{2k+1} + 2^{3k+4} &= 5^2 \cdot 7 \cdot 5^{2k-1} + 2^3 \cdot 2^{3k+1} = 25 \cdot 7 \cdot 5^{2k-1} + 8 \cdot 2^{3k+1} = \\ &= 25(7 \cdot 5^{2k-1} + 2^{3k+1}) - 17 \cdot 2^{3k+1} = 25 \cdot 17\ell - 17 \cdot 2^{3k+1} = 17(25\ell - 2^{3k+1}), \end{aligned}$$

vagyis az oszthatóság igaz $n = k + 1$ -re, ezért minden természetes számra teljesül.

7. $17|6^{2n} + 19^n - 2^{n+1}$.

Megoldás. 1° Igazoljuk az állítást $n = 1$ -re.

$6^{2 \cdot 1} + 19^1 - 2^{1+1} = 6^2 + 19 - 2^2 = 36 + 19 - 4 = 51 = 17 \cdot 3$, vagyis az oszthatóság teljesül.

2° Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$ -ra, azaz feltesszük, hogy van olyan ℓ egész szám, hogy $6^{2k} + 19^k - 2^{k+1} = 17\ell$.

3° Igazoljuk most az állítást $n = k + 1$ -re. Ekkor

$$\begin{aligned} 6^{2k+2} + 19^{k+1} - 2^{k+2} &= 6^2 \cdot 6^{2k} + 19 \cdot 19^k - 2 \cdot 2^{k+1} = 36 \cdot 6^{2k} + 19 \cdot 19^k - 2 \cdot 2^{k+1} = \\ &= 36(6^{2k} + 19^k - 2^{k+1}) - 17 \cdot 19^k + 34 \cdot 2^{k+1} = 17(36\ell - 19^k + 2 \cdot 2^{k+1}), \end{aligned}$$

vagyis az oszthatóság igaz $n = k + 1$ -re, ezért minden természetes számra teljesül.

8. $19 \mid 5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$.

Megoldás. 1^o Igazoljuk az állítást $n = 1$ -re.

$5 \cdot 2^{3 \cdot 1 - 2} + 3^{3 \cdot 1 - 1} = 5 \cdot 2 + 3^2 = 10 + 9 = 19 = 19 \cdot 3$, vagyis az oszthatóság teljesül.

2^o Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$ -ra, azaz feltesszük, hogy van olyan ℓ egész szám, hogy $5 \cdot 2^{3k-2} + 3^{3k-1} = 19\ell$.

3^o Igazoljuk most az állítást $n = k + 1$ -re. Ekkor

$$\begin{aligned} 5 \cdot 2^{3k+1} + 3^{3k+2} &= 5 \cdot 2^3 \cdot 2^{3k-2} + 3^3 \cdot 3^{3k-1} = 8 \cdot 5 \cdot 2^{3k-2} + 27 \cdot 3^{3k-1} = \\ &= 27 (5 \cdot 2^{3k-2} + 3^{3k-1}) - 19 \cdot 5 \cdot 2^{3k-2} = 19 (27\ell - 5 \cdot 2^{3k-2}), \end{aligned}$$

vagyis az oszthatóság igaz $n = k + 1$ -re, ezért minden természetes számra teljesül.

9. $19 \mid 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$.

Megoldás. 1^o Igazoljuk az állítást $n = 1$ -re.

$5^{2 \cdot 1 + 1} \cdot 2^{1+2} + 3^{1+2} \cdot 2^{2 \cdot 1 + 1} = 125 \cdot 8 + 27 \cdot 8 = 1216 = 19 \cdot 64$, vagyis teljesül.

2^o Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$ -ra, azaz feltesszük, hogy van olyan ℓ egész szám, hogy $5^{2k+1} \cdot 2^{k+2} + 3^{k+2} \cdot 2^{2k+1} = 19\ell$.

3^o Igazoljuk most az állítást $n = k + 1$ -re. Ekkor

$$\begin{aligned} 5^{2k+3} \cdot 2^{k+3} + 3^{k+3} \cdot 2^{2k+3} &= 50 \cdot 5^{2k+1} \cdot 2^{k+2} + 12 \cdot 3^{k+2} \cdot 2^{2k+1} = \\ &= 50 (5^{2k+1} \cdot 2^{k+2} + 3^{k+2} \cdot 2^{2k+1}) - 38 \cdot 3^{k+2} \cdot 2^{2k+1} = 19 (50\ell - 2 \cdot 3^{k+2} \cdot 2^{2k+1}), \end{aligned}$$

vagyis az oszthatóság igaz $n = k + 1$ -re, ezért minden természetes számra teljesül.

10. $59 \mid 5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1}$.

Megoldás. 1^o Igazoljuk az állítást $n = 1$ -re.

$5^{1+2} + 26 \cdot 5^1 + 8^{2 \cdot 1 + 1} = 125 + 130 + 512 = 767 = 59 \cdot 13$, vagyis az oszthatóság teljesül.

2^o Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$ -ra, azaz feltesszük, hogy van olyan ℓ egész szám, hogy $5^{k+2} + 26 \cdot 5^k + 8^{2k+1} = 59\ell$.

3^o Igazoljuk most az állítást $n = k + 1$ -re. Ekkor

$$\begin{aligned} 5^{k+3} + 26 \cdot 5^{k+1} + 8^{2k+3} &= 5 \cdot 5^{k+2} + 5 \cdot 26 \cdot 5^k + 64 \cdot 8^{2k+1} = \\ &= 64 (5^{k+2} + 26 \cdot 5^k + 8^{2k+1}) - 59 \cdot 5^{k+2} - 59 \cdot 26 \cdot 5^k = 59 (64\ell - 5^{k+2} - 26 \cdot 5^k), \end{aligned}$$

vagyis az oszthatóság igaz $n = k + 1$ -re, ezért minden természetes számra teljesül.

11. Bizonyítsuk be, hogy három egymást követő egész szám szorzata osztható 6-tal.

Megoldás. Legyen a három egymást követő természetes szám $n - 1$, n és $n + 1$. Mivel $6 = 2 \cdot 3$, ezért az $(n - 1)n(n + 1)$ kifejezés akkor osztható 6-tal, ha osztható 2-vel is és 3-mal is. Mivel minden második természetes szám páros, ezért három egymást követő természetes szám között van legalább egy páros, tehát a szorzat osztható 2-vel. Mivel minden harmadik természetes szám osztható hárommal, ezért három egymást követő természetes szám között biztosan van egy, amely osztható 3-mal, tehát a szorzat osztható 3-mal. Ezért a szorzat osztható 6-tal.

12. Bizonyítsuk be, hogy négy egymást követő egész szám szorzata osztható 24-gyel.

Megoldás. Legyen a négy egymást követő természetes szám n , $n+1$, $n+2$ és $n+3$. Mivel $24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$, ezért az $n(n+1)(n+2)(n+3)$ kifejezés akkor osztható 24-gyel, ha osztható 2-vel is, 3-mal is és 4-gyel is. Mivel minden második természetes szám páros és minden negyedik természetes szám osztható 4-gyel, ezért négy egymást követő természetes szám között biztosan van egy 4-gyel osztható szám és még egy páros, amely 4-gyel nem osztható, tehát a szorzat osztható 2-vel és 4-gyel, tehát 8-cal. Mivel minden harmadik természetes szám osztható hárommal, ezért négy egymást követő természetes szám között biztosan van egy, amely osztható 3-mal, tehát a szorzat osztható 3-mal. Ezért a szorzat osztható 24-gyel.

13. Igazoljuk, hogy ha n páratlan egész szám, akkor $n^2 - 1$ osztható 8-cal.

Megoldás. Ha n páratlan egész szám, akkor felírható $n = 2k + 1$ alakban, ahol $k \in \mathbf{Z}$. Ekkor $n^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k+1)$, ahonnan látható, hogy a kifejezés osztható 4-gyel, $k(k+1)$ pedig két egymást követő egész szám szorzata, tehát biztosan osztható 2-vel, hiszen minden második egész szám páros. Megállapíthatjuk tehát, hogy a kifejezés osztható 8-cal.

14. Igazoljuk, hogy ha $m \in \mathbf{N}$, akkor $m^5 - m$ osztható 30-cal.

Megoldás. Mivel

$$m^5 - m = m(m^4 - 1) = m(m^2 - 1)(m^2 + 1) = (m - 1)m(m + 1)(m^2 + 1),$$

és tudjuk, hogy az $(m-1)m(m+1)$ szorzat osztható 6-tal, már csak azt kell belátni, hogy a kifejezés osztható 5-tel is, hiszen $30 = 5 \cdot 6$. Ha az $m-1$, m és $m+1$ számok egyike sem osztható 5-tel, akkor $m = 5k \pm 2$ alakban írható fel. Ekkor

$$m^2 + 1 = (5k \pm 2)^2 + 1 = 25k^2 \pm 20k + 4 + 1 = 25k^2 \pm 20k + 5 = 5(5k^2 \pm 4k + 1),$$

tehát az $m^2 + 1$ kifejezés osztható 5-tel, $m^5 - m$ pedig osztható 30-cal.

15. Igazoljuk, hogy ha $m, n \in \mathbf{N}$, akkor $mn(m^4 - n^4)$ osztható 30-cal.

Megoldás. Mivel

$$mn(m^4 - n^4) = m^5n - mn^5 = m^5n - mn + mn - mn^5 = n(m^5 - m) - m(n^5 - n),$$

és tudjuk, hogy $m^5 - m$ osztható 30-cal minden $m \in \mathbf{N}$ esetén, ezért vannak olyan $k, \ell \in \mathbf{N}$ számok, hogy $m^5 - m = 30k$ és $n^5 - n = 30\ell$, tehát

$$mn(m^4 - n^4) = n \cdot 30k - m \cdot 30\ell = 30(nk - m\ell),$$

azaz $mn(m^4 - n^4)$ osztható 30-cal.

2.3.2. Legnagyobb közös osztó

A d egész szám az a és b egész számok közös osztója, ha $d|a$ és $d|b$ teljesül. Minden nullától különböző egész számnak véges számú osztója van. Ezzel összhangban értelmezzük a következő fogalmat.

2.2. Definíció. Az a és b egész számok közös osztói közül a legnagyobbat az a és b számok legnagyobb közös osztójának nevezzük, jelölése pedig $LKO(a, b)$ vagy csak (a, b) . Az a és b egész számokra azt mondjuk, hogy relatív prímek, ha $LKO(a, b) = 1$.

2.2. Tétel. Ha a és b szám az a és b egész számok legnagyobb közös osztója, akkor vannak olyan α és β egész számok, hogy $\alpha a + \beta b = d$.

Bizonyítás. Tekintsük az $\alpha a + \beta b$, $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$, alakú egész számok halmazát. Ebben a halmazban vannak pozitív és negatív számok is, valamint a nulla. Válasszuk ki ebből a halmazból a legkisebb pozitív egészet, és legyen ez a szám a $c = \alpha a + \beta b$. Igazoljuk, hogy $c|a$ és $c|b$. Tegyük fel, hogy c nem osztója a -nak. Ekkor vannak olyan q és r egész számok, hogy $a = cq + r$, $0 < r < c$. Ebből adódik $r = a - cq = a - q(\alpha a + \beta b) = (1 - \alpha q)a - \beta qb$, azaz az r szám pozitív, kisebb mint c , és az $\alpha a + \beta b$ alakú számok halmazába tartozik, ami ellentmond annak, hogy c a legkisebb ilyen pozitív szám, azaz $c|a$. Hasonlóan igazolható, hogy $c|b$, tehát c az a és b számok közös osztója.

Mutassuk most meg, hogy c az a és b számok legnagyobb közös osztója, azaz $c = d$. Mivel $d = LKO(a, b)$, felírhatjuk, hogy $a = pd$, $b = qd$, tehát $c = \alpha pd + \beta qd = d(\alpha p + \beta q)$. Ebből adódik, hogy $d|c$, ezért $d \leq c$. Mivel d a legnagyobb közös osztó, nem lehet $d < c$, tehát $d = c$, vagyis $d = \alpha a + \beta b$. \diamond

2.1. Következmény. Ha k pozitív egész szám, a és b pedig tetszőleges egész számok, akkor $LKO(k \cdot a, k \cdot b) = k \cdot LKO(a, b)$.

2.7. Példa. Tudjuk tehát, hogy relatív prímszámok legnagyobb közös osztója 1. Ezért $LKO(4, 6) = LKO(2 \cdot 2, 2 \cdot 3) = 2 \cdot LKO(2, 3) = 2 \cdot 1 = 2$, vagy $LKO(40, 45) = LKO(5 \cdot 8, 5 \cdot 9) = 5 \cdot LKO(8, 9) = 5 \cdot 1 = 5$, vagy $LKO(84, 245) = LKO(7 \cdot 12, 7 \cdot 35) = 7 \cdot LKO(12, 35) = 7 \cdot 1 = 7$.

2.2. Következmény. Ha a , b és q tetszőleges egész számok és $a = bq$, ahol b nemnegatív, akkor $LKO(a, b) = b$.

2.8. Példa. Mivel $12 = 3 \cdot 4 = 2 \cdot 6$, ezért $LKO(12, 4) = 4$, $LKO(12, 3) = 3$, valamint $LKO(12, 2) = 2$ és $LKO(12, 6) = 6$.

2.3. Tétel. Legyenek q és b relatív prímek. Ha $q|ab$, akkor $q|a$.

Fontos megjegyezni, hogy csupán a $q|ab$ feltételből, az $LKO(b, q) = 1$ feltétel nélkül, nem következik az állítás. Például, $6|4 \cdot 9$, de nem igaz, hogy $6|4$, és az sem, hogy $6|9$.

2.4. Tétel. Ha $a = bq + r$, akkor $LKO(a, b) = LKO(b, r)$.

Bizonyítás. Legyen d az a és b egész számok tetszőleges közös osztója. Ekkor az $a = bq + r$ relációból az következik, hogy d az r számnak is osztója, azaz d a b és r számoknak közös osztója. Hasonlóan, ha d a b és r számok tetszőleges közös osztója, akkor következik, hogy d az a és b számoknak is közös osztója. Ebből adódik, hogy az a és b , illetve b és r számok közös osztóinak halmaza egyenlő egymással, ezért megegyeznek ezen halmazok legnagyobb elemei is, azaz $LKO(a, b) = LKO(b, r)$. \diamond

2.3.3. Euklideszi algoritmus

Feltehetjük a kérdést: hogyan határozható meg az a és b egész számok legnagyobb közös osztója. Világos, hogy az oszthatóság kérdése nem függ a számok előjelétől, tehát tekinthetjük a -t és b -t természetes számoknak. A megfelelő maradékos osztások elvégzésével adódnak a következő egyenlőségek, amit Euklideszi algoritmusnak nevezünk:

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1, & 0 \leq r_1 < b, \\ b &= r_1q_2 + r_2, & 0 \leq r_2 < r_1, \\ r_1 &= r_2q_3 + r_3, & 0 \leq r_3 < r_2, \\ &\dots & \dots \\ r_{n-2} &= r_{n-1}q_n + r_n, & 0 \leq r_n < r_{n-1}, \\ r_{n-1} &= r_nq_{n+1}. \end{aligned}$$

Mivel az r_n pozitív egész számok szigorúan monoton csökkenő sorozatot alkotnak, ezért véges számú művelet elvégzése után az utolsó egyenlőséghez jutunk, ami két egymás után következő maradék oszthatóságát jelenti, azaz az algoritmus véges számú lépésben elvégezhető.

2.5. Tétel. *Az előző algoritmusban az utolsó nullától különböző r_n maradék adja az a és b számok legnagyobb közös osztóját.*

Bizonyítás. Felhasználva a 2.4. Tétel-t, igazak az alábbi egyenlőségek:

$$LKO(a, b) = LKO(b, r_1) = LKO(r_1, r_2) = \dots = LKO(r_{n-2}, r_{n-1}) = LKO(r_{n-1}, r_n).$$

Mivel $r_n | r_{n-1}$, ezért $LKO(r_{n-1}, r_n) = r_n$, azaz $LKO(a, b) = r_n$ adódik, amit igazolni akartunk. \diamond

2.9. Példa. Keressük meg euklideszi algoritmussal az $a = 918$ és $b = 252$ számok legnagyobb közös osztóját, majd írjuk fel a kapott számot $\alpha \cdot 918 + \beta \cdot 252$ alakban. Végezzük el az osztásokat egymás után. Ekkor $918 = 252 \cdot 3 + 162$, $252 = 162 \cdot 1 + 90$, $162 = 90 \cdot 1 + 72$, $90 = 72 \cdot 1 + 18$, $72 = 18 \cdot 4$. A számítások alapján a legnagyobb közös osztó $d = LKO(918, 252) = 18$. Írjuk most fel a kapott legnagyobb közös osztót $18 = \alpha \cdot 918 + \beta \cdot 252$ alakban a 2.2. Tétel alapján, azaz keressük meg a megfelelő α és β számokat, amelyekre igaz lesz az egyenlőség. Használjuk fel az előző számításokat úgy, hogy mindegyik egyenlőségből kifejezzük a maradékot, az utolsótól haladva visszafelé és behelyettesítünk. Ekkor

$$\begin{aligned} 18 &= 90 - 72 = 90 - (162 - 90) \\ &= 2 \cdot 90 - 162 = 2 \cdot (252 - 162) - 162 \\ &= 2 \cdot 252 - 3 \cdot 162 = 2 \cdot 252 - 3 \cdot (918 - 3 \cdot 252) \\ &= 11 \cdot 252 - 3 \cdot 918, \quad \text{azaz } \alpha = -3 \text{ és } \beta = 11. \end{aligned}$$

2.3. Definíció. *Az a_1, a_2, \dots, a_n számok legnagyobb közös osztójának nevezzük ezen számok közös osztóinak halmazából a legnagyobbat. Jelölése: $LKO(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Ha $LKO(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$ teljesül, akkor az a_1, a_2, \dots, a_n számok relatív prímek.*

Az a_1, a_2, \dots, a_n számok páronként relatív prímek, ha $LKO(a_i, a_j) = 1$ teljesül minden $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j$ esetén.

2.3.4. Legkisebb közös többszörös

2.4. Definíció. A nullától különböző a_1, a_2, \dots, a_n egész számok közös többszörösének nevezünk minden olyan számot, amely osztható az a_1, a_2, \dots, a_n számok mindegyikével. Az a_1, a_2, \dots, a_n számok legkisebb pozitív közös többszörösének nevezzük a pozitív közös többszörösök halmazából a legkisebbet (van ilyen!). Jelölése: $LKT(a_1, a_2, \dots, a_n)$ vagy $[a_1, a_2, \dots, a_n]$.

Két szám legnagyobb közös osztója és legkisebb közös többszöröse között fennálló viszonyt a következő tételben fogalmazzuk meg.

2.6. Tétel. Tetszőleges $a, b \in \mathbf{Z}$ esetén az $LKO(a, b)$ és $LKT(a, b)$ számok kielégítik az $LKO(a, b) \cdot LKT(a, b) = |ab|$ egyenlőséget. Ez azt jelenti, hogy relatív prímszámok legkisebb közös többszöröse egyenlő szorzatuk abszolút értékével.

Bizonyítás. Az általánosság csorbítása nélkül igazolhatjuk a fenti állítást csupán a természetes számokra. Legyen S az a és b számok tetszőleges közös többszöröse. Ekkor, $S = ak$. Mivel azonban $b|S$ érvényes, $\frac{ak}{b}$ egész szám kell legyen. Ha $LKO(a, b) = d$ és $a = \alpha d, b = \beta d$, akkor a következőket kapjuk:

$$\frac{ak}{b} = \frac{\alpha k}{\beta}, \quad LKO(\alpha, \beta) = 1.$$

Ekkor $k = \beta t = \frac{b}{d}t$, ahol t természetes szám. Ebből $S = \frac{ab}{d}t, t \in \mathbf{N}$. Másfelől, minden $\frac{ab}{d}t$ alakú szám az a és b számoknak többszöröse. Tehát, S az a és b számoknak akkor és csak akkor közös többszöröse, ha

$$S = \frac{ab}{d}t, \quad t \in \mathbf{N}.$$

A legkisebb ilyen s számot a $t = 1$ értékre kapjuk, vagyis $s = \frac{ab}{d}$, amit igazolni kellett. \diamond

2.10. Példa. Az $a = 12$ és $b = 18$ számok esetén a $LKO(a, b) = 6$. Ekkor

$$LKT(a, b) = \frac{ab}{LKO(a, b)} = \frac{12 \cdot 18}{6} = 36.$$

Az $a = 918$ és $b = 252$ számok esetén a $LKO(a, b) = 18$. Ekkor

$$LKT(a, b) = \frac{ab}{LKO(a, b)} = \frac{918 \cdot 252}{18} = 12852.$$

Az $a = 17$ és $b = 23$ számok esetén a $LKO(a, b) = 1$, azaz a számok relatív prímek. Ekkor

$$LKT(a, b) = \frac{ab}{LKO(a, b)} = \frac{17 \cdot 23}{1} = 17 \cdot 23 = 391.$$

2.3.5. Prímszámok

I.e. a VI. században Pitagorasz tanítványai, a pitagoreusok már ismerték a prímszám és az összetett szám fogalmát. Tekintsük most át ezeket a fogalmakat.

2.5. Definíció. *A $p > 0$ egész számot prímszámnak nevezzük, ha a p számnak nincs olyan d osztója, hogy $1 < d < p$. Ha egy $m > 1$ egész szám nem prímszám, akkor azt mondjuk rá, hogy összetett szám.*

Eratoszthenész szitája. A prímszámok megkeresésének egyik módszere Eratoszthenész szitájával történik. Felírjuk egy tetszőleges N természetes számig a természetes számokat és töröljük közülük a 2-vel oszthatókat, a 2 kivételével. Ezután a megmaradó számok közül a legkisebbel, a 3-mal megismételjük az eljárást: 3 kivételével töröljük a 3-mal oszthatókat. Most a megmaradó számok közül a legkisebb 5, ezzel ismételtük meg az eljárást, és így tovább mindaddig, amíg csak marad ilyen nem áthúzott szám. Az eljárásnak vége, ha áthúztunk minden \sqrt{N} -nél nem nagyobb összetett számot. A megmaradó számok éppen az N -től nem nagyobb prímszámok.

Erdős Pál (1913-1996) gyakran beszélt a KÖNYVRŐL, amelyben Isten matematikai tételek tökéletes bizonyításait őrzi. Erdős Pál szerint ebbe a KÖNYVBE belekerülne a következő Euklidésznek tulajdonított bizonyítás (*Elemek IX, 20*), amely azt mutatja meg, hogy a prímszámok sorozata nem ér véget.

2.7. Tétel (Euklidész-tétele). *Végtelen sok prímszám van. Más szóval, bármely prímszámtól van nagyobb prímszám.*

Bizonyítás. Legyen $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ prímszámok egy tetszőleges véges halmaza és tekintsük az $n = p_1 p_2 \dots p_k + 1$ számot. Legyen p n prímosztója. Ekkor p nem lehet egyenlő semelyik p_i -vel, $i = 1, 2, \dots, k$, ellenkező esetben ugyanis osztaná n -et és a $p_1 p_2 \dots p_k$ szorzatot és így az $n - p_1 p_2 \dots p_k = 1$ különbséget is, ami lehetetlen. Tehát egy véges $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ halmaz nem tartalmazhatja az összes prímszámot. \diamond

Habár a természetes számok halmazában végtelen sok prímszám van, a prímszámok közötti távolság tetszőlegesen nagy lehet. Azt sejtjük, hogy az ikerprímek (két olyan prímszám együttese, amelyek 2-vel térnek el egymástól) száma is végtelen, ami szerint a prímszámok elhelyezkedése igencsak szabálytalan. Érvényes a következő állítás.

2.8. Tétel. *Tetszőleges $k \in \mathbf{N}$ számra található k egymás után következő összetett szám.*

Bizonyítás. Tekintsük a következő számokat:

$$\begin{aligned} A_1 &= (k+1)k(k-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 + 2, \\ A_2 &= (k+1)k(k-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 + 3, \\ &\dots \\ A_k &= (k+1)k(k-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 + k + 1. \end{aligned}$$

Pontosan k darab egymást követő természetes számot írtunk fel, amelyek mindegyike összetett szám: A_1 osztható 2-vel, A_2 osztható 3-mal, ..., A_k pedig $k+1$ -gyel. \diamond

2.9. Tétel. *Ha p prímszám és $p|ab$, akkor $p|a$ vagy $p|b$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy p nem osztója a -nak. Ekkor p és a relatív prímszámok. Ekkor a 2.3. Tétel alapján érvényes, hogy $p|b$. \diamond

A következő állítást a *számelmélet alaptételének* nevezik.

2.10. Tétel. *Bármely, 1-nél nagyobb N természetes szám felírható prímszámok szorzataként, éspedig a sorrendtől eltekintve, egyértelműen.*

Bizonyítás. Azt a tényt, hogy minden egytől különböző N természetes szám felírható prímszámok szorzataként, indukcióval bizonyítjuk. $N = 2$ esetén, a 2 szám prímszám. Legyen $N \geq 0$ természetes szám. Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden N -től kisebb k természetes számra. Amennyiben N prímszám, az állítás érvényes. Ha N összetett szám, akkor felírható $N = k_1 \cdot k_2$ alakban, ahol k_1 és k_2 N -től kisebb számok, amelyek az indukciós feltevés alapján felírhatók prímszámok szorzataként, tehát az N szám is.

Mutassuk most meg ennek a prímtényezősz reprezentációnak az egyértelműségét. Tegyük fel, hogy az N számnak két ilyen prímtényezősz felírása létezik, például

$$N = p_1 p_2 \cdots p_k = q_1 q_2 \cdots q_\ell,$$

ahol $p_i, i = 1, 2, \dots, k$, és $q_j, j = 1, 2, \dots, \ell$, prímszámok. Vegyük az első reprezentáció egy tetszőleges prímtényezőjét, például p_i -t. Mivel a $q_1 q_2 \cdots q_\ell$ szorzat osztható kell legyen p_i -vel, ezért a Tétel 2.9. Tétel alapján legalább egy tényezője osztható kell legyen p_i -vel. Mivel a q_1, q_2, \dots, q_ℓ , számok prímek, ezért kell legyen egy olyan szám közöttük, hogy $q_j = p_i$. Hasonlóan láthatjuk be, hogy minden q_j számra van olyan szám a p_1, p_2, \dots, p_k számok között, hogy $p_i = q_j$, ami alapján az állítást beláttuk. \diamond

Ha egy 1-től nagyobb N természetes számot felírunk prímszámok szorzataként és az azonos tényezőket összegyűjtjük, akkor N -nek a következő típusú előállítását kapjuk:

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r},$$

ahol p_1, p_2, \dots, p_r páronként különböző pozitív prímszámok és $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ pozitív egész számok. A számelmélet alaptételéből következik, hogy N -nek ez az előállítása a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű. Ezt az előállítást az N szám *kanonikus vagy prímtényezősz alakjának* nevezzük.

Az a és b egész számok kanonikus alakjai segítségével könnyen felírhatjuk a két szám legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét. Ha ugyanis

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}, \quad b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k},$$

(ahol az α_i és β_j számok valamelyike nulla is lehet) akkor:

$$LKO(a, b) = p_1^{\min\{\alpha_1, \beta_1\}} p_2^{\min\{\alpha_2, \beta_2\}} \cdots p_k^{\min\{\alpha_k, \beta_k\}},$$

$$LKT(a, b) = p_1^{\max\{\alpha_1, \beta_1\}} p_2^{\max\{\alpha_2, \beta_2\}} \cdots p_k^{\max\{\alpha_k, \beta_k\}}.$$

2.11. Példa. Legyen $a = 12 = 2^2 \cdot 3$ és $b = 18 = 2 \cdot 3^2$. Ekkor

$$LKO(a, b) = 2 \cdot 3 = 6 \quad \text{és} \quad LKT(a, b) = 2^2 \cdot 3^2 = 36.$$

Legyen $a = 918 = 2 \cdot 3^3 \cdot 17$ és $b = 252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$. Ekkor

$$LKO(a, b) = 2 \cdot 3^2 = 18 \quad \text{és} \quad LKT(a, b) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 17 = 12852.$$

Legyen $a = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$ és $b = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^6 \cdot 13$. Ekkor

$$LKO(a, b) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \quad \text{és} \quad LKT(a, b) = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 13.$$

2.11. Tétel. *Ha két relatív prím szám szorzata négyzetszám, azaz $ab = c^2$, $(a, b) = 1$, akkor az a és b számok is négyzetszámok, vagyis $a = a_1^2$, $b = b_1^2$ valamely $a_1, b_1 \in \mathbf{N}$ esetén.*

Bizonyítás. Ahhoz, hogy egy szám négyzetszám legyen, szükséges és elégséges feltétel az, hogy kanonikus alakjában minden kitevő páros szám legyen. Mivel az a és b egymással relatív prímek, c^2 minden prímtényezőjének szerepelnie kell vagy az a vagy a b szám kanonikus felírásában, de nem mind a kettőben; ezért az a és b számok prímtényezői páros hatványkitevőn kell legyenek. \diamond

2.12. Tétel. *Legyen $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$ az a szám kanonikus alakja. Ekkor az a szám minden pozitív osztója a következő alakú szám:*

$$d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_n^{\beta_n}, \quad 0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1, \quad 0 \leq \beta_2 \leq \alpha_2, \quad \dots, \quad 0 \leq \beta_n \leq \alpha_n.$$

Az a szám pozitív osztóinak száma (beleszámítva az 1-et és magát az a számot is):

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_n + 1).$$

Bizonyítás. Az tétel első részének állítása nyilvánvaló, a második rész pedig a szorzási szabályból következik. \diamond

2.12. Példa. Legyen adott az $a = 12 = 2^2 \cdot 3$ szám kanonikus alakban. Mivel most $\alpha_1 = 2$ és $\alpha_2 = 1$, ezért a pozitív osztók száma $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) = (2 + 1)(1 + 1) = 3 \cdot 2 = 6$. Valóban, a pozitív osztóiból 6 darab van: $2^0 \cdot 3^0 = 1$, $2^1 \cdot 3^0 = 2$, $2^0 \cdot 3^1 = 3$, $2^1 \cdot 3^1 = 6$, $2^2 \cdot 3^0 = 4$ és $2^2 \cdot 3^1 = 12$.

2.13. Példa. Legyen adott a $b = 18 = 2^1 \cdot 3^2$ szám kanonikus alakban. Mivel most $\alpha_1 = 1$ és $\alpha_2 = 2$, ezért a pozitív osztók száma $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) = (1 + 1)(2 + 1) = 2 \cdot 3 = 6$. Valóban, b pozitív osztóiból 6 darab van: $2^0 \cdot 3^0 = 1$, $2^1 \cdot 3^0 = 2$, $2^0 \cdot 3^1 = 3$, $2^1 \cdot 3^1 = 6$, $2^0 \cdot 3^2 = 9$ és $2^1 \cdot 3^2 = 18$.

2.14. Példa. Legyen adott a $c = 918 = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 17^1$ szám kanonikus alakban. Mivel most $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 3$ és $\alpha_3 = 1$, ezért a pozitív osztók száma

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) = (1 + 1)(3 + 1)(1 + 1) = 2 \cdot 4 \cdot 2 = 16.$$

Valóban, c pozitív osztóiból 16 darab van: $2^0 \cdot 3^0 \cdot 17^0 = 1$, $2^1 \cdot 3^0 \cdot 17^0 = 2$, $2^0 \cdot 3^1 \cdot 17^0 = 3$, $2^1 \cdot 3^1 \cdot 17^0 = 6$, $2^0 \cdot 3^2 \cdot 17^0 = 9$, $2^0 \cdot 3^0 \cdot 17^1 = 17$, $2^1 \cdot 3^2 \cdot 17^0 = 18$, $2^0 \cdot 3^3 \cdot 17^0 = 27$, $2^1 \cdot 3^0 \cdot 17^1 = 34$, $2^0 \cdot 3^1 \cdot 17^1 = 51$, $2^1 \cdot 3^3 \cdot 17^0 = 54$, $2^1 \cdot 3^1 \cdot 17^1 = 102$, $2^0 \cdot 3^2 \cdot 17^1 = 153$, $2^1 \cdot 3^2 \cdot 17^1 = 306$, $2^0 \cdot 3^3 \cdot 17^1 = 459$ és $2^1 \cdot 3^3 \cdot 17^1 = 918$.

2.15. Példa. Legyen adott a $d = 252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$ szám kanonikus alakban. Mivel most $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 2$ és $\alpha_3 = 1$, ezért a pozitív osztók száma

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) = (2 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18.$$

Valóban, c pozitív osztóiból 18 darab van: $2^0 \cdot 3^0 \cdot 7^0 = 1$, $2^1 \cdot 3^0 \cdot 7^0 = 2$, $2^0 \cdot 3^1 \cdot 7^0 = 3$, $2^2 \cdot 3^0 \cdot 7^0 = 4$, $2^1 \cdot 3^1 \cdot 7^0 = 6$, $2^0 \cdot 3^0 \cdot 7^1 = 7$, $2^0 \cdot 3^2 \cdot 7^0 = 9$, $2^2 \cdot 3^1 \cdot 7^0 = 12$, $2^1 \cdot 3^0 \cdot 7^1 = 14$, $2^1 \cdot 3^2 \cdot 7^0 = 18$, $2^0 \cdot 3^1 \cdot 7^1 = 21$, $2^2 \cdot 3^0 \cdot 7^1 = 28$, $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^0 = 36$, $2^1 \cdot 3^1 \cdot 7^1 = 42$, $2^0 \cdot 3^2 \cdot 7^1 = 63$, $2^2 \cdot 3^1 \cdot 7^1 = 84$, $2^1 \cdot 3^2 \cdot 7^1 = 126$ és $2^1 \cdot 3^3 \cdot 7^1 = 252$.

2.6. Definíció. *Egy a természetes szám pozitív osztóinak számát $\tau(a)$ -val jelöljük.*

A következő táblázatban megadjuk a τ függvény első néhány értékét:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\tau(n)$	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6

FELADATOK.

1. Írjuk fel az a és b számok legnagyobb közös osztóját $a \cdot \alpha + b \cdot \beta$ alakban, ha
 a) $a = 93$ és $b = 81$, b) $a = 975$ és $b = 765$, c) $a = 6188$ és $b = 4709$.

Megoldás. a) Végezzük el az osztásokat. Ekkor $93 = 81 \cdot 1 + 12$, $81 = 12 \cdot 6 + 9$, $12 = 9 \cdot 1 + 3$, $9 = 3 \cdot 3$. A számítások alapján kapjuk, hogy a legnagyobb közös osztó $d = LKO(93, 81) = 3$. Írjuk fel a kapott legnagyobb közös osztót $3 = \alpha \cdot 93 + \beta \cdot 81$ alakban. Használjuk fel az előző számításokat úgy, hogy mindegyik egyenlőségből kifejezzük a maradékot, az utolsótól haladva visszafelé és behelyettesítünk. Ekkor

$$\begin{aligned} 3 &= 12 - 9 = 12 - (81 - 12 \cdot 6) \\ &= 7 \cdot 12 - 81 = 7 \cdot (93 - 81) - 81 \\ &= 7 \cdot 93 - 8 \cdot 81, \quad \text{azaz } \alpha = 7 \quad \text{és} \quad \beta = -8. \end{aligned}$$

b) Végezzük el az osztásokat. Ekkor $975 = 765 \cdot 1 + 210$, $765 = 210 \cdot 3 + 135$, $210 = 135 \cdot 1 + 75$, $135 = 75 \cdot 1 + 60$, $75 = 60 \cdot 1 + 15$, $60 = 15 \cdot 4$. A számítások alapján a legnagyobb közös osztó $d = LKO(975, 765) = 15$. Írjuk most fel a kapott legnagyobb közös osztót $15 = \alpha \cdot 975 + \beta \cdot 765$ alakban. Használjuk fel az előző számításokat. Ekkor

$$\begin{aligned} 15 &= 75 - 60 = 75 - (135 - 75 \cdot 1) \\ &= 2 \cdot 75 - 135 = 2 \cdot (210 - 135) - 135 \\ &= 2 \cdot 210 - 3 \cdot 135 = 2 \cdot 210 - 3 \cdot (765 - 210 \cdot 3) \\ &= 11 \cdot 210 - 3 \cdot 765 = 11 \cdot (975 - 765) - 3 \cdot 765 \\ &= 11 \cdot 975 - 14 \cdot 765, \quad \text{azaz } \alpha = 11 \quad \text{és} \quad \beta = -14. \end{aligned}$$

c) Végezzük el az osztásokat. Ekkor $6188 = 4709 \cdot 1 + 1479$, $4709 = 1479 \cdot 3 + 272$, $1479 = 272 \cdot 5 + 119$, $272 = 119 \cdot 2 + 34$, $119 = 34 \cdot 3 + 17$, $34 = 17 \cdot 2$. A számítások alapján a legnagyobb közös osztó $d = LKO(6188, 4709) = 17$. Írjuk most fel a kapott legnagyobb közös osztót $17 = \alpha \cdot 6188 + \beta \cdot 4709$ alakban. Használjuk fel az előző számításokat. Ekkor

$$\begin{aligned} 17 &= 119 - 3 \cdot 34 = 119 - 3 \cdot (272 - 119 \cdot 2) \\ &= -3 \cdot 272 + 7 \cdot 119 = -3 \cdot 272 + 7 \cdot (1479 - 272 \cdot 5) \\ &= -38 \cdot 272 + 7 \cdot 1479 = -38 \cdot (4709 - 3 \cdot 1479) + 7 \cdot 1479 \\ &= -38 \cdot 4709 + 121 \cdot 1479 = -38 \cdot 4709 + 121 \cdot (6188 - 4709) \\ &= 121 \cdot 6188 - 159 \cdot 4709, \quad \text{azaz } \alpha = 121 \quad \text{és} \quad \beta = -159. \end{aligned}$$

2. Igazoljuk, hogy minden 3-nál nagyobb prímszám felírható $6k+1$ vagy $6k+5$ alakban.

Megoldás. A 6-tal való osztás maradékai alapján a számok $6k$, $6k+1$, $6k+2$, $6k+3$, $6k+4$ vagy $6k+5$ alakban írhatók fel, ahol $k \in \mathbf{N}_0$. Mivel $6k$ osztható 6-tal, $6k+2 = 2(3k+1)$, tehát osztható 2-vel, $6k+3 = 3(2k+1)$, tehát osztható 3-mal és $6k+4 = 2(3k+2)$, tehát osztható 2-vel, ezért a 3-nál nagyobb prímszámokat $6k+1$ vagy $6k+5$ alakban írhatjuk fel.

3. Igazoljuk, hogy ha n páratlan szám, akkor $n^{12} - n^8 - n^4 + 1$ osztható 512-vel.

Megoldás. Ha n páratlan szám, akkor felírható, mint $n = 2k - 1$, $k \in \mathbf{N}$. Ekkor

$$\begin{aligned} n^{12} - n^8 - n^4 + 1 &= (n^4 - 1)(n^8 - 1) = (n^4 - 1)^2(n^4 + 1) = (n^2 - 1)^2(n^2 + 1)^2(n^4 + 1) = \\ &= (4k^2 - 4k)^2(4k^2 - 4k + 2)^2(16k^4 - 32k^3 + 24k^2 - 8k + 2) = \\ &= 2^7 (k(k - 1))^2 (2k^2 - 2k + 1)^2 (8k^4 - 16k^3 + 12k^2 - 4k + 1). \end{aligned}$$

A kapott kifejezés osztható 512-vel, mert $512 = 2^9$, $k(k + 1)$ osztható 2-vel, így $(k(k + 1))^2$ osztható 4-gyel.

4. Igazoljuk, hogy ha n 3-nál nagyobb prímszám, akkor $n^2 - 1$ osztható 24-gyel.

Megoldás. Az állítás igazolásához azt kell belátnunk, hogy ha n 3-nál nagyobb prímszám, akkor $n^2 - 1$ osztható 3-mal, hiszen $24 = 8 \cdot 3$ és a 8-val való oszthatóságot már az előző feladatban beláttuk. Mivel minden 3-nál nagyobb prímszám felírható $6k + 1$ vagy $6k + 5$ alakban, így $n = 6k + 1$ esetén $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1) = 6k(6k + 2)$, tehát osztható 3-mal. Ha $n = 6k + 5$, akkor $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1) = (6k + 4)(6k + 6) = 6(6k + 4)(k + 1)$, tehát ebben az esetben is osztható 3-mal.

5. Igazoljuk, hogy minden n természetes számra $n^3 + 5n$ osztható 6-tal.

Megoldás. Mivel

$$n^3 + 5n = n^3 - n + 6n = (n - 1)n(n + 1) + 6n$$

és tudjuk, hogy három egymást követő természetes szám szorzata osztható 6-tal, valamint hogy ha két szám osztható 6-tal, akkor az összegük is osztható 6-tal, így az adott kifejezés is osztható 6-tal.

6. Igazoljuk, hogy minden n természetes számra $(n^2 + 3n + 1)^2 - 1$ osztható 24-gyel.

Megoldás. Végezzük el a szükséges átalakításokat.

$$\begin{aligned} (n^2 + 3n + 1)^2 - 1 &= (n^2 + 3n + 1 - 1)(n^2 + 3n + 1 + 1) = \\ &= (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) = n(n + 1)(n + 2)(n + 3). \end{aligned}$$

Mivel négy egymást követő természetes szám szorzatát kaptuk, így mindig van közöttük legalább két páros, amelyek közül az egyik 4-gyel is osztható, mindig van közöttük legalább egy, amely 3-mal osztható. Mivel $24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$, ezzel az állítás igazolást nyert.

7. Igazoljuk, hogy minden n természetes számra $n^5 - 5n^3 + 4n$ osztható 120-szal.

Megoldás. Alakítsuk át az adott kifejezést:

$$\begin{aligned} n^5 - 5n^3 + 4n &= n(n^4 - 5n^2 + 4) = n(n^4 - 4n^2 + 4 - n^2) = n((n^2 - 2)^2 - n^2) = \\ &= n(n^2 - 2 - n)(n^2 - 2 + n) = n(n^2 - n - 2)(n^2 + n - 2) = \\ &= n(n + 1)(n - 2)(n - 1)(n + 2) = (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2). \end{aligned}$$

Mivel $120 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ és öt egymást követő természetes szám szorzatát kaptuk, így mindig van közöttük legalább két páros, amelyek közül az egyik 4-gyel is osztható, mindig van közöttük legalább egy, amely 3-mal osztható és legalább egy 5-tel osztható. Ez azt jelenti, hogy az adott kifejezés osztható 120-szal.

8. Igazoljuk, hogy minden n természetes számra $n^7 - n$ osztható 42-vel.

Megoldás. Végezzük el a szükséges átalakításokat:

$$\begin{aligned} n^7 - n &= n(n^6 - 1) = n(n^3 - 1)(n^3 + 1) = \\ &= (n - 1)n(n + 1)(n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1). \end{aligned}$$

Mivel három egymást követő természetes szám szorzata osztható 6-tal és $42 = 6 \cdot 7$, ezért azt kell még belátnunk, hogy az adott kifejezés 7-tel is osztható. Egy természetes szám $7k$, $7k \pm 1$, $7k \pm 2$ vagy $7k \pm 3$ alakú lehet. Vegyük sorba mindegyik esetet.

$n = 7k$, $n = 7k - 1$ vagy $n = 7k + 1$ esetén az állítás igaz. Nézzük meg az $n = 7k - 2$, $n = 7k + 2$, $n = 7k - 3$ és $n = 7k + 3$ eseteket sorban. Ha $n = 7k - 2$, akkor

$$n^2 - n + 1 = (7k - 2)^2 - 7k + 2 + 1 = 49k^2 - 35k + 7 = 7(7k^2 - 5k + 1),$$

ha $n = 7k + 2$, akkor

$$n^2 + n + 1 = (7k + 2)^2 + 7k + 2 + 1 = 49k^2 + 35k + 7 = 7(7k^2 + 5k + 1),$$

ha $n = 7k - 3$, akkor

$$n^2 + n + 1 = (7k - 3)^2 + 7k - 3 + 1 = 49k^2 - 35k + 7 = 7(7k^2 - 5k + 1),$$

ha $n = 7k + 3$, akkor

$$n^2 - n + 1 = (7k + 3)^2 - 7k - 3 + 1 = 49k^2 + 35k + 7 = 7(7k^2 + 5k + 1).$$

Ezzel az állítás igazolást nyert.

9. Igazoljuk, hogy $n^3 + 3n^2 - n - 3$ osztható 48-cal minden n páratlan természetes számra.

Megoldás. Először alakítsuk át az adott kifejezést:

$$n^3 + 3n^2 - n - 3 = n^2(n + 3) - (n + 3) = (n + 3)(n^2 - 1) = (n - 1)(n + 1)(n + 3).$$

Mivel n páratlan természetes szám, ezért felírhatjuk $n = 2k + 1$ alakban. Ekkor

$$(n - 1)(n + 1)(n + 3) = 2k(2k + 2)(2k + 4) = 8k(k + 1)(k + 2).$$

Mivel tudjuk, hogy három egymást követő természetes szám szorzata osztható 6-tal, így a kapott kifejezés osztható 48-cal.

10. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromjegyű természetes számot kétszer egymás mellé írunk, akkor az így kapott hatjegyű szám osztható 7-tel, 11-gyel, 13-mal.

Megoldás. Tekintsük az \overline{abcabc} alakú természetes számot, ahol a , b és c adott számjegyek. Ekkor

$$\overline{abcabc} = 100100a + 10010b + 1001c = 1001(100a + 10b + c).$$

Mivel $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, így az állítást igazoltuk.

11. Bizonyítsuk be, hogy csupán egyetlen olyan $2p + 1$ (p prímszám) alakú egész szám létezik, amely köbszám is.

Megoldás. Legyen $2n + 1$ olyan páratlan természetes szám, amelyre igaz, hogy $(2n + 1)^3 = 2p + 1$. Ekkor a következő ekvivalens átalakításokat kapjuk:

$$(2n + 1)^3 = 2p + 1 \iff 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 = 2p + 1 \iff n(4n^2 + 6n + 3) = p.$$

Mivel p prímszám, ezért az egyik osztója p -nek $n = 1$, s ekkor $p = 4 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 + 3 = 13$. Valóban, $2p + 1 = 2 \cdot 13 + 1 = 27 = 3^3$.

12. Igazoljuk, hogy $n > 1$ természetes szám esetén az $n^4 + 4$ szám összetett szám.

Megoldás. Végezzük el a következő átalakításokat:

$$\begin{aligned} n^4 + 4 &= n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = \\ &= (n^2 + 2 - 2n)(n^2 + 2 + 2n) = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2). \end{aligned}$$

13. Igazoljuk, hogy $n > 1$ természetes szám esetén $n^4 + n^2 + 1$ összetett szám.

Megoldás. Az egyszerűbb esetben

$$\begin{aligned} n^4 + n^2 + 1 &= n^4 + 2n^2 + 1 - n^2 = (n^2 + 1)^2 - n^2 = \\ &= (n^2 - 1 - n)(n^2 - 1 + n) = (n^2 - n - 1)(n^2 + n - 1). \end{aligned}$$

14. Igazoljuk, hogy $n > 1$ természetes szám esetén $n^{2^k} + n^{2^{k-1}} + 1$ összetett szám minden $k \geq 2$ természetes számra.

Megoldás. Ebben az általános esetben a következő átalakításokat kell elvégezni:

$$\begin{aligned} n^{2^k} + n^{2^{k-1}} + 1 &= n^{2 \cdot 2^{k-1}} + 2n^{2^{k-1}} + 1 - n^{2^{k-1}} = \left(n^{2^{k-1}} + 1\right)^2 - \left(n^{2^{k-2}}\right)^2 = \\ &= \left(n^{2^{k-1}} + 1 - n^{2^{k-2}}\right) \left(n^{2^{k-1}} + 1 + n^{2^{k-2}}\right) = \\ &= \left(n^{2^{k-1}} - n^{2^{k-2}} + 1\right) \left(n^{2^{k-1}} + n^{2^{k-2}} + 1\right). \end{aligned}$$

15. Hány pozitív egész osztója van a $10!$ számnak?

Megoldás. Írjuk fel a $10!$ számot prímtényezők szorzataként:

$$\begin{aligned} 10! &= 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = \\ &= (2 \cdot 5) \cdot 3^2 \cdot (2^3) \cdot 7 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7. \end{aligned}$$

Mivel most $\alpha_1 = 8$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = 2$ és $\alpha_4 = 1$ a prímtényezős felbontás kitevői, ezért a pozitív osztók száma

$$\tau(10!) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)(\alpha_4 + 1) = 9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 270.$$

2.4. Racionális számok halmaza

Az egyiptomi Rhind-papirusz tanúsága szerint Egyiptomban az i.e. 2000 körüli időkben már jól kialakult tízes számrendszer volt, melynek kialakulását a mezőgazdaság és a csillagászat szükségletei mozdították elő. A törtszámokat is ismerték és a velük való számolás igen érdekes módját alkalmazták. Minden törtet egységszámlálójú törtek összegére bontottak. A felbontásra táblázataik voltak. Ezek a felbontások kivívják csodálatunkat, de a törtekkel ilyen módon való számolás nagyon nehézkes lehetett. Ugyanabban az időben Mezopotámiában, ahol a csatornázás és építkezés bonyolult számítást kívánt, fejlett helyi értékes hatvanas számrendszert találunk, amely még elárulja az előző tízes számrendszer használatát, hiszen 1-től 60-ig a régebbi tízes számrendszer segítségével írták le a számjegyeket. Ennek emléke a mi óra, perc, másodperc mértékegység-rendszerünk is. Volt szorzótáblájuk, s a mi tizedes törtjeinkhez hasonló módon, a hatvanas helyi értékes számrendszerbe illő "hatvanados" törtekkel számoltak. Olyan természetesnek vesszük, hogy a nap 24 órából áll, mintha az istenek írták volna elő, pedig a sumérok találták ki ezt is. Ékírásos jeleket belevésték az agyagba, a táblát kemencében kiégették, ezzel olyan időtállóvá tették, hogy akár az idők végezetéig olvasható marad.

A pitagoreusok a számot az egységek halmazának tekintették és mesterségesen száműzték a számok közül a törteket, bár a gyakorlati emberek ezzel nem törődve nyugodtan számoltak azokkal. A pitagoreusi számelméletben a törtek helyét a számok aránya foglalta el. Az arány (logosz) fogalma együtt alakult ki a hangköz fogalmával és ugyanakkor keletkezett az aránypár fogalma is.

Az $\frac{m}{n}$ alakú törteket Kínában régóta ismerték, a velük való műveleteket, amelyeket számológéptáblán végeztek, nagyon részletesen kidolgozták. Erről olvashatunk a *Matematika kilenc könyvben* című értekezés II-VIII. könyvében. A tízes számrendszer Kínában a törtekre is kiterjedt, korábban jutottak el a tizedes törtekhez, mint bárhol a világon. Ez a decimális mértékrendszer kifejlődésével függött össze, hiszen már az i.e. II. században fejlett hosszsmértékrendszert használtak.

Matematikailag a tört számok bevezetését a következőképpen indokoljuk.

Tetszőleges a, b egész számok esetén az $a \cdot x = b$ egyenletnek nincs mindig \mathbf{Z} -beli megoldása. Felmerül az igény, hogy úgy bővítsük az egész számok halmazát a permanencia elve szerint, hogy a bővített halmazban az előző egyenletnek mindig legyen megoldása, vagyis a bővített halmazban bármely két elem osztása mindig elvégezhető legyen. Ezért bevezetjük a racionális számok halmazát. A

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N} \right\}$$

halmazt a racionális számok halmazának nevezzük, ahol az egyenlőség definíciója:

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow mq = np.$$

A \mathbf{Q} halmazban ismert módon értelmezzük a számok összeadását és szorzását:

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq}, \quad \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q}, \quad \frac{m}{n}, \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}.$$

A \mathbf{Q} halmazban az $a \cdot x = b$ egyenletnek mindig van megoldása: $x = b \cdot a^{-1}$, ahol

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \quad \text{az } a \text{ racionális szám reciprok értéke, } a \neq 0.$$

A racionális számok \mathbf{Q} halmazában a következő tulajdonságok érvényesek:

- Q1.** A \mathbf{Q} halmazban az összeadás *kommutatív*, azaz $x + y = y + x$, minden x, y racionális számra.
- Q2.** A \mathbf{Q} halmazban az összeadás *asszociatív*, azaz $(x + y) + z = x + (y + z)$, minden x, y, z racionális számra.
- Q3.** A \mathbf{Q} halmazban a 0 az összeadás *semleges eleme*, azaz $x + 0 = 0 + x = x$, minden x racionális számra.
- Q4.** A \mathbf{Q} halmaz minden eleméhez létezik \mathbf{Q} -beli *inverz elem*, azaz minden x racionális számra létezik $-x$ racionális szám úgy, hogy $(-x) + x = x + (-x) = 0$.
- Q5.** A \mathbf{Q} halmazban a szorzás *kommutatív*, azaz $x \cdot y = y \cdot x$, minden x, y racionális számra.
- Q6.** A \mathbf{Q} halmazban a szorzás *asszociatív*, azaz $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, minden x, y, z racionális számra.
- Q7.** A \mathbf{Q} halmazban az $1 \in \mathbf{Q}$ a szorzás *egységeleme*, azaz $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$, minden x racionális számra.
- Q8.** A $\mathbf{Q} \setminus \{0\}$ halmaz minden eleméhez létezik \mathbf{Q} -beli *szorzásra vonatkozó inverz elem*, azaz minden x racionális számra létezik x^{-1} racionális szám úgy, hogy $x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1$.
- Q9.** A \mathbf{Q} -ban érvényes a szorzás összeadásra vonatkozó *disztributív* tulajdonsága, azaz $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, minden x, y, z racionális számra.
- Q10.** A \leq reláció *reflexív*, azaz $x \leq x$ minden x racionális számra.
- Q11.** A \leq reláció *antiszimmetrikus*, azaz $x \leq y$ és $y \leq x$ esetén $x = y$ igaz, minden x, y racionális számra.
- Q12.** A \leq reláció *tranzitív*, azaz $x \leq y$ és $y \leq z$ esetén $x \leq z$ igaz, minden x, y, z racionális számra.
- Q13.** A \leq reláció *lineáris*, azaz $x \leq y$ vagy $y \leq x$, minden x, y racionális számra.
- Q14.** Az $x \leq y$ relációból következik, hogy $x + z \leq y + z$.
- Q15.** x és y nemnegatív racionális számok esetén $x \cdot y$ is nemnegatív.

A fenti tulajdonságok teljesülését úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a $(\mathbf{Q}, +, \cdot, \leq)$ struktúra rendezett számtestet alkot.

Az egész számokkal való műveleteket megkönnyíti, hogy felírjuk őket a tízes számrendszerben. A racionális számokat is felírhatjuk *tizedes tört* alakban:

$$\frac{m}{n} = a_k \cdot 10^k + \cdots a_1 \cdot 10 + a_0 + b_1 \cdot 10^{-1} + b_2 \cdot 10^{-2} + \cdots$$

Tudjuk, hogy bármely racionális szám felírható vagy véges tizedes tört vagy végtelen szakaszos tizedes tört alakban.

2.16. Példa. Például,

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0.5, \quad \frac{211}{100} = 2.11, \quad \frac{1642}{125} = \frac{13136}{1000} = 13.136, \quad \frac{1}{3} = 0.\overline{3} = 0.3333333 \dots$$

Az állítás fordítva is igaz. Minden tizedes tört vagy végtelen szakaszos tizedes tört felírható két egész szám hányadosaként.

2.17. Példa. Alakítsuk most át a $0.\overline{3}$ végtelen szakaszos tizedes törtet két egész szám hányadosává. Legyen $x = 0.\overline{3}$. Ekkor $10x = 3.\overline{3}$, azaz $10x = 3 + x$, ahonnan $9x = 3$, vagyis $x = 0.\overline{3} = \frac{1}{3}$.

2.7. Definíció. Egy $A \subset \mathbf{Q}$ számhalmaz *felülről* (*alulról*) *korlátos*, ha létezik olyan $K \in \mathbf{Q}$ ($k \in \mathbf{Q}$) szám, hogy ha $a \in A$, akkor $a \leq K$ ($k \leq a$). Ekkor K -t (k -t) az A halmaz egy *felső* (*alsó*) *korlátjának* nevezzük.

2.8. Definíció. Az $A \subset \mathbf{Q}$ számhalmaz *legkisebb felső* (*legnagyobb alsó*) *korlátját*, ha ilyen létezik, *felső* (*alsó*) *határnak* vagy *szuprémumnak* (*infimumnak*) nevezzük.
Jelölése:

$$\sup A = K \quad \text{és} \quad \inf A = k.$$

Felülről korlátos $A \subset \mathbf{Q}$ halmaz esetén mindig létezik olyan szám (a felső határ), amelynél nagyobb nincs a halmazban, azonban nála kisebb szám már van a halmazban. Alulról korlátos $A \subset \mathbf{Q}$ halmaz esetén mindig létezik olyan szám (az alsó határ), amelynél kisebb nincs a halmazban, azonban nála nagyobb szám már van a halmazban.

Itt hívjuk fel a figyelmet arra, hogy sem az alsó, sem a felső korlát, sem az alsó, illetve felső határ nem feltétlenül eleme az A halmaznak.

2.9. Definíció. Egy $A \subset \mathbf{Q}$ számhalmaz *korlátos*, ha *alulról és felülről is korlátos*.

2.18. Példa. Az $A = \{n \in \mathbf{N} \mid n > 5\}$ alulról korlátos halmaz, infimuma az 5 nincs benne az A halmazban, viszont az A halmaz felülről nem korlátos. A $B = \{r \in \mathbf{Q} \mid r \leq 2\}$ felülről korlátos halmaz, szuprémuma a 2 benne van a B halmazban, alulról pedig ez a halmaz nem korlátos. A $C = \{c \in \mathbf{Q} \mid 2 < c < 5\}$ egy korlátos halmaz, infimuma 2, szuprémuma pedig 5, egyik se nincs benne a C halmazban.

A racionális számokat szemléltethetjük a *számegyenesen*.

Jelöljünk ki két pontot. Egyiket 0-nak, másikat 1-nek nevezzük. Az általuk meghatározott szakasz hossza legyen 1. Így a pozitív és negatív számokat úgy ábrázoljuk, hogy 0-tól jobbra, illetve balra a megfelelő számú egységet felmérjük. Ha a tört nevezője n , akkor osszuk a $[0, 1]$ intervallumot n egyenlő részre, egy ilyen rész hossza $\frac{1}{n}$, és ezt mérjük fel megfelelő sokszor az előjele szerinti irányban.

Az eddigiekből az következik, hogy a racionális számok sűrűn helyezkednek el a számegyenesen, azaz bármilyen kis intervallumon van racionális szám. A racionális számok halmaza megszámlálhatóan végtelen, hiszen létesíthetünk kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést a természetes számok halmaza és az egész számok halmaza, majd az egész számok halmaza és a racionális számok halmaza között.

FELADATOK.

1. Írjuk fel az $\frac{1849}{8000}$ törtet tizedes törtként.

Megoldás.

$$\frac{1849}{8000} = \frac{1849}{2^6 \cdot 5^3} \cdot \frac{5^3}{5^3} = \frac{231125}{10^6} = 0.231125.$$

2. Írjuk fel a -2.1475 tizedes törtet két egész szám hányadosaként.

Megoldás.

$$-2.1475 = -\frac{21475}{10^4} = -\frac{5^2 \cdot 859}{2^4 \cdot 5^4} = -\frac{859}{400}.$$

3. Írjuk fel a $0.\overline{0216}$ végtelen szakaszos tizedes törtet két egész szám hányadosaként.

Megoldás. Legyen $x = 0.\overline{0216}$. Ekkor $10000x = 216.\overline{0216}$, vagyis $10000x = 216 + x$, ahonnan $9999x = 216$. Ebből

$$x = \frac{216}{9999} = \frac{24}{1111}.$$

4. a) Írjuk fel a $41.3\overline{12}$ végtelen szakaszos tizedes törtet két egész szám hányadosaként.

Megoldás. Legyen $x = 41.3\overline{12}$. Ekkor $10x = 413.\overline{12}$ és $1000x = 41312.\overline{12}$, ahonnan kivonás után $990x = 40899$ adódik. Ebből

$$x = \frac{40899}{990} = \frac{13633}{330}.$$

- b) Írjuk fel a $3.128\overline{23}$ végtelen szakaszos tizedes törtet két egész szám hányadosaként.

Megoldás. Legyen $x = 3.128\overline{23}$. Ekkor $1000x = 3128.\overline{23}$ és $100000x = 312823.\overline{23}$, ahonnan kivonás után $99000x = 309695$ adódik. Ebből

$$x = \frac{309695}{99000} = \frac{61939}{19800}.$$

- c) Írjuk fel a $62.0\overline{35}$ végtelen szakaszos tizedes törtet két egész szám hányadosaként.

Megoldás. Legyen $x = 62.0\overline{35}$. Ekkor $10x = 620.\overline{35}$ és $1000x = 62035.\overline{35}$, ahonnan kivonás után $990x = 61415$ adódik. Ebből

$$x = \frac{61415}{990} = \frac{12283}{198}.$$

5. Írjuk fel a $8.90\overline{714285}$ végtelen szakaszos tizedes törtet két egész szám hányadosaként.

Megoldás. Legyen $x = 8.90\overline{714285}$. Ekkor $100x = 890.\overline{714285}$, valamint

$$1000000000x = 890714285.\overline{714285},$$

ahonnan kivonás után $999999900x = 890713395$ adódik. Ebből

$$x = \frac{890713395}{999999900} = \frac{19793631}{2222220}.$$

2.5. Valós számok halmaza

2.5.1. Irracionális számok halmaza

Pitagorasz és tanítványai meg voltak győződve arról, hogy a teljes világegyetem megmagyarázható pozitív egész számokkal, illetve ezek arányával. Modern kifejezést használva, abból indultak ki, hogy minden hosszúság és terület mérőszáma racionális. Ez jelentette számukra a matematikai szépséget. Annak felfedezése, hogy e feltételezés tökéletesen elhibázott, olyan megrázkódtatást jelentett, amelyet a görög matematika sohasem tudott teljesen kiheverni. A felfedezést Hippiaszosznak, a pitagoreus iskola ifjú matematikusának tulajdonítják, aki megmutatta, hogy bármely négyzet átlója összemérhetetlen az oldalával - ezt mai terminológiával úgy fejeznénk ki, hogy amennyiben valamely négyzet oldalának mérőszáma racionális szám, akkor átlója nem lehet az. Hippiaszosz észrevétele a legendák szerint szörnyű indulatokat váltott ki mesteréből. Az irracionális viszony felfedezése ugyanis úgy megdöbbenetette a pitagoreusokat, hogy hosszú ideig titokban tartották. Amikor pedig éppen Hippiaszosz a titkot nyilvánosságra hozta, kizárták a pitagoreusok szövetségéből. Halálát hajótörés okozta. Egyes népszerű beszámolók szerint Hippiaszoszt társai vetették egy hajóról a tengerbe, hogy így akadályozzák meg a borzalmas hír elterjedését.

Az irracionális szám mint két össze nem mérhető távolság mérőszámának hányadosa, írásban először Bradwardine (1290?-1316) angol matematikusnál fordult elő. Az irracionális számok modern elméletét viszont csak a XIX. században fejtette ki Dedekind (1831-1916), támaszkodva az ókori Eudokszosz (i.e. 408-355) gondolataira. Végül aztán az irracionális számok meghatározását aritmetikai módon is megalkotta Cantor (1845-1918) és Weierstrass (1815-1897).

Az irracionális számokat matematikailag a következő módon vezethetjük be.

Belátható, hogy az $x^2 = 2$ egyenlet megoldásai nem írhatók fel olyan p és q számok hányadosaként, ahol $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}$. Tegyük fel, hogy ez megtehető, azaz $x = \frac{p}{q}$ és

$LKO(p, q) = 1$. Ekkor $\frac{p^2}{q^2} = 2$, ahonnan $2p^2 = q^2$. Ez azt jelenti, hogy $2|q$, vagyis $q = 2k$.

Most azt kapjuk, hogy $2p^2 = 4k^2$, vagyis $p^2 = 2k^2$, ahonnan következik, hogy $2|p$. Ez azt jelenti, hogy a p és q számok közül mindkettő osztható 2-vel, ami nem lehetséges, hiszen az volt a feltétel, hogy p és q relatív prímek. Az a feltételezés tehát, hogy az $x^2 = 2$ egyenlet megoldásai racionális számok, az nem igaz. Mivel $x^2 - 2 = 0$ ekvivalens az eredeti egyenlettel, ez pedig felírható $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$ alakban, megkapjuk, hogy a megoldások $x_1 = \sqrt{2}$ és $x_2 = -\sqrt{2}$. Az ilyen számokat *irracionális számoknak* nevezzük. Irracionális számok még: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, π ,...

A *számegyenes* egy olyan egyenes, amelyen a megjelölt A és B pontokhoz hozzárendeljük sorban a 0 és 1 számokat. Minden racionális számnak és minden irracionális számnak megfelel egy pont a számegyenesen, és fordítva, a számegyenes minden pontjához egyértelműen hozzárendelhető vagy egy racionális vagy egy irracionális szám.

A racionális és irracionális számok halmazának egyesítését *valós számok* halmazának nevezzük, jelölése \mathbf{R} . A valós számok szabatos, pontos matematikai fogalmának megalkotására csak a XIX. század második felében került sor. 1872-ben több olyan cikk jelent meg, amelyekben egymástól függetlenül több különböző felépítést adták meg a valós számok fogalmának, melyek mindegyike az akkor éppen friss tudományág, a halmazelmélet eszközeit használta fel, de kapcsolódott a matematika alkalmazásaihoz, a tapasztalathoz is.

2.5.2. Valós számok halmazának axiomatizálása

Az \mathbf{R} halmazban az összeadás és szorzás műveletére, valamint a \leq relációra érvényesek ugyanazok a tulajdonságok, mint a \mathbf{Q} halmazban. A valós számok \mathbf{R} halmazában értelmezettek a $+$ és \cdot (összeadás és szorzás) műveletek, valamint a \leq bináris reláció. Ha mindezeket a tulajdonságok axiómákként fogalmazzuk meg, akkor a valós számok axiómarendszerét kapjuk meg:

- R1.** Az \mathbf{R} halmazban az összeadás *kommutatív*, azaz
 $x + y = y + x$, minden x, y valós számra.
- R2.** Az \mathbf{R} halmazban az összeadás *asszociatív*, azaz
 $(x + y) + z = x + (y + z)$, minden x, y, z valós számra.
- R3.** Az \mathbf{R} halmazban a 0 az összeadás *semleges eleme*, azaz
 $x + 0 = 0 + x = x$, minden x valós számra.
- R4.** Az \mathbf{R} halmaz minden eleméhez létezik \mathbf{R} -beli *inverz elem*, azaz minden x valós számra létezik $-x$ valós szám úgy, hogy $(-x) + x = x + (-x) = 0$.
- R5.** Az \mathbf{R} halmazban a szorzás *kommutatív*, azaz
 $x \cdot y = y \cdot x$, minden x, y valós számra.
- R6.** Az \mathbf{R} halmazban a szorzás *asszociatív*, azaz
 $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, minden x, y, z valós számra.
- R7.** Az \mathbf{R} halmazban az $1 \in \mathbf{Q}$ a szorzás *egységeleme*, azaz
 $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$, minden x valós számra.
- R8.** Az $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ halmaz minden eleméhez létezik \mathbf{Q} -beli *szorzásra vonatkozó inverz elem*, azaz minden x valós számra létezik x^{-1} valós szám úgy, hogy
 $x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1$.
- R9.** Az \mathbf{R} -ben érvényes a szorzás összeadásra vonatkozó *disztributív* tulajdonsága, azaz
 $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, minden x, y, z valós számra.
- R10.** A \leq reláció *reflexív*, azaz $x \leq x$ minden x valós számra.
- R11.** A \leq reláció *antiszimmetrikus*, azaz $x \leq y$ és $y \leq x$ esetén $x = y$ igaz, minden x, y valós számra.
- R12.** A \leq reláció *transzitiv*, azaz $x \leq y$ és $y \leq z$ esetén $x \leq z$ igaz, minden x, y, z valós számra.
- R13.** A \leq reláció *lineáris*, azaz $x \leq y$ vagy $y \leq x$, minden x, y valós számra.
- R14.** $x \leq y$ relációból következik, hogy $x + z \leq y + z$.
- R15.** x és y nemnegatív valós számok esetén $x \cdot y$ is nemnegatív.
- R16.** Az \mathbf{R} halmaz minden nem üres, felülről korlátos részhalmazának van szuprémuma \mathbf{R} -ben.

A fenti tulajdonságok teljesülését ugyanúgy mint a \mathbf{Q} halmazban, megfogalmazhatjuk, hogy az $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq)$ struktúra rendezett számtestet alkot. Az **R16.** axiómát folytonossági axiómának is nevezzük.

2.5.3. Valós számokkal kapcsolatos fogalmak

A következőkben olyan fogalmakat ismertetünk, melyek a valós számokkal kapcsolatosak. Elsőként a valós számok abszolút értékének fogalmával foglalkozunk.

2.10. Definíció. Az a valós szám $|a|$ szimbólummal jelölt abszolút értékének nevezzük a következőképpen értelmezett nemnegatív valós számot:

$$|a| = \begin{cases} a, & a > 0; \\ 0, & a = 0; \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

Az abszolútérték megadott definíciója alapján könnyen igazolhatók a következő összefüggések tetszőlegesen választott a és b valós számokra:

$$|a| \geq 0, \quad |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0, \quad |-a| = |a|, \quad |-a| \leq a \leq |a|$$

$$|a| \leq \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon \leq a \leq \epsilon, \quad |a| < \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < a < \epsilon,$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \quad |a - b| \geq ||a| - |b||,$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0.$$

A valós számok és a számegyenes pontjai között fennálló kölcsönösen egyértelmű kapcsolat lehetővé teszi számunkra, hogy az alábbiakban valós számokról úgy beszéljünk mint a számegyenes pontjairól, és megfordítva a számegyenes pontjairól mint valós számokról.

2.11. Definíció. Legyen $x > 0$ és $n \in \mathbf{N}$. Az olyan egyértelműen meghatározott pozitív y számot, amelyre $y^n = x$, az x szám n -edik gyökének nevezzük. Jelölés: $y = \sqrt[n]{x}$.

2.12. Definíció. A számegyenes két pontjának, a -nak és b -nek $d(a, b)$ -vel jelölt távolságán a $d(a, b) = |a - b|$ számot értjük.

A valós számoknak az analízisben gyakran használt, a számegyenesen jól szemléltethető részhalmazai az *intervallumok*.

2.13. Definíció. Intervallumnak a következő feltételek valamelyikét kielégítő x valós számok halmazát nevezzük: $a < x < b$, $a \leq x \leq b$, $a \leq x < b$, $a < x \leq b$. Nevezetesen:

$$(a, b) = \{x | x \in \mathbf{R}, a < x < b\}, \quad [a, b] = \{x | x \in \mathbf{R}, a \leq x \leq b\},$$

$$[a, b) = \{x | x \in \mathbf{R}, a \leq x < b\}, \quad (a, b] = \{x | x \in \mathbf{R}, a < x \leq b\},$$

Az a és b pontokat végpontoknak, az intervallum többi pontját belső pontnak nevezzük.

A számegyenest bármely c valós szám két félegyenesre osztja. Az egyik félegyenes a c -nél nagyobb, a másik félegyenes a c -nél kisebb valós számok alkotják, valamint a c valós szám. Attól függően, hogy a c pontot is a félegyeneshez számítjuk, avagy nem, a valós számok négy részhalmazát kapjuk. Ezeket a halmazokat nevezzük *végtelen intervallumoknak*.

2.14. Definíció. Végtelen intervallumnak az $x > c$, $x < c$, $x \geq c$, $x \leq c$ feltételek valamelyikét kielégítő x valós számok halmazát nevezzük. Részletesebben:

$$(c, \infty) = \{x | x \in \mathbf{R}, x > c\}, \quad (-\infty, c) = \{x | x \in \mathbf{R}, x < c\},$$

$$[c, \infty) = \{x | x \in \mathbf{R}, x \geq c\}, \quad (-\infty, c] = \{x | x \in \mathbf{R}, x \leq c\}.$$

2.15. Definíció. Legyen x_0 tetszőleges valós, ε pedig tetszőleges pozitív valós szám. Ekkor az x_0 pont ε sugarú környezetén azon x pontok halmazát értjük, amelyeknek x_0 -tól való távolsága kisebb ε -nál, azaz

$$\{x \in \mathbf{R} | d(x, x_0) < \varepsilon\}.$$

Mivel $d(x, x_0) = |x - x_0| < \varepsilon$, így x_0 pont ε sugarú környezete az összes olyan x valós szám halmaza, amelyre

$$x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon,$$

azaz az $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ intervallum.

Előfordul, hogy valamely vizsgálatnál lényegtelen a környezet sugarának nagysága, csupán a környezet létezésének van jelentősége. Ilyenkor egyszerűen x_0 környezetéről beszélünk, a sugár említése nélkül.

Függvénytani vizsgálatoknál nagy szerepet játszanak az úgynevezett *féloldali környezetek* is, amelyek értelemszerűen félig nyílt intervallumok. Így x_0 *bal oldali környezetén* egy $(x_0 - \varepsilon, x_0]$ alakú, *jobb oldali környezetén* egy $[x_0, x_0 + \varepsilon)$ alakú intervallumot értünk.

Most pedig felsoroljuk a folytonossági axióma néhány következményét.

2.13. Tétel. Az \mathbf{R} halmaz minden nem üres, alulról korlátos részhalmazának van infimuma \mathbf{R} -ben.

2.14. Tétel. Tetszőleges a és b valós számokra található olyan n természetes szám, hogy $(n - 1)a \leq b \leq na$.

2.15. Tétel. Tetszőleges a pozitív szám és tetszőleges b valós szám esetén található olyan n természetes szám, hogy $(n - 1)a \leq b < na$.

2.16. Tétel. Tetszőleges b valós számra egyértelműen található olyan k egész szám, hogy $k \leq b < k + 1$.

2.16. Definíció. A tetszőleges b valós számra a fenti tételben egyértelműen előállított k egész számot a b szám egész részének nevezzük. Jelölése: $[b]$.

A valós számok fogalmának pontos kialakításához a halmazelméletre és a végtelen halmaz fogalmára is szükség van. Alapvető szerepe van itt olyan fogalmaknak, amelyeket a határérték fogalmával lehet meghatározni. A Cantor-axióma, vagy a monoton, korlátos sorozat konvergenciájára vonatkozó tulajdonság, amely a valós számok halmazának teljességét fejezi ki - szemben a racionális számok halmazával, ahol ezek a tulajdonságok nem igazak -, már igen magas foka a matematikai absztrakciónak, és ugyancsak távol áll a közvetlen tapasztalattól, szemlélettől. Ez a magasfokú absztrakció azonban a matematikai analízis fogalomalkotásainak olyan kiindulópontjává vált, amelyből azután éppen az alkalmazások számára fontos tudományágak fejlődtek ki.

FELADATOK.

1. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ irracionális szám.

Megoldás. Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, tehát $\sqrt{2} + \sqrt{3} = q \in \mathbf{Q}$. Ekkor $\sqrt{3} = q - \sqrt{2}$, majd négyzetre emeléssel $3 = q^2 - 2q\sqrt{2} + 2$, azaz $2q\sqrt{2} = q^2 - 1$, illetve $\sqrt{2} = \frac{q^2 - 1}{2q}$. Ez azt jelenti, hogy $\sqrt{2}$ két racionális szám hányadosa, ami nem igaz.

Mivel ellentmondásra jutottunk, ezért az az állítás, hogy $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ racionális szám, nem igaz, és ezzel az eredeti állítás bizonyítást nyert.

2. Bizonyítsuk be, hogy $r = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100} + \sqrt{99}}$ racionális szám.

Megoldás. Gyöktelenítsük a nevezőket. Ekkor a nevezőkben mindenhol 1-et kapunk és

$$r = \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \dots + \sqrt{100} - \sqrt{99} = \sqrt{100} - \sqrt{1} = 10 - 1 = 9,$$

amit bizonyítani akartunk.

3. Bizonyítsuk be, hogy $r = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}$ racionális szám.

Megoldás. Alakítsuk át a gyök alatti kifejezéseket:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{6 - 4\sqrt{2}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2} + \sqrt{4 - 4\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2} = \\ &= \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2} + \sqrt{(2 - \sqrt{2})^2} = 1 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 3. \end{aligned}$$

4. Bizonyítsuk be, hogy $r = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - 2\sqrt{6}$ racionális szám.

Megoldás.

$$\begin{aligned} r &= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - 2\sqrt{6} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} - 2\sqrt{6} = \\ &= 3 + 2\sqrt{3}\sqrt{2} + 2 - 2\sqrt{6} = 5 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{6} = 5. \end{aligned}$$

5. Igazoljuk, hogy $\sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}$ irracionális szám.

Megoldás. $9 + 4\sqrt{2} = (1 + 2\sqrt{2})^2$ miatt $\sqrt{9 + 4\sqrt{2}} = 1 + 2\sqrt{2}$. Hasonlóan belátható, hogy

$$\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}} = \sqrt{2 + 1 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2} = 1 + \sqrt{2}.$$

Behelyettesítve ezt a számot az eredeti számkifejezésbe kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}} &= \sqrt{13 + 30(1 + \sqrt{2})} = \\ &= \sqrt{25 + 30\sqrt{2} + 18} = \sqrt{(5 + 3\sqrt{2})^2} = 5 + 3\sqrt{2}, \end{aligned}$$

vagyis a szám valóban irracionális.

2.6. Számelméleti alapfogalmak

2.6.1. A kongruencia fogalma

A kongruenciareláció bevezetése igen nagy segítséget jelent a számelméletben. Felhasználásukkal sok tétel, definíció, bizonyítás lényegesen egyszerűbben fogalmazható meg.

2.17. Definíció. Legyen m 1-től nagyobb természetes szám. Az a és b egész számok kongruensek modulo m , ha m -mel osztva ugyanazt a maradékot adják. Jelölése:

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Ha a fenti kongruencia nem teljesül, akkor azt mondjuk, hogy a inkongruens b -vel modulo m .

Könnyen igazolható, hogy a kongruenciareláció rendelkezik az alábbi alaptulajdonságokkal:

- 1° $a \equiv b \pmod{m}$ akkor és csakis akkor, ha $a = mt + b$ valamilyen t egész számra.
- 2° $a \equiv b \pmod{m}$ akkor és csakis akkor, ha $a - b$ osztható m -mel.
- 3° Az egész számok halmazában a kongruenciareláció ekvivalenciareláció.

2.17. Tétel. 1° Ha $a \equiv b \pmod{m}$ és $c \equiv d \pmod{m}$, akkor

$$ax + cy \equiv bx + dy \pmod{m} \quad \text{minden } x, y \text{ egész számra.}$$

2° Ha $a \equiv b \pmod{m}$ és $c \equiv d \pmod{m}$, akkor $ac \equiv bd \pmod{m}$.

3° Ha $a \equiv b \pmod{m}$ és $m = \alpha d$, $d > 1$, akkor $a \equiv b \pmod{d}$.

4° Legyen $P(x)$ x ismeretlenes egész együtthatós polinom; ha $a \equiv b \pmod{m}$, akkor $P(a) \equiv P(b) \pmod{m}$.

Bizonyítás. Illusztrációként belátjuk a 2° tulajdonságot. Az $a \equiv b \pmod{m}$ állításból következik, hogy $a = b + km$, valamilyen $k \in \mathbf{Z}$ számra, a $c \equiv d \pmod{m}$ állításból pedig az, hogy $c = d + \ell m$ valamilyen $\ell \in \mathbf{Z}$ számra. Szorzással kapjuk meg, hogy $ac = bd + (kd + \ell b + k\ell m)m$, ami pontosan az $ac \equiv bd \pmod{m}$ állítást jelenti. \diamond

2.18. Tétel. 1° Ha $LKO(a, m) = 1$ és $ax \equiv ay \pmod{m}$, akkor $x \equiv y \pmod{m}$.

2° $ax \equiv ay \pmod{m}$ akkor és csakis akkor, ha $x \equiv y \pmod{\frac{m}{LKO(a, m)}}$.

3° $x \equiv y \pmod{a}$ és $x \equiv y \pmod{b}$ akkor és csakis akkor, ha $x \equiv y \pmod{LKT(a, b)}$.

Bizonyítás. 1° Ha $ax \equiv ay \pmod{m}$, akkor $a(x - y) = km$. Mivel $(a, m) = 1$, a 2.3. Tétel alapján $x - y = \alpha m$, vagyis $x \equiv y \pmod{m}$.

2° az 1° általánosítása és hasonlóképpen bizonyítható.

3° Ha $x \equiv y \pmod{a}$ és $x \equiv y \pmod{b}$, akkor $x - y = \alpha a$ és $x - y = \beta b$, vagyis $x - y$ az a és b számok közös többszöröse és ennek alapján $x - y = \gamma LKT(a, b)$. Ebből következik: $x \equiv y \pmod{LKT(a, b)}$. A fordított irány az előző tétel 3°-as pontjából adódik. \diamond

2.6.2. Maradékosztályok

Rögzítsünk egy m természetes számot, és csoportosítsuk az egész számok összességét úgy, hogy az ugyanabba a csoportba sorolt egész számok egymással páronként kongruensek legyenek modulo m (más szóval: csoportosítsuk az egész számokat aszerint, hogy m -mel osztva mennyi maradékot adnak). Az így keletkező csoportokat maradékosztályoknak - pontosabban modulo m maradékosztályoknak - nevezzük. Valamely maradékosztályt úgy jellemezhetünk, hogy megadjuk egy r elemét. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a szóban forgó maradékosztályt r által reprezentáljuk, és r -et e maradékosztály reprezentánsának nevezzük.

Ha bizonyos a_1, a_2, \dots, a_k egész számok olyan tulajdonságúak, hogy páronként különböző maradékosztályokat reprezentálnak, másrészt minden modulo m maradékosztályt reprezentál e számok valamelyike, akkor az a_1, a_2, \dots, a_k számokról azt mondjuk, hogy azok *teljes maradékrendszert alkotnak modulo m* . Egy teljes maradékrendszer elemeinek száma nyilván azonos a modulo m maradékosztályok számával. Másrészt könnyen ellenőrizhető, hogy az $1, 2, \dots, m$ számok teljes maradékrendszert alkotnak modulo m ; így a modulo m maradékosztályok száma m . Megállapíthatjuk a következőket: *Bizonyos egész számok akkor és csak akkor alkotnak teljes maradékrendszert modulo m , ha páronként inkongruensek modulo m és számuk m .*

Két modulo m maradékrendszerrel különösen gyakran találkozunk: az egyik a $0, 1, 2, \dots, m-1$ számok, vagyis a *legkisebb nemnegatív maradékok*, a másik az

$$\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - m + 1, \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - m + 2, \dots, -1, 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$$

számok, vagyis az *abszolút legkisebb maradékok által alkotott teljes maradékrendszer*.

Ha egy modulo m maradékosztály valamelyik eleme relatív prím m -hez, akkor a maradékosztály valamennyi eleme relatív prím m -hez. Ha egy maradékosztály elemei relatív prímekek a modulushoz, akkor a maradékosztályt *redukált maradékosztálynak* nevezzük.

A modulo m redukált maradékosztályok számát $\varphi(m)$ -mel szokás jelölni, és $\varphi(1)$ értéke legyen definíció szerint 1. Az így definiált $\varphi(n)$ számelméleti függvényt *Euler-féle φ függvénynek* nevezzük. Könnyen belátható, hogy a φ függvénynek ez a definíciója ekvivalens az alábbival:

2.18. Definíció. *Legyen n tetszőleges természetes szám. Az n -hez relatív prím, n -nél nem nagyobb pozitív egész számok számát $\varphi(n)$ -nel jelöljük.*

A következő táblázatban megadjuk a φ függvény első néhány értékét:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\varphi(n)$	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4

A φ függvény kiszámítására (bizonyítás nélkül) megadjuk a következő képletet:

ha $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$ az n természetes szám kanonikus alakja, akkor

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

2.19. Tétel. Ha $LKO(a, m) = 1$ és $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ egy tetszőleges teljes maradékosztály modulo m , akkor $\{a\alpha_1, a\alpha_2, \dots, a\alpha_k\}$ szintén teljes maradékosztály modulo m .

Bizonyítás. Ugyanannyi $a\alpha_i$ szám van, amennyi α_i . Azt kell belátni, hogy az $a\alpha_i$ és $a\alpha_j$ számok $i \neq j$ esetén különböző teljes maradékosztályokba tartoznak. Ha igaz lenne, hogy $a\alpha_i \equiv a\alpha_j \pmod{m}$, akkor $LKO(a, m) = 1$ miatt a 2.18. Tételből azt kapjuk, hogy $\alpha_i \equiv \alpha_j \pmod{m}$, ami lehetetlen. Redukált maradékosztály esetén, ha $LKO(\alpha_i, m) = 1$, $i = 1, 2, \dots, k$, akkor $LKO(a\alpha_i, m) = 1$, $i = 1, 2, \dots, k$, is teljesül, tehát az $a\alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, k$, számok halmaza szintén redukált maradékosztályt alkot modulo m . \diamond

2.20. Tétel (Euler-tétel). Ha $(a, m) = 1$, akkor

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

Bizonyítás. Legyen $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\varphi(m)}\}$ redukált maradékosztály modulo m . Ekkor az előző tétel alapján $\{a\alpha_1, a\alpha_2, \dots, a\alpha_{\varphi(m)}\}$ is redukált maradékosztály modulo m . Ennek alapján minden α_i számhoz van olyan α_j szám, hogy $a\alpha_j \equiv \alpha_i \pmod{m}$. Ha összeszorozzuk az ilyen alakú kongruenciákat (pontosan $\varphi(m)$ van belőlük), adódik:

$$a^{\varphi(m)} \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{\varphi(m)} \equiv \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{\varphi(m)} \pmod{m}.$$

Mivel $(\alpha_i, m) = 1$, $i = 1, 2, \dots, \varphi(m)$, a 2.18. Tétel alapján el lehet végezni az egyszerűsítést, ezért $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$. \diamond

2.21. Tétel (Kis Fermat-tétel). Ha p prímszám és p nem osztója a -nak, akkor

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Bizonyítás. Mivel $(a, p) = 1$, ha p nem osztója a -nak és $\varphi(p) = p-1$ minden p prímszámmra, ezért az Euler-tétel speciális esetét kaptuk. \diamond

2.6.3. Számok adott modulo szerinti rendje

2.19. Definíció. Legyen m tetszőleges prímszám, a pedig p -hez relatív prím egész szám. A legkisebb olyan t természetes számot, amelyre

$$a^t \equiv 1 \pmod{m}$$

teljesül, az a szám rendjének nevezzük modulo m .

A 3-as szám rendje modulo 11 pontosan 5, mert $3^1, 3^2, 3^3, 3^4 \not\equiv 1 \pmod{11}$, viszont $3^5 \equiv 1 \pmod{11}$.

2.22. Tétel. Ha t az a szám rendje modulo m és $a^s \equiv 1 \pmod{m}$, akkor $t|s$. Speciális esetben, $t|\varphi(m)$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a tétel állítása nem igaz, vagyis $s = tq + r$, $0 < r < t$. Ekkor $a^s = (a^t)^q a^r$, vagyis $a^r \equiv 1 \pmod{m}$, ami ellentmond annak, hogy t az a szám rendje modulo m . \diamond

2.3. Következmény. *Ha t az a szám rendje modulo m , akkor*

$$a^x \equiv a^y \pmod{m} \quad \text{akkor és csak akkor, ha} \quad x \equiv y \pmod{t}.$$

Bizonyítás. Legyen például $x \geq y$. Ha $a^x \equiv a^y \pmod{m}$, akkor $(a, m) = 1$ miatt érvényes, hogy $a^{x-y} \equiv 1 \pmod{m}$, és az előző tétel alapján $t|x - y$. Fordítva, ha $x \equiv y \pmod{t}$, akkor $x = y + t\alpha$ $\alpha \geq 0$ és $a^x = a^{y+t\alpha} = a^y(a^t)^\alpha \equiv a^y \pmod{m}$. \diamond

2.23. Tétel (Wilson-tétel). *Ha p prímszám, akkor érvényes, hogy*

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

Bizonyítás. $p = 2$ esetén az állítás nyilvánvaló. Ha p kettőnél nagyobb prímszám, akkor a

$$(p-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-1)$$

szorzatban páros számú tényező van. Vegyük észre, hogy $1 \equiv 1 \pmod{p}$ és $p-1 \equiv -1 \pmod{p}$. A többi tényezőre érvényes az alábbi állítás:

Minden k , $2 \leq k \leq p-2$, számra található pontosan egy olyan ℓ , $2 \leq \ell \leq p-2$ egész szám, hogy

$$k\ell \equiv 1 \pmod{p}$$

és $\ell \neq k$. Valóban, tekintsük a

$$k, \quad 2k, \quad 3k, \quad \dots, \quad (p-1)k, \quad pk$$

számokat, amelyek teljes maradékosztályt alkotnak modulo p , tehát $0, 1, 2, \dots, p-1$ maradékokat adnak modulo p . Azonban, $k \equiv k \not\equiv 1 \pmod{p}$, $(p-1)k \equiv p-k \not\equiv 1 \pmod{p}$ és $pk \equiv 0 \pmod{p}$, tehát a $k\ell$, $\ell = 2, 3, \dots, p-2$ számok közül csak egy kongruens 1-gyel modulo p . Hogy $\ell = k$ nem lehet, azt a következő módon látjuk be: a $k^2 \equiv 1 \pmod{p}$ kongruencia ekvivalens $(k-1)(k+1) \equiv 0 \pmod{p}$ kongruenciával, ami szerint $k \equiv 1 \pmod{p}$ vagy $k \equiv -1 \pmod{p}$, de mind a kettőt kizárja a $2 \leq k \leq p-2$ feltétel. A tétel állítása a bizonyított eredmény közvetlen következménye. \diamond

FELADATOK

1. Határozzuk meg a 2^{30} szám 13-mal való osztásakor keletkezett maradékot.

Megoldás.

$$\begin{aligned} 2^1 &\equiv 2 \pmod{13}, & 2^5 &\equiv 6 \pmod{13}, & 2^9 &\equiv 5 \pmod{13}, \\ 2^2 &\equiv 4 \pmod{13}, & 2^6 &\equiv 12 \pmod{13}, & 2^{10} &\equiv 10 \pmod{13}, \\ 2^3 &\equiv 8 \pmod{13}, & 2^7 &\equiv 11 \pmod{13}, & 2^{11} &\equiv 7 \pmod{13}, \\ 2^4 &\equiv 3 \pmod{13}, & 2^8 &\equiv 9 \pmod{13}, & 2^{12} &\equiv 1 \pmod{13}, \end{aligned}$$

$$2^{24} = (2^{12})^2 \equiv 1 \pmod{13}, \quad 2^{30} = 2^{24} \cdot 2^6.$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$2^{30} \equiv 1 \cdot 12 \pmod{13}, \quad \text{azaz} \quad 2^{30} \equiv 12 \pmod{13},$$

ami szerint a 2^{30} szám 13-mal való osztásakor keletkezett maradék 12.

2. Határozzuk meg a 3^{100} szám 13-mal való osztásakor keletkezett maradékot.

Megoldás. Mivel

$$3^1 \equiv 3(\text{mod}13), \quad 3^2 \equiv 9(\text{mod}13), \quad 3^3 \equiv 1(\text{mod}13),$$

ezért $100 = 3 \cdot 33 + 1$ miatt

$$3^{100} = (3^3)^{33} \cdot 3 \equiv 1^{33} \cdot 3(\text{mod}13) \equiv 3(\text{mod}13).$$

A 3^{100} szám 13-mal való osztásakor keletkezett maradék 3.

3. Mennyi a 2^{2011} szám 3-mal való osztásának maradéka?

Megoldás. Mivel

$$2^1 \equiv 2(\text{mod}3), \quad 2^2 \equiv 1(\text{mod}3).$$

Mivel $2011 = 2 \cdot 1005 + 1$, ezért

$$2^{2011} = (2^2)^{1005} \cdot 2^1 \equiv 1^{1005} \cdot 2(\text{mod}3) \equiv 2(\text{mod}3),$$

ezért a 2^{2011} szám 3-mal való osztásának maradéka 2.

4. Határozzuk meg a 317^{259} szám 15-tel való osztásakor keletkezett maradékot.

Megoldás. Mivel

$$317^1 \equiv 2(\text{mod}15), \quad 317^2 \equiv 4(\text{mod}15), \quad 317^3 \equiv 8(\text{mod}15), \quad 317^4 \equiv 1(\text{mod}15),$$

ezért $259 = 4 \cdot 64 + 3$ miatt

$$317^{259} = (317^4)^{64} \cdot 317^3 \equiv 1^{64} \cdot 8(\text{mod}15) \equiv 8(\text{mod}15),$$

ami azt jelenti, hogy a 317^{259} szám 15-tel való osztásakor keletkezett maradék 8.

5. Osztható-e a $2^{53} + 4^{54}$ szám 3-mal?

Megoldás. Mivel $2^{53} = (2^2)^{26} \cdot 2^1 \equiv 1^{26} \cdot 2(\text{mod}3) \equiv 2(\text{mod}3)$ és hasonlóan kapjuk, hogy $4^{54} = (2^2)^{54} \equiv 1^{54}(\text{mod}3) \equiv 1(\text{mod}3)$, ezért

$$2^{53} + 4^{54} \equiv (2 + 1)(\text{mod}3) \equiv 0(\text{mod}3),$$

vagyis az adott szám osztható 3-mal.

6. Határozzuk meg 101^{100} szám 7-tel való osztásának maradékát.

Megoldás.

$$\begin{aligned} 101^1 &\equiv 3(\text{mod}7), & 101^3 &\equiv 6(\text{mod}7), & 101^5 &\equiv 5(\text{mod}7), \\ 101^2 &\equiv 2(\text{mod}7), & 101^4 &\equiv 4(\text{mod}7), & 101^6 &\equiv 1(\text{mod}7). \end{aligned}$$

Mivel $100 = 6 \cdot 16 + 4$, ezért $101^{100} = (101^6)^{16} \cdot 101^4 \equiv 1^{16} \cdot 4(\text{mod}7) \equiv 4(\text{mod}7)$. Eszerint a 101^{100} szám 7-tel való osztásának maradéka 4.

7. Határozzuk meg a tizes számrendszerben felírt 2^{100} szám utolsó két számjegyét.

Megoldás.

$$\begin{aligned} 2^5 &\equiv 32 \pmod{100}, & 2^{20} &\equiv 76 \pmod{100}, & 2^{50} &\equiv 24 \pmod{100}, \\ 2^{10} &\equiv 24 \pmod{100}, & 2^{30} &\equiv 24 \pmod{100}, & 2^{100} &\equiv 76 \pmod{100}, \end{aligned}$$

vagyis a 2^{100} szám utolsó két számjegye 76.

8. Határozzuk meg a tizes számrendszerben felírt 3^{400} szám utolsó számjegyét.

Megoldás.

$$3^1 \equiv 3 \pmod{10}, \quad 3^2 \equiv 9 \pmod{10}, \quad 3^3 \equiv 7 \pmod{10}, \quad 3^4 \equiv 1 \pmod{10}.$$

$$3^{400} = (3^4)^{100} \equiv 1^{100} \pmod{10} \equiv 1 \pmod{10},$$

ami azt jelenti, hogy a 3^{400} szám utolsó számjegye 1.

9. Igazoljuk, hogy $2222^{5555} + 5555^{2222}$ szám osztható 7-tel.

Megoldás. Mivel $2222^1 \equiv 3 \pmod{7}$, $3^6 \equiv 1 \pmod{7}$ és $5555 \equiv 5 \pmod{6}$, ezért

$$2222^{5555} \equiv 3^{5555} \pmod{7} \equiv (3^6)^{925} \cdot 3^5 \pmod{7} \equiv 3^5 \pmod{7} \equiv 5 \pmod{7},$$

tehát a 2222^{5555} 7-tel való osztásának maradéka 5.

Továbbá, mivel $5555^1 \equiv 4 \pmod{7}$, $4^3 \equiv 1 \pmod{7}$ és $2222 \equiv 2 \pmod{3}$, ezért

$$5555^{2222} \equiv 4^{2222} \pmod{7} \equiv (4^3)^{740} \cdot 4^2 \pmod{7} \equiv 4^2 \pmod{7} \equiv 2 \pmod{7},$$

tehát a 5555^{2222} 7-tel való osztásának maradéka 2.

Ez azt jelenti, hogy a $2222^{5555} + 5555^{2222}$ szám 7-tel való osztásának maradéka $5 + 2$, tehát osztható 7-tel.

10. Igazoljuk, hogy $11 \cdot 31 \mid 20^{15} - 1$.

Megoldás. Vizsgáljuk először a 11-gyel való osztást.

$$2^5 \equiv -1 \pmod{11}, \quad 10 \equiv -1 \pmod{11}, \quad 10^5 \equiv -1 \pmod{11},$$

$$20^5 \equiv 1 \pmod{11}, \quad 20^{15} \equiv 1 \pmod{11}.$$

Ebből következik, hogy 20^{15} 11-gyel való osztásának maradéka 1, tehát $11 \mid 20^{15} - 1$.

Vizsgáljuk meg most a 31-gyel való osztást is.

$$20 \equiv -11 \pmod{31}, \quad 20^2 \equiv 121 \pmod{31} \equiv -3 \pmod{31},$$

$$20^3 \equiv 2 \pmod{31}, \quad 20^{15} \equiv 2^5 \equiv 1 \pmod{31}.$$

Eszerint 20^{15} 31-gyel való osztásának maradéka 1, tehát $31 \mid 20^{15} - 1$.

Mivel $20^{15} - 1$ 11-gyel is és 31-gyel is osztható, ezért osztható a két szám szorzatával, azaz $11 \cdot 31$ -gyel is.

2.6.4. Oszthatósági szabályok

2.24. Tétel. Az $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} = \sum_{i=0}^n a_i \cdot 10^i$ szám m természetes számmal való oszthatóságának szükséges és elégséges feltétele, hogy m osztható legyen az

$$a_n r_n + a_{n-1} r_{n-1} + \dots + a_1 r_1 + a_0 r_0$$

összeggel, ahol az r_i -k tetszőleges olyan egész számok, amelyekre igaz, hogy

$$10^i \equiv r_i \pmod{m}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Bizonyítás. Az állítás nyilvánvaló, hiszen $a = \sum_{i=0}^n a_i \cdot 10^i \equiv \sum_{i=0}^n a_i r_i \pmod{m}$. \diamond

2.4. Következmény. Valamely $t \in \mathbb{N}$ esetén az $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} = \sum_{i=0}^n a_i \cdot 10^i$ szám 2^t (5^t) számmal való oszthatóságának szükséges és elégséges feltétele az, hogy $\overline{a_{t-1} \dots a_1 a_0}$ osztható legyen a 2^t (5^t) számmal.

Bizonyítás. Az előző tétel alapján $r_i = 10^i$, $i = 0, 1, \dots, t-1$ és $r_j = 0$, $j \geq t$. \diamond

Ez azt jelenti, hogy adott $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_3 a_2 a_1 a_0}$ szám esetén a osztható 2-vel, ha a_0 osztható 2-vel, a osztható 4-gyel, ha $\overline{a_1 a_0}$ osztható 4-gyel, a osztható 8-cal, ha $\overline{a_2 a_1 a_0}$ osztható 8-cal, a osztható 16-tal, ha $\overline{a_3 a_2 a_1 a_0}$ osztható 16-tal, és így tovább. Ugyanakkor a osztható 5-tel, ha a_0 osztható 5-tel, a osztható 25-tel, ha $\overline{a_1 a_0}$ osztható 25-tel, a osztható 125-tel, ha $\overline{a_2 a_1 a_0}$ osztható 125-tel, és így tovább.

2.19. Példa. 9876543808 osztható 2-vel, 9876543012 osztható 4-gyel, 987654321888 osztható 8-cal, 9876543211616 osztható 16-tal, 9876543215 osztható 5-tel, 98765432175 osztható 25-tel, 98765432375 osztható 125-tel.

Legyen adott ismét az $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_3 a_2 a_1 a_0}$ szám. Mivel $10 = 2 \cdot 5$, ezért a osztható 10-zel, ha a_0 osztható 2-vel és 5-tel is. Ez akkor áll fenn, ha $a_0 = 0$, vagyis az utolsó számjegy 0. Mivel $100 = 2^2 \cdot 5^2$, ezért a osztható 100-zal, ha $\overline{a_1 a_0}$ osztható 4-gyel és 25-tel is, ez pedig akkor érvényes, ha $a_0 = 0$ és $a_1 = 0$, vagyis az utolsó két számjegy nulla. Tovább folytatva ezt a gondolatmenetet megkapjuk, hogy egy szám osztható 1000-rel, ha az utolsó három számjegye 0, egy szám osztható 10000-rel, ha az utolsó négy számjegye 0, és így tovább.

2.20. Példa. 98765438070 osztható 10-zel, 98765430700 osztható 100-zal, 987654321000 osztható 1000-rel, 9876543210000 osztható 10000-rel.

2.5. Következmény. Legyen t olyan szám, hogy $10^t \equiv 1 \pmod{m}$. Az a szám osztható m -mel akkor és csak akkor, ha m -mel oszthatóak azok az összegek, amelyeket az a számjegyeinek jobbról balra történő t elemű csoportosításával kapunk.

Bizonyítás. Legyen $r_i = 10^i$, $i = 0, 1, \dots, t-1$ és $r_{tq+i} = 10^i$, $q \in \mathbb{N}$ esetén, mivel $10^{tq+i} \equiv 10^i \pmod{m}$. \diamond

Speciális esetben, a 3-mal, 9-cel és 11-gyel való oszthatóságra a következő szabályokat kapjuk:

$$\begin{aligned} 3|a &\iff 3 \mid \sum_{i=0}^n a_i \quad (t=1), \\ 9|a &\iff 9 \mid \sum_{i=0}^n a_i \quad (t=1), \\ 11|a &\iff 11 \mid \sum_{i=0}^n (10a_{2i+1} + a_{2i}) \quad (t=2). \end{aligned}$$

Az utolsó esetben, ha szükséges formálisan a szám elé írunk egy nullát. Például, $11 \mid 18986$, mert $11 \mid 176 = 1 + 89 + 86$.

2.6. Következmény. Legyen t olyan szám, hogy $10^t \equiv -1 \pmod{m}$. Az a szám m -mel való oszthatóságának szükséges és elégséges feltételét ugyanúgy kapjuk, mint az előző esetben, csak az összeg minden tagját váltakozó előjellel írjuk fel.

Bizonyítás. Legyen $r_i = 10^i$, $r_{t+i} = -10^i$, majd ismét $r_{2t+i} = 10^i$, valamint általánosan $r_{tq+i} = (-1)^q \cdot 10^i$, $i = 0, 1, \dots, t-1$, $q \in \mathbb{N}$. \diamond

Speciális esetben, a 11-gyel való oszthatóság felírható, mint:

$$11|a \iff 11 \mid \sum_{i=0}^n (-1)^i a_i \quad (t=1).$$

Például, $11 \mid 18986$, mert $6 - 8 + 9 - 8 + 1 = 0$.

A $t=2$ esetben a 101-gyel való oszthatóság feltételét kapjuk. Hogy könnyebben megjegyezzük, képzeljük el az a számot 100-as számrendszerben felírva. Például:

$$278388724 = 24 \cdot 100^0 + 87 \cdot 100^1 + 38 \cdot 100^2 + 78 \cdot 100^3 + 2 \cdot 100^4,$$

vagy általánosan $a = \sum_{i=0}^n b_i \cdot 100^i$. Ekkor az oszthatósági szabály megfogalmazása a következő:

$$101|a \iff 101 \mid \sum_{i=0}^n (-1)^i b_i.$$

Az adott példában: $101 \mid 278388724$, mert $24 - 87 + 38 - 78 + 2 = -101$.

Figyelembe véve, hogy $10^3 \equiv -1 \pmod{7}$, egy a szám 7-tel való oszthatóságának szükséges és elégséges feltétele, hogy

$$7 \mid \sum_{i=0}^n (-1)^i c_i, \quad \text{ahol} \quad a = \sum_{i=0}^n c_i \cdot 1000^i.$$

Például, $7 \mid 373266894$, mert $373 - 266 + 894 = 1001 \equiv 0 \pmod{7}$.

2.6.5. Diofantoszi (diofantikus) egyenletek

A legrégebb görög matematikai tartalmú írásos emlékek i.e. VI-V századból származnak. Mivel ez a matematika erősen geometriai jellegű volt, az algebrai problémák is geometriai alakban jelennek meg a megoldásokkal együtt. Diophantos (kb. i. sz. 250) volt az első görög matematikus, aki az algebrát továbbfejlesztette. Ő vezette be először az algebrai jeleket. Ezek ugyan még főleg szavak rövidítései, mégis elindították a bonyolultabb algebrai problémák megoldási módszereinek kifejlesztését. Sokféle első és másodfokú határozott és határozatlan egyenletet oldott meg, és ezzel elősegítette az egyenletmegoldás elméletének kibontakozását. Az egyenleteknek csupán a pozitív racionális megoldásait fogadta el. Felfedezte az egyenletrendezés alapvető törvényeit. Oldott meg egyenletet szorzattá alakítással. Meghatározta a gyökeit másodfokú egyenleteknek is. Az "Arithmetika" című, 13 kötetes műve sejtethetőleg egy előző, általunk nem ismert görög algebrai korszak eredményeinek is az összefoglalása. Jelölésrendszere fontos lépést jelent a tiszta szimbolikus algebra felé.

A diofantoszi egyenleteket a következőképpen definiáljuk.

2.20. Definíció. *Diofantoszi egyenleten olyan egész együtthatós többismeretlenes algebrai egyenletet értünk, amelyben az ismeretlenek racionális egész kifejezése szerepel és amelynek egész (bizonyos esetekben pozitív egész vagy racionális) megoldásait keressük.*

1. Az $ax + by = c$ alakú egyenlet.

Nyilvánvaló, hogy minden egész együtthatós lineáris kétismeretlenes egyenlet $ax + by = c$ alakú egyenletre vezethető vissza.

- 1° Láttuk az előzőekben, hogy $c = LKO(a, b)$ esetben az egyenletnek van megoldása az egész számok halmazában, s egy x, y megoldaspárt euklideszi algoritmus segítségével kaphatunk meg.
- 2° Ha a c szám nem osztója a $d = LKO(a, b)$ számnak, akkor az egyenletnek nincs megoldása az egész számok halmazában, mert a baloldal biztosan osztható d -vel, a jobboldal pedig nem.
- 3° Amennyiben c osztható d -vel, az $ax + by = c$ egyenlet egy nyilvánvaló megoldása $x_1 = \frac{c}{d}\alpha$, $y_1 = \frac{c}{d}\beta$, ahol az (α, β) számpár az $ax + by = d$ egyenlet megoldása. Ebben az esetben az egyenletnek végtelen sok megoldása van. Legyen az (u, v) számpár az $ax + by = c$ egyenlet egy tetszőleges megoldása, azaz $au + bv = c$. Ebből adódik, hogy $au + bv = ax_1 + by_1$, ahonnan

$$\frac{a}{d}(u - x_1) + \frac{b}{d}(v - y_1) = 0.$$

Mivel $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$, következik, hogy $u - x_1$ osztható $\frac{b}{d}$ -vel, $v - y_1$ pedig osztható $\frac{a}{d}$ -vel, amiből adódik, hogy

$$u = x_1 + \frac{b}{d}t, \quad v = y_1 + \frac{a}{d}t, \quad t \in \mathbf{Z}.$$

Könnyű ellenőrizni, hogy az (u, v) számpár tetszőleges $t \in \mathbf{Z}$ esetén kielégíti az adott egyenletet.

Az előbbi gondolatmenet alapján kimondható az alábbi tétel.

2.25. Tétel. *Az $ax + by = c$ diofantoszi egyenletnek akkor és csak akkor van megoldása, ha $d|c$, ahol $d = LKO(a, b)$. Ebben az esetben az általános megoldás alakja*

$$x = \frac{c}{d}\alpha + \frac{b}{d}t, \quad y = \frac{c}{d}\beta - \frac{a}{d}t, \quad t \in \mathbf{Z}$$

ahol az $a\alpha + b\beta = d$ egyenlet (α, β) megoldása euklideszi algoritmussal határozható meg.

2.21. Példa. Tekintsük most a $27x + 59y = 20$ egyenlet és határozzuk meg az előbbi módszerrel az egész megoldásait. Mivel $d = LKO(27, 59) = 1$ és $59 = 2 \cdot 27 + 5$, $27 = 5 \cdot 5 + 2$, $5 = 2 \cdot 2 + 1$ és $2 = 2 \cdot 1 + 0$, visszahelyettesítéssel kapjuk, hogy

$$1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 2(27 - 5 \cdot 5) = 11 \cdot 5 - 2 \cdot 27 = 11(59 - 2 \cdot 27) - 2 \cdot 27 = 11 \cdot 59 - 24 \cdot 27,$$

ahonnan kiolvashatjuk a $27\alpha + 59\beta = 1$ egyenlet megoldását, vagyis $\alpha = -24$ és $\beta = 11$. Ekkor $x_1 = \frac{c}{d}\alpha = -480$ és $y_1 = \frac{c}{d}\beta = 220$ az egyenlet megoldásai,

$$x = x_1 + \frac{b}{d}t = -480 + 59t, \quad y = y_1 - \frac{a}{d}t = 220 - 27t, \quad t \in \mathbf{Z}$$

pedig az általános megoldás. Vegyük észre, hogy t végtelen sok értéket felvehet és így végtelen sok megoldása van az egyenletnek. Például, $t = 8$ esetén $x_2 = -8$ és $y_2 = 4$.

2. Az $x^2 + y^2 = z^2$ egyenlet.

Keressük azokat az x, y, z egész számokat, amelyek kielégítik az $x^2 + y^2 = z^2$ egyenletet. Ennek az egyenletnek a megoldásait *Pitagorasz-számhármasoknak* nevezzük, mert ha ezek a számok egy háromszög oldalhosszúságait jelölik, akkor a Pitagorasz-tétel szerint azt kapjuk, hogy derékszögű háromszögről van szó.

Feltesszük, hogy az x, y, z számoknak nincs közös osztója. Ellenkező esetben ugyanis az egyenletet egyszerűsíthetjük α^2 -tel, ahol α az x, y, z számok közös osztója. Az ilyen $(x; y; z)$ megoldást primitív megoldásnak nevezzük. Nyilvánvaló, hogy a primitív $(x; y; z)$ megoldások meghatározásával az összes többi megoldást is megadtuk, mert azok $(\alpha x; \alpha y; \alpha z)$ alakúak, ahol $\alpha \in \mathbf{N}$.

Lássuk be, hogy az x és y számok közül az egyik páros kell legyen, a másik pedig páratlan, és z szintén páratlan. Amennyiben x és y is páros számok lennének, akkor z is páros kellene legyen, s akkor az egyenlet egyszerűsíthető. Ha x és y számok mindegyike páratlan, akkor $z^2 = x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod{4}$, amiről könnyen megállapíthatjuk, hogy lehetetlen.

Legyen $x = 2\alpha$ páros, y pedig páratlan szám. A szemlélt egyenlet a következő alakban írható fel:

$$x^2 = z^2 - y^2 = (z - y)(z + y).$$

Mindkét jobboldali tényező páros, tehát az

$$u = \frac{z + y}{2}, \quad v = \frac{z - y}{2}$$

számok egészek. Azt kapjuk, hogy $x^2 = 4\alpha^2 = 4uv$, tehát $\alpha^2 = uv$. Könnyű belátni, hogy az u, v számoknak nincs közös osztója, ezért négyzetszámok kell legyenek, például

$$u = m^2, \quad v = n^2,$$

ahol m és n különböző paritásúak és nincs közös osztójuk. Ekkor

$$\begin{aligned}x &= 2\alpha = 2mn, \\y &= u - v = m^2 - n^2, \\z &= u + v = m^2 + n^2\end{aligned}$$

$m, n \in \mathbf{N}$, $(m, n) = 1$, $m > n$, m és n paritása különböző. Érvényes a következő állítás:

2.26. Tétel. *Ahhoz, hogy az $(x; y; z)$ rendezett számhármass az $x^2 + y^2 = z^2$ egyenlet primitív megoldása legyen a természetes számok halmazában, szükséges és elégséges feltétel az, hogy x , y és z a következő alakú számok legyenek:*

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2,$$

ahol $m, n \in \mathbf{N}$, $(m, n) = 1$, $m > n$, valamint m és n paritása különböző.

Néhány primitív Pitagoraszi számhármass:

$$\begin{array}{ll}(3; 4; 5) & (m = 2, n = 1), \\(5; 12; 13) & (m = 3, n = 2), \\(7; 24; 25) & (m = 4, n = 3), \\(51; 140; 149) & (m = 10, n = 7)\end{array}$$

3. Nagy Fermat tétel.

”Egy köböt pedig lehetetlen szétbontani két köbre egy negyedik hatványt két negyedik hatványra és általában a négyzet kivételével egy hatványt egy ugyanolyan két hatványra. Erre találtam egy valóban csodálatos bizonyítást, de a lapszél túl keskeny ahhoz, hogy befogadjam.”

Ezeket a sorokat latin nyelven, amely a matematika talán leghíresebb problémájának, a nagy Fermat-tételnek az eredeti megfogalmazása, Pierre de Fermat jogász, a toulouse-i parlament tanácsosa jegyezte fel a Diophantoszi ”Arithmetikája” latin nyelvű kiadásának margójára, ám az állítás ”csodálatos bizonyításának” titkát Fermat a sírba vitte. Így kezdődött a matematika egyik leghíresebb története, amely 350 éves munkát adott matematikusok generációinak és műkedvelő matematikusok seregének. Fermat óta minden nemzedék megpróbálkozott azzal, hogy rátaláljon a ”csodálatos bizonyításra”, hiszen maguknak akarták Fermat Utolsó Tételét, hiszen utoljára ez maradt megválaszolatlan a Fermat kiterjedt levelezésében és jegyzeteiben fölvetett kérdések közül.

Fermat (1601-1665), a műkedvelő matematikus számelméleti tételei, melyekkel korát messze megelőzte, nagy hatással voltak a számelmélet fejlődésére, bár állításai között volt néhány, amelyről megmutatták, hogy hamis. Amíg egy állítás nincs bebizonyítva, nem is volna szabad tételnek nevezni, hanem csak sejtésnek, s a matematika mai jelölésével Fermat sejtése így fogalmazható meg:

Ha n 2-nél nagyobb természetes szám, akkor az

$$x^n + y^n = z^n$$

egyenletet egyetlen természetes számokból álló x , y , z számhármass sem elégíti ki.

Vajon Fermat tényleg talált rá egy csodálatos bizonyítást? Igen valószínű az, hogy bizonyítása hibás volt. Miért gondolják ezt ma a matematikusok? Először is kicsi a

valószínűsége annak, hogy Fermat korának matematikai eredményeit ismerve talált volna olyan megoldást, amire ezen tudományág későbbi fejlődése során más matematikus nem jött rá. Másodszor a nagy Fermat-sejtés csak a már idézett Diophantos mő margóján szerepel. A levelezéseiben is csak az $n = 3$ és $n = 4$ eset fordul elő, mint felvetett probléma. Ha Fermat ismerte volna az általános eset bizonyítását, akkor nem a speciális esetekkel tette volna próbára levelezőtársait.

Azt tartják, hogy a nagy Fermat-tételre adták a legtöbb hamis bizonyítást. Mivel a probléma könnyen megérthető, ezért nagyon sok laikus fantáziáját is megmozgatta. Számos díjat tűztek ki megoldására. Közülük a leghíresebb a Paul Wolfskehl (1856-1906) német nagyiparos által 1908-ban alapított 100.000 márkás díj (ez ma több mint 1 millió Euronak felel meg). Az alapító okirat szerint a díj csak 2007. szeptember 13-ig adható ki. Ezután már nem fogadnak el újabb kéziratokat.

Nemzedékek próbálkoztak a bizonyítással. Az $n = 1$ és $n = 2$ eset klasszikusnak számít. Az $n = 4$ eset bizonyítását Fermat-nak tulajdonítják. Feltételezett bizonyításában az indirekt bizonyítás egy változatát használta. Az $n = 3$ esetre Euler és később Gauss is adott bizonyítást. Euler munkáiban két bizonyítás is található, de az egyikben később hiányosságokat fedeztek fel, amelyek Gauss bizonyításában jelentek meg világosan. Sophie German (1776-1831) francia matematikusnő 1823-ban igazolt tétele és Legendre (1752-1833) általánosítása alapján bebizonyították, hogy a Fermat-sejtés igaz bizonyos speciális $n < 100$ prímekekre. Az $n = 5$ esetre először Dirichlet (1805-1859) közölt egy bizonyítást 1825-ben, amelyet kijavított, miután hibásnak bizonyult. Ezzel egyidőben Legendre (1752-1833) is talált egy megoldást. Az $n = 14$ esetet Dirichlet látta be 1832-ben. Valójában az $n = 7$ esetet szerette volna bebizonyítani, de ez nem sikerült neki. Az $n = 7$ esetében Lamé (1795-1870) volt sikeres 1839-ben. Módszerét Lebesgue (1875-1941) egyszerűsítette. Az $n \leq 37$ esetet, amikor n prímszám, Kummer tanulmányozta, és Dedekind (1831-1916) segítségével rájött, hogy az $n = 37$ eset bizonyítás szempontjából teljesen másképpen viselkedik, mint az $n < 37$. Az $n = 37$, $n = 59$, $n = 67$ esetekre 1857-ben Kummer talált bizonyítást. 1920-ban Vandiver (1882-1973) néhány hibát fedezett fel Kummer okfejtésében, melyeket sikerült kijavítani 1922-ben, majd sikerült továbbfejlesztenie Kummer módszerét.

A továbbiakban felsorolásszerűen adjuk meg a főbb eredmények szerzőit és idejét $n = p$ páratlan prímekekre. A $p < 269$ eset, Vandiver, 1930. A $p < 307$ eset, Vandiver, 1931. A $p < 617$ eset, Vandiver, 1937. A $p < 2521$ eset, Vandiver, 1954. A $p < 4001$ eset, Vandiver, 1954. A $p < 25000$ eset, Selfridge, Pollack, 1967. A $p < 5500$ eset, Kobelev, 1970. A $p < 30000$ eset, Johnson, 1975. A $p < 58150$ eset, Wagstaff, 1975. A $p < 100000$ eset, Wagstaff, 1976. A $p < 125000$ eset, Wagstaff, 1977. A $p < 400000$ eset, Crondall és társai, 1994. Megemlítenéd még Falting 1983-as eredménye, amely szintén hasznosnak bizonyult a további kutatásokban.

A Cambridge-i Andrew Wiles (1953-) 10 éves korában a helyi könyvtárban egy könyvre bukkant, mely a Fermat-sejtésről szólt. Teljesen lenyűgözte, hogy olyan matematikai problémára lett, amit ő is meg tud érteni, és amit még senkinek sem sikerült bizonyítani. Elhatározta, hogy ő lesz az, aki megoldja. Az elemi iskolában még arra gondolt, van esélye arra, hogy megtalálja Fermat elveszett "csodálatos bizonyítását", mert úgy becsülte, már rendelkezik Fermat korának matematikai ismereteivel. Középiskolás volt, amikor megtudta, hogy a XVIII. és XIX. században is jelentős eredményeket értek el. Ő is megpróbálkozott ezekkel a módszerekkel. Egyetemi professzora azonban eltanácsolta a kevés sikerrel kecsegtető témától. Foglalkozzon inkább olyan más kérdésekkel, amelyek

a mai kor matematikai érdeklődésének a homlokterében állnak. Wiles ekkor felhagyott Fermat problémájával, de nem feledkezett meg róla teljesen. Valahol minduntalan ott bujkált a tudatában, bár intenzíven inkább más területtel foglalkozott, amely sikerekkel is kecsegtette. 1986-ban, egyik este beszélgetés közben az egyik barátja mellékesen megjegyezte, hogy Ken Ribet amerikai matematikus kapcsolatot talált a nagy Fermat-sejtés és egy másik sejtés, a Taniyama-Shimura-sejtés között. Wilest villámcsapásként érte a hír. Akkor még nem tudta, hogy hétéves munka vár rá. Teljesen titokban dolgozott, csak felesége tudott elfoglaltságáról. Eredményeit 1993. június 23-án jelentette be egy Cambridge-ben rendezett konferencián. A cambridge-i előadás után Wiles hamarosan elküldött egy 200 oldalas kéziratot az *Inventiones Mathematicae* című folyóirathoz. A főszerkesztő hat szakértő bírálónak küldte ki a munkát. A bírálatok elolvasása után Wiles egy e-mail üzenetben tudatta a matematikustársadalommal, hogy a bírálati folyamat során felmerült apróbb kérdésekre sikerült kielégítő választ adnia. Felvetettek egy komolyabb problémát is, amire még nem találta meg a választ. Ekkor Wiles ismét bezárkózott és munkához látott, majd 14 hónapos munka után, egykori tanítványa, Taylor közreműködésével Wiles kijavította a hibát.

A Fermat-tétel bizonyítása felvet egy érdekes problémát. Mikor tekintünk egy matematikai problémát bebizonyítottnak, Még Fermat $n = 3$ esetre adott bizonyítása sem volt teljes. Kummer bizonyításában Vandiver 63 év után talált hibát. Wiles munkájában a hivatalos bíráló talált egy lényeges hibát. Ezt Wiles és Taylor kijavította. Mi a garancia, hogy néhány év, évtized, vagy évszázad múlva valaki nem talál újabb hibát? A fenti példákban felmerült hiányosságok nem bizonyultak végzetesnek. A matematikai alapgondolat lényegét nem érintették, s az elért eredmények mindenképpen maradandóak és alapvetőek az adott témakörben. Egy tétel bizonyításának ellenőrzésére korunkban a folyóiratok bírálói rendszerét használják, ahol a téma szakértői mondanak véleményt. Egy-egy témában néha csak csekély számú szakértő található. Ők gyakran ismertető cikkeket írnak egy-egy bonyolultabb munkáról, és ezzel azt szakemberek szélesebb köre számára teszik érthetővé. Wiles munkájáról is számos ilyen összefoglaló, de csak a szakemberek számára érthető ismeretterjesztő cikk született.

Végül is akkor Wiles bebizonyította a nagy Fermat-tételt? Bár erre teljes bizonyossággal nem lehet igennel válaszolni, a szakértők és vetélytársak többsége már kezdi elismerni, hogy megvan a 350 éves probléma megoldása, és Wiles számos kitüntetés mellett 1997 nyarán megkapta a Wolfskehl-díjat.

3. További diofantoszi egyenletek.

Általános esetben a diofantoszi egyenletek megoldására nem lehet megoldási eljárást adni, hiszen az egyenletek alakja nagyon sokféle lehet. Fel lehet persze használni az egész számok halmazában már ismert és bebizonyított állításokat.

2.22. Példa. Nézzük meg például a $1! + 2! + \dots + x! = y^2$ diofantoszi egyenlet megoldását. Próbálgatással és közvetlen behelyettesítéssel megkaphatjuk, hogy az $x = 1$ és $y = 1$, valamint az $x = 3$ és $y = 3$ számpárok teljesítik az egyenletet. Azt kell még belátni, hogy az egyenletnek más megoldása nincs. $x = 4$ esetén a bal oldalon 33 van, amely egyetlen természetes számnak sem a négyzete. Mivel $5! = 120$, ezért ezért $x \geq 5$ esetén a bal oldalon levő szám mindig 3-ra végződik. Egy szám négyzete viszont csupán a 0, 1, 4, 5, 6, 9 számokra végződhet, tehát több megoldás nincs.

FELADATOK.

1. Határozzuk meg a $10x - 7y = 17$ diofantoszi egyenlet megoldásait.

Megoldás. Mivel $d = LKO(10, 7) = 1$ és $10 = 1 \cdot 7 + 3$, $7 = 2 \cdot 3 + 1$ és $3 = 1 \cdot 3$, visszahelyettesítéssel kapjuk, hogy

$$1 = 7 - 2 \cdot 3 = 7 - 2(10 - 1 \cdot 7) = -2 \cdot 10 + 3 \cdot (-7),$$

ahonnan kiolvashatjuk a $10\alpha - 7\beta = 1$ egyenlet megoldását, vagyis $\alpha = -2$ és $\beta = -3$. Ekkor $x_1 = \frac{c}{d}\alpha = -34$ és $y_1 = \frac{c}{d}\beta = -51$ az egyenlet megoldásai,

$$x = x_1 + \frac{b}{d}t = -34 - 7t, \quad y = y_1 - \frac{a}{d}t = -51 - 10t, \quad t \in \mathbf{Z}$$

pedig az általános megoldás. Vegyük észre, hogy t végtelen sok értéket felvehet és így végtelen sok megoldása van az egyenletnek. Például, $t = -5$ esetén $x_2 = 1$ és $y_2 = -1$, illetve $t = -6$ esetén $x_2 = 8$ és $y_2 = 9$ a megoldás.

2. Határozzuk meg a $33x + 21y = 24$ egyenlet egész megoldásait.

Megoldás. Mivel $d = LKO(33, 21) = 3$ és $33 = 1 \cdot 21 + 12$, $21 = 1 \cdot 12 + 9$ és $12 = 1 \cdot 9 + 3$, visszahelyettesítéssel kapjuk, hogy

$$3 = 12 - 1 \cdot 9 = 12 - 1(21 - 1 \cdot 12) = -21 + 2 \cdot 12 = -21 + 2 \cdot (33 - 1 \cdot 21) = 2 \cdot 33 - 3 \cdot 21,$$

ahonnan kiolvashatjuk a $33\alpha + 21\beta = 3$ egyenlet megoldását, vagyis $\alpha = 2$ és $\beta = -3$. Ekkor $x_1 = \frac{c}{d}\alpha = 16$ és $y_1 = \frac{c}{d}\beta = -24$ az egyenlet megoldásai,

$$x = x_1 + \frac{b}{d}t = 16 + 7t, \quad y = y_1 - \frac{a}{d}t = -24 - 11t, \quad t \in \mathbf{Z}$$

pedig az általános megoldás. $t = -2$ esetén $x_2 = 2$ és $y_2 = -2$, illetve $t = -3$ esetén pedig $x_2 = -5$ és $y_2 = 9$ a megoldás.

3. Oldjuk meg a $37x - 67y = 19$ diofantoszi egyenletet.

Megoldás. Mivel $d = LKO(37, 67) = 1$ és $67 = 1 \cdot 37 + 30$, $37 = 1 \cdot 30 + 7$, $30 = 4 \cdot 7 + 2$, $7 = 3 \cdot 2 + 1$ és $2 = 1 \cdot 2$, visszahelyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 1 &= 7 - 3 \cdot 2 = 7 - 3(30 - 4 \cdot 7) = -3 \cdot 30 + 13 \cdot 7 = -3 \cdot 30 + 13 \cdot (37 - 30) = \\ &= -16 \cdot 30 + 13 \cdot 37 = -16 \cdot (67 - 37) + 13 \cdot 37 = 29 \cdot 37 + 16 \cdot (-67), \end{aligned}$$

ahonnan kiolvashatjuk a $37\alpha - 67\beta = 1$ egyenlet megoldását, vagyis $\alpha = 29$ és $\beta = 16$. Ekkor $x_1 = \frac{c}{d}\alpha = 551$ és $y_1 = \frac{c}{d}\beta = 304$ az egyenlet megoldásai,

$$x = x_1 + \frac{b}{d}t = 551 - 67t, \quad y = y_1 - \frac{a}{d}t = 304 - 37t, \quad t \in \mathbf{Z}$$

pedig az általános megoldás. $t = 9$ esetén $x_2 = -52$ és $y_2 = -29$, illetve $t = 8$ esetén $x_2 = 15$ és $y_2 = 8$ a megoldás.

4. Oldjuk meg a $31x + 53y = 13$ egyenletet az egész számok halmazán.

Megoldás. Mivel $d = LKO(31, 53) = 1$ és $53 = 1 \cdot 31 + 22$, $31 = 1 \cdot 22 + 9$, $22 = 2 \cdot 9 + 4$, $9 = 2 \cdot 4 + 1$ és $4 = 1 \cdot 4$, visszahelyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 1 &= 9 - 2 \cdot 4 = 9 - 2(22 - 2 \cdot 9) = -2 \cdot 22 + 5 \cdot 9 = -2 \cdot 22 + 5 \cdot (31 - 22) = \\ &= 5 \cdot 31 - 7 \cdot 22 = 5 \cdot 31 - 7 \cdot (53 - 31) = 12 \cdot 31 - 7 \cdot 53, \end{aligned}$$

ahonnan kiolvashatjuk a $31\alpha + 53\beta = 1$ egyenlet megoldását, vagyis $\alpha = 12$ és $\beta = -7$. Ekkor $x_1 = \frac{c}{d}\alpha = 156$ és $y_1 = \frac{c}{d}\beta = -91$ az egyenlet megoldásai,

$$x = x_1 + \frac{b}{d}t = 156 + 53t, \quad y = y_1 - \frac{a}{d}t = -91 - 31t, \quad t \in \mathbf{Z}$$

pedig az általános megoldás. $t = -3$ esetén $x_2 = -3$ és $y_2 = 2$, illetve $t = -2$ esetén $x_2 = 50$ és $y_2 = -29$ a megoldás.

5. Határozzuk meg mindazokat az egész x , y számpárokat, amelyekre teljesül, hogy $98x - 77y = 14$.

Megoldás. Mivel $d = LKO(98, 77) = 7$ és $98 = 1 \cdot 77 + 21$, $77 = 3 \cdot 21 + 14$, $21 = 1 \cdot 14 + 7$ és $14 = 2 \cdot 7$, visszahelyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 7 &= 21 - 1 \cdot 14 = 21 - 1 \cdot (77 - 3 \cdot 21) = -1 \cdot 77 + 4 \cdot 21 = \\ &= -1 \cdot 77 + 4 \cdot (98 - 77) = 4 \cdot 98 + 5 \cdot (-77) \end{aligned}$$

ahonnan kiolvashatjuk a $98\alpha - 77\beta = 7$ egyenlet megoldását, vagyis $\alpha = 4$ és $\beta = 5$. Ekkor $x_1 = \frac{c}{d}\alpha = 8$ és $y_1 = \frac{c}{d}\beta = 10$ az egyenlet megoldásai,

$$x = x_1 + \frac{b}{d}t = 8 - 11t, \quad y = y_1 - \frac{a}{d}t = 10 - 14t, \quad t \in \mathbf{Z}$$

pedig az általános megoldás. $t = 1$ esetén $x_2 = -3$ és $y_2 = -4$, illetve $t = -1$ esetén $x_2 = 19$ és $y_2 = 24$ a megoldás.

6. Bontsuk fel 463-at két természetes szám összegére úgy, hogy az egyik szám osztható legyen 14-gyel, a másik 23-mal.

Megoldás. A $14x + 23y = 463$ diofantoszi egyenletet kell megoldani. Mivel most $d = LKO(14, 23) = 1$ és $23 = 1 \cdot 14 + 9$, $14 = 1 \cdot 9 + 5$, $9 = 1 \cdot 5 + 4$, $5 = 1 \cdot 4 + 1$ és $4 = 1 \cdot 4$, visszahelyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 1 &= 5 - 1 \cdot 4 = 5 - 1 \cdot (9 - 5) = -1 \cdot 9 + 2 \cdot 5 = -1 \cdot 9 + 2 \cdot (14 - 9) = \\ &= 2 \cdot 14 - 3 \cdot 9 = 2 \cdot 14 - 3 \cdot (23 - 14) = 5 \cdot 14 - 3 \cdot 23, \end{aligned}$$

ahonnan kiolvashatjuk a $14\alpha + 23\beta = 1$ egyenlet megoldását, vagyis $\alpha = 5$ és $\beta = -3$. Ekkor $x_1 = \frac{c}{d}\alpha = 2315$ és $y_1 = \frac{c}{d}\beta = -1389$ az egyenlet megoldásai,

$$x = x_1 + \frac{b}{d}t = 2315 + 23t, \quad y = y_1 - \frac{a}{d}t = -1389 - 14t, \quad t \in \mathbf{Z}$$

pedig az általános megoldás. $t = -100$ esetén $x_2 = 15$ és $y_2 = 11$ a megoldás.

7. Oldjuk meg a természetes számok halmazán az $x^2 + 73 = y^2$ egyenletet.

Megoldás. Végezzünk az egyenleten ekvivalens átalakításokat:

$$x^2 + 73 = y^2 \iff y^2 - x^2 = 73 \iff (y - x)(y + x) = 73.$$

Mivel 73 prímszám és $73 = 1 \cdot 73 = 73 \cdot 1 = (-1) \cdot (-73) = (-73) \cdot (-1)$, ezért a következő kétismeretlenes egyenletrendszerek valamelyike adhat megoldást:

$$\begin{array}{llll} x + y = 1, & x + y = 73, & x + y = -1, & x + y = -73, \\ -x + y = 73, & -x + y = 1, & -x + y = 1, & -x + y = 1. \end{array}$$

Ellenőrzéssel megállapíthatjuk, hogy az $x + y = 73$, $-x + y = 1$ egyenletrendszer megoldása $x = 36$, $y = 37$ az egyetlen megfelelő megoldás, hiszen a többi egyenletrendszer nem ad természetes számokat megoldásként.

8. Oldjuk meg a $2(x^2 - y^2) = 1978$ diofantoszi egyenletet a természetes számok halmazán.

Megoldás. Végezzünk az egyenleten ekvivalens átalakításokat:

$$2(x^2 - y^2) = 1978 \iff x^2 - y^2 = 989 \iff (x - y)(x + y) = 23 \cdot 43.$$

Mivel csak a természetes számok halmazán keressük a megoldásokat, így elegendő a $989 = 1 \cdot 989 = 989 \cdot 1 = 23 \cdot 43 = 43 \cdot 23$ lehetséges felbontásokat tekinteni. A következő kétismeretlenes egyenletrendszerek valamelyike adhat megoldást:

$$\begin{array}{llll} x - y = 1, & x - y = 989, & x - y = 23, & x - y = 43, \\ x + y = 989, & x + y = 1, & x + y = 43, & x + y = 23. \end{array}$$

Megfelelő megoldásokat az első és harmadik egyenletrendszer ad, ezek pedig a következők: (495; 494) és (33; 10).

9. Keressük meg mindazokat az (x, y) számpárokat, ahol x és y pozitív egészek, és melyek kielégítik az $x^2 + 3x + 24 = y^2$ diofantoszi egyenletet.

Megoldás. Alakítsuk át először az egyenletet. Ekkor

$$\begin{aligned} x^2 + 3x + 24 = y^2 &\iff 4x^2 + 12x + 96 = 4y^2 \iff (2x + 3)^2 + 87 = 4y^2 \iff \\ &\iff (2y - 2x - 3)(2y + 2x + 3) = 3 \cdot 29. \end{aligned}$$

A négy lehetséges kétismeretlenes egyenletrendszer közül kettő ad megfelelő megoldást, ezek az (5; 8) és (20; 22) számpárok.

10. Oldjuk meg az $2x^2 + 5xy - 12y^2 = 6$ egyenletet a természetes számok halmazán.

Megoldás. Alakítsuk át először az egyenletet. Ekkor

$$\begin{aligned} 2x^2 + 5xy - 12y^2 = 6 &\iff 16x^2 + 40xy - 96y^2 = 48 \iff (4x + 5y)^2 - 121y^2 = 48 \iff \\ &\iff (4x + 5y - 11y)(4x + 5y + 11y) = 6 \cdot 8 \iff (2x - 3y)(x + 4y) = 2 \cdot 3. \end{aligned}$$

A négy lehetséges kétismeretlenes egyenletrendszer közül csak egy ad megfelelő megoldást, ez pedig a (2; 1) számpár.

11. Adjuk meg mindazokat a pozitív egész x, y, z számhármassokat, amelyekre érvényes, hogy $xyz + xy + yz + zx + x + y + z + 1 = 2001$.

Megoldás. Írjuk fel szorzat alakjában az egyenlet bal és jobb oldalát. Ekkor

$$xyz + xy + yz + zx + x + y + z + 1 = 2001 \iff (x+1)(y+1)(z+1) = 3 \cdot 23 \cdot 29.$$

Mivel a pozitív egészek közé a nulla nem tartozik bele, ezért egyik tényező sem lehet 1. Ezért a megoldások a következő számhármassok lehetnek: $(2; 22; 28)$, $(2; 28; 22)$, $(22; 2; 28)$, $(22; 28; 2)$, $(28; 2; 22)$ és $(28; 22; 2)$.

12. Oldjuk meg az egész számok halmazán az $x^4 - x^3y - xy^3 + y^4 = 1$ egyenletet.

Megoldás. Mivel

$$x^4 - x^3y - xy^3 + y^4 = 1 \iff (x-y)(x^3 - y^3) = 1 \iff (x-y)^2(x^2 + xy + y^2) = 1,$$

ezért csak $(x-y)^2 = 1$ és $x^2 + xy + y^2 = 1$ lehetséges.

Ha $x - y = 1$, akkor az első feltétel teljesül és ebből $x = y + 1$. Helyettesítsük ezt be a második feltételbe. Ekkor

$$(y+1)^2 + (y+1)y + y^2 = 1 \iff 3y^2 + 3y + 1 = 1 \iff 3y(y+1) = 0.$$

$y(y+1) = 0$ egyenlet megoldásai $y_1 = 0$ és $y_2 = -1$. Visszahelyettesítve az első egyenletbe adódik $x_1 = 1$ és $x_2 = 0$.

Ha $x - y = -1$, akkor szintén teljesül az első feltétel és ebből $x = y - 1$. Helyettesítsük ezt be a második feltételbe. Ekkor

$$(y-1)^2 + (y-1)y + y^2 = 1 \iff 3y^2 - 3y + 1 = 1 \iff 3y(y-1) = 0.$$

$y(y-1) = 0$ egyenlet megoldásai $y_3 = 0$ és $y_4 = 1$. Visszahelyettesítve az első egyenletbe adódik $x_3 = -1$ és $x_4 = 0$.

A megoldások tehát a következő számpárok: $(1; 0)$, $(0; -1)$, $(-1; 0)$ és $(0; 1)$.

13. Oldjuk meg az $y(1-x)^2 + x(1-y)^2 + (x+y)^2 - x^3 - y^3 = 2000$ egyenletet az egész számok halmazán.

Megoldás. Az egyenlet bal oldalán végezzük el a kijelölt műveleteket, majd csoportosítsunk és emeljük ki a megfelelő tényezőket:

$$y(1-x)^2 + x(1-y)^2 + (x+y)^2 - x^3 - y^3 = 2000,$$

$$x + y + xy(x+y) + (x-y)^2 - (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 2000,$$

$$(x+y)(1 + xy - x^2 + xy - y^2) + (x-y)^2 - 1 = 1999,$$

$$(x+y)(1 - (x-y)^2) - (1 - (x-y)^2) = 1999,$$

$$(x+y-1)(1 - (x-y)^2) = 1999.$$

Mivel 1999 prímszám és itt két egész szám szorzata 1999, az egyik tényező 1999, a másik 1, illetve lehet mindkettő negatív is. Könnyen belátható, hogy az egyetlen szóbjavító eset

$$x + y - 1 = 1999 \quad \text{és} \quad 1 - (x - y)^2 = 1.$$

Innen kapjuk az egyetlen megoldást: $x = y = 1000$.

14. Határozzuk meg mindazokat a pozitív egész x, y, z számhármassokat, amelyekre $x + y + z = xyz$.

Megoldás. Írjuk fel az adott egyenletet az

$$\frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} = 1$$

ekvivalens alakba. Ekkor az $\frac{1}{yz}, \frac{1}{xz}$ és $\frac{1}{xy}$ számok közül legalább az egyik nagyobb vagy egyenlő $\frac{1}{3}$ -nál. Legyen például $\frac{1}{xy} \geq \frac{1}{3}$, vagyis $xy \leq 3$. Ez a következő esetekben érvényes:

$$(x, y) \in \{(1; 1), (1; 2), (2; 1), (1; 3), (3; 1)\}.$$

Az első eset nem ad megoldást, de a többi a következő megoldásokhoz vezet: $(1; 2; 3)$, $(2; 1; 3)$, $(1; 3; 2)$ és $(3; 1; 2)$. Figyelembe véve a többi esetet is még két megoldást kapunk, ezek: $(2; 3; 1)$ és $(3; 2; 1)$.

15. Határozzuk meg mindazokat az x, y, z ($z > 1$) számhármassokat, amelyek kielégítik az $1! + 2! + \dots x! = y^z$ egyenletet.

Megoldás. Vegyük észre, hogy minden $(1; 1; z)$ alakú számhármass, ahol $z \in \{2, 3, \dots\}$, kielégíti az egyenletet. Ezért most vizsgáljuk az $x > 1$ esetet.

a) Legyen $z = 2$. Vegyük észre, hogy ez pont a 2.22. Példa, amelynek megoldását már tudjuk, ez $(3; 3; 2)$.

b) Legyen $z = 3$. Az egyenlet alakja most $1! + 2! + \dots x! = y^3$. Vegyük észre, hogy egy természetes szám köbe 7-tel osztva $-1, 0$ vagy 1 maradékot ad és hogy $x \geq 7$ esetén

$$1! + 2! + \dots x! \equiv 1! + 2! + \dots 6! \equiv 873 \equiv 5 \pmod{7},$$

ezért ha $(x, y, 3)$ megoldása az egyenletnek, akkor $x \leq 5$. Ellenőrzéssel megkapjuk, hogy $x \in \{2, 3, 4, 5\}$ esetén nincs megoldás.

c) Legyen $z \geq 4$. Ha az $x > 1, y$ és $z \geq 4$ természetes számokra érvényes, hogy $1! + 2! + \dots x! = y^z$, akkor $3 \mid 1! + 2! + \dots x!$ és $1! + 2! + \dots x! = 3 + 3! + \dots x!$, amiből következik, hogy $3 \mid y^z, 3 \mid y$ és $3^z \mid y^z$. E gondolatmenet alapján $1! + 2! + \dots x$ osztható $3^4 = 81$ -gyel. Vegyük észre, hogy az $1! + 2! + 5! + \dots 8! = 46233$ szám osztható 9-cel, de nem osztható 81-gyel. Mivel a $k!$ szám osztható 81-gyel minden $k \geq 9$ esetén, ebből következik, hogy $x \leq 7$. Ellenőrzéssel megkapjuk, hogy az $x \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ számok egyike esetén sem lesz az $1! + 2! + \dots x!$ szám osztható 81-gyel. ez azt jelenti, hogy az adott egyenletnek $x > 1$ és $z \geq 4$ esetén nincs megoldása.

Az egyenlet megoldásai eszerint a $(3; 3; 2)$ és az olyan $(1; 1; z)$ alakú számhármassok, ahol $z \geq 2$.

2.7. Matematikai indukció alkalmazása - összetett feladatok

A filozófiában és az alkalmazott tudományokban az indukció fogalma azt jelenti, hogy egyedi esetekből általános következtetésre jutunk. A matematikában viszont az ilyen következtetésekkel óvatosabban kell bánni, mivel a matematikában minden állítást bizonyítani kell. John Wallis (1616-1703) kortársai szigorúan kritizálták, mivel egyik munkájában, miután a következő hat összefüggést megvizsgálta:

$$\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}, \quad \frac{0+1+4}{4+4+4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12},$$

$$\frac{0+1+4+9}{9+9+9+9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}, \quad \frac{0+1+4+9+16}{16+16+16+16+16} = \frac{1}{3} + \frac{1}{24},$$

$$\frac{0+1+4+9+16+25}{25+25+25+25+25+25} = \frac{1}{3} + \frac{1}{30}, \quad \frac{0+1+4+9+16+25+36}{36+36+36+36+36+36+36} = \frac{1}{3} + \frac{1}{36}$$

minden további érvelés nélkül kijelentette, hogy a következő általános összefüggés érvényes:

$$\frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^2 + n^2 + n^2 + \dots + n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n}.$$

Annak ellenére, hogy Wallis állítása igaz, és a következő (Arkhimédész által is ismert) állítás bizonyítja:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6n}\right)n^2(n+1),$$

mégis szükség lett volna a bizonyításra. A matematikai indukció egy egyszerű, de ugyanakkor nagy erejű bizonyítási módszer a természetes számokra vonatkozó állításokra. A matematikai indukció módszere a matematika más területein is hatékonyan alkalmazható, például az algebra, geometria, analízis, kombinatorika fejezeteiben.

Az indukció elvének hosszú története van, kezdetei a görög matematikában lelhetők fel, és bár maga az elv nem jelenik meg explicit módon az ókori görög szövegekben, sok helyen megtaláljuk a gondolat csíráit.

Bizonyos természetes számokra vonatkozó egyenlőtlenségek bizonyítására alkalmazhatjuk a matematikai indukciót.

2.23. Példa. Igazoljuk most matematikai indukcióval, hogy $2^n > n^2$, minden $n > 4$ természetes szám esetén.

1° Az egyenlőtlenség $n = 5$ -re igaz, mert a $2^5 > 5^2$, azaz a $32 > 25$ igaz állítás.

2° Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$ -ra, azaz $2^k > k^2$.

3° Igazoljuk most az egyenlőtlenséget $n = k + 1$ -re, azaz lássuk be, hogy $2^{k+1} > (k+1)^2$. Induljunk ki a bal oldalból. Ekkor

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2 \cdot k^2 > (k+1)^2,$$

ahol a $2k^2 > (k+1)^2$ egyenlőtlenség ekvivalens a $k^2 - 2k - 1 > 0$ egyenlőtlenséggel, amelyről némi átalakítás után belátható, hogy igaz, hiszen $k^2 - 2k - 1 = (k-1)^2 - 2 > 0$ valóban teljesül 4-től nagyobb természetes számokra. Ezzel az állítást igazoltuk $n = k + 1$ -re, ezért minden természetes számra igaz.

Matematikai indukciót alkalmazhatunk összetettebb oszthatósági feladatok bizonyítására.

2.24. Példa. Igazoljuk matematikai indukcióval, hogy $84 \mid 4^{2n} - 3^{2n} - 7$, minden természetes szám esetén.

1° Igazoljuk az állítást $n = 1$ -re.

$4^{2 \cdot 1} - 3^{2 \cdot 1} - 7 = 16 - 9 - 7 = 0$, vagyis az oszthatóság $n = 1$ -re igaz.

2° Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$ -ra, azaz feltesszük, hogy van olyan ℓ egész szám, hogy $4^{2k} - 3^{2k} - 7 = 84\ell$.

3° Igazoljuk most az állítást $n = k + 1$ -re.

Most azt kell belátnunk, hogy a $4^{2k+2} - 3^{2k+2} - 7$ kifejezés is osztható 84-gyel. Ekkor

$$\begin{aligned} 4^{2k+2} - 3^{2k+2} - 7 &= 16 \cdot 4^{2k} - 9 \cdot 3^{2k} - 7 = \\ &= 9(4^{2k} - 3^{2k} - 7) + 7 \cdot 4^{2k} + 8 \cdot 7 = 9 \cdot 84\ell + 7(4^{2k} + 8). \end{aligned}$$

Mivel $84 = 7 \cdot 12$, ezért ha igazolni tudjuk, hogy $4^{2k} + 8$ osztható 12-vel, akkor az állítást igazoltuk. Alkalmazzunk ismét matematikai indukciót.

1° Igazoljuk az állítást $k = 1$ -re.

$4^{2 \cdot 1} + 8 = 16 + 8 = 24 = 2 \cdot 12$, vagyis az oszthatóság $k = 1$ -re igaz.

2° Tegyük fel, hogy az állítás igaz $k = m$ -re, azaz feltesszük, hogy van olyan p egész szám, hogy $4^{2p} + 8 = 12p$.

3° Igazoljuk most az állítást $k = m + 1$ -re.

Most azt kell belátnunk, hogy a $4^{2p+2} + 8$ kifejezés is osztható 12-vel. Ekkor

$$4^{2p+2} + 8 = 16 \cdot 4^{2p} + 8 = 16(4^{2p} + 8) - 15 \cdot 8 = 16 \cdot 12p - 10 \cdot 12 = 12(16p - 10),$$

vagyis az oszthatóság minden k természetes számra teljesül, ezért

$$4^{2k+2} - 3^{2k+2} - 7 = 9 \cdot 84\ell + 7 \cdot 12p = 84(9\ell + p),$$

tehát az eredeti oszthatóság igaz $n = k + 1$ -re, ezért minden természetes számra teljesül.

Matematikai indukciót alkalmazhatunk bizonyos szöveges feladatok megoldására is.

2.25. Példa. Vegyünk fel egy síkon n nem egy egyenesre illeszkedő pontot. Bizonyítsuk be matematikai indukcióval, hogy ezek a pontok legalább n különböző egyenest határoznak meg. A feladat értelme szerint $n \geq 3$.

1° Ha $n = 3$, és a pontok nem esnek egy egyenesre, akkor meghatároznak egy háromszöget, amelynek adott három oldalegyenese. Ekkor tehát igaz az állítás.

2° Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén k darab nem egy egyenesen fekvő pont meghatároz legalább k különböző egyenest. Ezek nem tartozhatnak egy sugársorhoz, mert k pont legfeljebb $k - 1$ egy ponton átmenő egyenest határozhat meg.

3° Vegyünk fel egy további, az eddigiektől különböző pontot, az $n = k + 1$ -ediket. Ez nem lehet rajta a k pont meghatározta k különböző egyenes mindegyikén, mert akkor azok egy sugársorhoz tartoznának, ez pedig láttuk nem lehetséges. Ezért van olyan pont az első k között, amelyik a $k + 1$ -edikkel újabb egyenest határoz meg. Ezt kellett bizonyítanunk.

FELADATOK.

1. Igazoljuk, hogy $24 \mid 2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5$, minden n természetes szám esetén.

Megoldás. 1° Igazoljuk az állítást $n = 1$ -re.

$2 \cdot 7^1 + 3 \cdot 5^1 - 5 = 14 + 15 - 5 = 24 = 1 \cdot 24$, tehát az oszthatóság $n = 1$ -re igaz.

2° Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$ -ra, azaz feltesszük, hogy van olyan ℓ egész szám, hogy $2 \cdot 7^k + 3 \cdot 5^k - 5 = 24\ell$.

3° Igazoljuk most az állítást $n = k + 1$ -re.

Most azt kell belátnunk, hogy a $2 \cdot 7^{k+1} + 3 \cdot 5^{k+1} - 5$ kifejezés is osztható 24-gyel. Ekkor

$$\begin{aligned} 2 \cdot 7^{k+1} + 3 \cdot 5^{k+1} - 5 &= 7 \cdot 2 \cdot 7^k + 5 \cdot 3 \cdot 5^k - 5 = \\ &= 7(2 \cdot 7^k + 3 \cdot 5^k - 5) - 2 \cdot 3 \cdot 5^k + 30 = 7 \cdot 24\ell - 6(5^k - 5). \end{aligned}$$

Ha igazolni tudjuk, hogy $5^k - 5$ osztható 4-gyel, akkor az állítást igazoltuk, hiszen $24 = 6 \cdot 4$. Alkalmazzunk ismét matematikai indukciót.

1° Igazoljuk az állítást $k = 1$ -re.

$5^1 - 5 = 0 = 0 \cdot 4$, vagyis az oszthatóság $k = 1$ -re igaz.

2° Tegyük fel, hogy az állítás igaz $k = m$ -re, azaz feltesszük, hogy van olyan p egész szám, hogy $5^m - 5 = 4p$.

3° Igazoljuk most az állítást $k = m + 1$ -re.

Most azt kell belátnunk, hogy az $5^{m+1} - 5$ kifejezés is osztható 4-gyel. Ekkor

$$5^{m+1} - 5 = 5 \cdot 5^m - 5 = 5(5^m - 5) + 20 = 5 \cdot 4p + 20 = 4(5p + 5),$$

vagyis az oszthatóság minden k természetes számra teljesül, ezért

$$2 \cdot 7^{k+1} + 3 \cdot 5^{k+1} - 5 = 7 \cdot 24\ell - 24p = 24(7\ell - p),$$

tehát az eredeti oszthatóság igaz $n = k + 1$ -re, ezért minden $n \in \mathbb{N}$ esetén teljesül.

2. Igazoljuk, hogy $9 \mid n \cdot 4^{n+1} - (n+1)4^n + 1$, minden n természetes szám esetén.

Megoldás. 1° Igazoljuk az állítást $n = 1$ -re.

$1 \cdot 4^{1+1} - (1+1)4^1 + 1 = 16 - 2 \cdot 4 + 1 = 9$, tehát az oszthatóság $n = 1$ -re igaz.

2° Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$ -ra, azaz feltesszük, hogy van olyan ℓ egész szám, hogy $k \cdot 4^{k+1} - (k+1)4^k + 1 = 9\ell$.

3° Igazoljuk most az állítást $n = k + 1$ -re.

Most azt kell belátnunk, hogy a $(k+1) \cdot 4^{k+2} - (k+2)4^{k+1} + 1$ kifejezés is osztható 9-cel. Ekkor

$$\begin{aligned} (k+1) \cdot 4^{k+2} - (k+2)4^{k+1} + 1 &= 4k \cdot 4^{k+1} + 4^{k+2} - 4(k+1)4^k - 4^{k+1} + 4 - 3 = \\ &= 4(k \cdot 4^{k+1} - (k+1)4^k + 1) + 4^{k+2} - 4^{k+1} - 3 = 4 \cdot 9\ell + 4^{k+2} - 4^{k+1} - 3. \end{aligned}$$

Ha igazolni tudjuk, hogy $4^{k+2} - 4^{k+1} - 3$ osztható 9-cel, akkor az állítást igazoltuk. Alkalmazzunk ismét matematikai indukciót.

1° Igazoljuk az állítást $k = 1$ -re.

$4^{1+2} - 4^{1+1} - 3 = 64 - 16 - 3 = 45 = 9 \cdot 5$, vagyis az oszthatóság $k = 1$ -re igaz.

2° Tegyük fel, hogy az állítás igaz $k = m$ -re, azaz feltesszük, hogy van olyan p egész szám, hogy $4^{m+2} - 4^{m+1} - 3 = 9p$.

3^o Igazoljuk most az állítást $k = m + 1$ -re.

Most azt kell belátnunk, hogy a $4^{m+3} - 4^{m+2} - 3$ kifejezés is osztható 9-cel. Ekkor

$$\begin{aligned} 4^{m+3} - 4^{m+2} - 3 &= 4 \cdot 4^{m+2} - 4 \cdot 4^{m+1} - 12 + 9 = \\ &= 4(4^{m+2} - 4^{m+1} - 3) + 9 = 4 \cdot 9p + 9 = 9(4p + 1), \end{aligned}$$

vagyis az oszthatóság minden k természetes számra teljesül, ezért

$$(k + 1) \cdot 4^{k+2} - (k + 2)4^{k+1} + 1 = 4 \cdot 9\ell + 9p = 9(4\ell + p),$$

tehát az eredeti oszthatóság igaz $n = k + 1$ -re, ezért minden $n \in \mathbf{N}$ esetén teljesül.

3. Igazoljuk, hogy az $F_n = 2^{2^n} + 1$ Fermat-féle szám (a tízes számrendszerben felírva) 7-esre végződik minden $n \geq 2$ természetes szám esetén.

Megoldás. 1^o Az állítás $n = 2$ -re igaz, mert a $F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17$.

2^o Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$ -ra, azaz $F_k = 2^{2^k} + 1 = 10\ell + 7$.

3^o Igazoljuk most az állítást $n = k + 1$ -re, azaz lássuk be, hogy F_{k+1} is 7-esre végződik. Ekkor

$$\begin{aligned} F_{k+1} &= 2^{2^{k+1}} + 1 = 2^{2 \cdot 2^k} + 1 = \left(2^{2^k}\right)^2 + 1 = \left(2^{2^k} + 1 - 1\right)^2 + 1 = (10\ell + 7 - 1)^2 + 1 = \\ &= (10\ell + 6)^2 + 1 = 100\ell^2 + 120\ell + 36 + 1 = 10(10\ell^2 + 12\ell + 3) + 7, \end{aligned}$$

tehát F_{k+1} is 7-esre végződik, így az állítást igazoltuk $n = k + 1$ -re, ezért minden természetes számra igaz.

4. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}$, minden n természetes számra.

Megoldás. 1^o Igazoljuk az állítást $n = 1$ -re.

$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$, vagyis az állítás $n = 1$ -re igaz.

2^o Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$ -ra: $\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} \geq \frac{1}{2}$.

3^o Igazoljuk most az állítást $n = k + 1$ -re. Azt kell valójában belátnunk, hogy

$\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{2(k+1)} \geq \frac{1}{2}$ is igaz. Ekkor

$$\begin{aligned} \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{2(k+1)} &= \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} \geq \\ &\geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{2k+2+2k+1-2(2k+1)}{2(2k+1)(k+1)} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{4k+3-4k-2}{2(2k+1)(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2k+1)(k+1)} \geq \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

mivel $\frac{1}{2(2k+1)(k+1)} > 0$. Ezzel beláttuk, hogy az állítás igaz $n = k + 1$ -re, ezért minden természetes számra teljesül.

5. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n-1)}{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdots (4n+1)} < \sqrt{\frac{3}{4n+3}}$, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Megoldás. 1° Igazoljuk az állítást $n = 1$ -re. Azt kell igazolni, hogy $\frac{3}{5} < \sqrt{\frac{3}{7}}$. Mivel ekvivalens átalakítás után következik, hogy

$$\frac{3}{5} < \sqrt{\frac{3}{7}} \iff \sqrt{\frac{9}{25}} < \sqrt{\frac{3}{7}} \iff \frac{9}{25} < \frac{3}{7} \iff \frac{63}{7 \cdot 25} < \frac{75}{7 \cdot 25},$$

így az állítás $n = 1$ -re igaz.

2° Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$ -ra: $\frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4k-1)}{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdots (4k+1)} < \sqrt{\frac{3}{4k+3}}$.

3° Igazoljuk most az állítást $n = k + 1$ -re. Azt kell valójában belátnunk, hogy $\frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4k+3)}{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdots (4k+5)} < \sqrt{\frac{3}{4k+7}}$ is igaz. Ekkor

$$\begin{aligned} \frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4k-1)(4k+3)}{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdots (4k+1)(4k+5)} &< \sqrt{\frac{3}{4k+3}} \cdot \frac{4k+3}{4k+5} = \sqrt{\frac{3}{4k+3}} \cdot \sqrt{\frac{(4k+3)^2}{(4k+5)^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{3}{4k+3} \cdot \frac{(4k+3)^2}{(4k+5)^2}} = \sqrt{\frac{3}{4k+7} \cdot \frac{(4k+3)(4k+7)}{(4k+5)^2}} < \sqrt{\frac{3}{4k+7}} \end{aligned}$$

teljesül, hiszen

$$\frac{(4k+3)(4k+7)}{(4k+5)^2} = \frac{16k^2 + 40k + 25 - 4}{16k^2 + 40k + 25} = 1 - \frac{4}{(4k+5)^2} < 1.$$

Ezzel beláttuk, hogy az egyenlőtlenség igaz $n = k + 1$ -re, ezért minden természetes számra teljesül.

6. Igazoljuk matematikai indukcióval, hogy $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$, minden $n \geq 2$ természetes számra.

Megoldás. 1° Az állítás $n = 2$ -re igaz, mert az $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$ igaz állítás.

2° Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$ -ra, azaz $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k}$.

3° Igazoljuk most az egyenlőtlenséget $n = k + 1$ -re, azaz hogy $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}$. Induljunk ki a bal oldalból. Ekkor

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} &> \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \\ &= \frac{\sqrt{k}\sqrt{k+1} + 1}{\sqrt{k+1}} > \frac{\sqrt{k}\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1}, \end{aligned}$$

ahol a $k + 1 > k$ egyenlőtlenség minden k természetes számra teljesül. Ezzel az egyenlőtlenséget igazoltuk $n = k + 1$ -re, ezért minden természetes számra igaz.

7. Igazoljuk matematikai indukcióval, hogy $n! \geq 2^n$, minden $n \geq 4$ természetes számra.

Megoldás. 1° Az állítás $n = 4$ -re igaz, mert a $4! \geq 2^4$, azaz a $24 > 16$ igaz állítás.

2° Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$ -ra, azaz $k! \geq 2^k$.

3° Igazoljuk most az egyenlőtlenséget $n = k + 1$ -re, azaz hogy $(k + 1)! \geq 2^{k+1}$. Induljunk ki a bal oldalból. Ekkor

$$(k + 1)! = (k + 1)k! \geq (k + 1)2^k > 2 \cdot 2^k = 2^{k+1},$$

ahol a $k + 1 > 2$ egyenlőtlenség minden $k \geq 4$ természetes számra teljesül. Ezzel az egyenlőtlenséget igazoltuk $n = k + 1$ -re, ezért minden természetes számra igaz.

8. Igazoljuk a Bernoulli-féle egyenlőtlenséget:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx, \quad x > -1,$$

majd az általánosítást, ha az x_i számok mindegyike azonos előjelű:

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n, \quad x_i > -1, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Megoldás. Tekintsük először a Bernoulli-féle egyenlőtlenséget.

1° $n = 1$ esetén $1 + x = 1 + x$, azaz tulajdonképpen az egyenlőség teljesül.

2° Tegyük fel, hogy a Bernoulli-féle egyenlőtlenség teljesül $n = k$ -ra, azaz hogy $(1 + x)^k \geq 1 + kx$, $x > -1$.

3° Igazoljuk az állítást $n = k + 1$ -re, azaz hogy $(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)x$, $x > -1$ is igaz. Ekkor

$$(1 + x)^{k+1} = (1 + x)(1 + x)^k \geq (1 + x)(1 + kx) = 1 + (k + 1)x + kx^2 \geq 1 + (k + 1)x,$$

mivel $kx^2 \geq 0$. Ezzel a Bernoulli-féle egyenlőtlenség igazolást nyert.

Tekintsük most az általános Bernoulli-féle egyenlőtlenséget.

1° $n = 1$ esetén $1 + x_1 = 1 + x_1$, azaz tulajdonképpen az egyenlőség teljesül.

2° Tegyük fel, hogy az általános Bernoulli-féle egyenlőtlenség teljesül $n = k$ -ra:

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_k) \geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k, \quad x_i > -1, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

3° Igazoljuk az állítást $n = k + 1$ -re, azaz hogy

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_{k+1}) \geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1},$$

$x_i > -1$, $i = 1, 2, \dots, k + 1$ is igaz. Ekkor

$$\begin{aligned} (1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_k)(1 + x_{k+1}) &\geq (1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k)(1 + x_{k+1}) = \\ &= 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} + x_1x_{k+1} + x_2x_{k+1} + \dots + x_kx_{k+1} \geq \\ &\geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1}, \quad \text{mivel} \quad x_1x_{k+1} + x_2x_{k+1} + \dots + x_kx_{k+1} \geq 0 \end{aligned}$$

ugyanis az x_i számok mindegyike azonos előjelű. Ezzel az általános Bernoulli-féle egyenlőtlenség igazolást nyert.

9. Igazoljuk, hogy bármely $n \geq 2$ természetes szám esetén $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq \frac{3}{4}$.

Megoldás. Mivel az indukciós lépés itt nem alkalmazható, módosítjuk az állítást, és helyette egy élesebb (erősebb) állítást fogalmazunk meg:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq \frac{3}{4} - \frac{1}{n}.$$

1° Az állítás $n = 2$ -re igaz, mert az $\frac{1}{2^2} \leq \frac{3}{4} - \frac{1}{2}$, azaz az $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$ igaz állítás.

2° Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$ -ra, azaz $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} \leq \frac{3}{4} - \frac{1}{k}$.

3° Igazoljuk most az egyenlőtlenséget $n = k + 1$ -re, azaz hogy

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{3}{4} - \frac{1}{k+1}.$$

Induljunk ki a bal oldalból. Ekkor

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{3}{4} - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{3}{4} - \frac{1}{k+1},$$

és ez teljessé teszi a bizonyítást. Ennek amódszernek az a lényege, hogy nem magát az állítást sikerült igazolni, hanem egy élesebb (erősebb) állítást.

10. Egy kör szelői a körlemez tartományokra bontják. Bizonyítsuk be, hogy a tartományok kiszínezhetők két színnel úgy, hogy minden tartomány egyszínű, és bármely két tartomány, amelynek van közös határszakasza, különböző színű legyen.

Megoldás. Jelölje n a kör szelőinek számát.

1° $n = 1$ esetén a kör egyetlen szelője a körlemez két tartományra bontja, amelynek közös határszakasza a szelőnek a kör belsejébe eső darabja. Színezzük most az egyik tartományt az egyik színnel, a másikat pedig a másik színnel. Egy szelő esetén tehát az állítás igaz.

2° $n = k$, azaz tegyük fel, hogy meghúztunk k darab szelőt, és megvalósítottuk a kívánt színezést.

3° $n = k + 1$ -re kell igazolni az állítást. Vegyük fel tehát a $(k + 1)$ -edik szelőt, és egyik oldalán keletkező tartományok színezését hagyjuk meg, a másik oldalán levő tartományok mindegyikének színezését pedig változtassuk a másik színre. Ezzel elérjük, hogy ha a $(k + 1)$ -edik egyenes egy tartományt két részre osztott, akkor a két rész különböző színre lesz kifestve, továbbá azt is, hogy két olyan tartományt, amelyeknek közös határszakasza van, továbbra is különböző színű lesz. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

3. Racionális algebrai kifejezések

3.1. Algebrai mennyiségek és kifejezések

Az ábécé betűivel bármilyen értékű számokat jelölhetünk. A számokat helyettesítő betűket és a számokat *algebrai mennyiségeknek* nevezzük. Ha az algebrai mennyiségeket, valamint ezek egész kitevőjű hatványát és gyökét a négy alapművelet véges számú alkalmazásával kapcsoljuk össze, *algebrai kifejezést* kapunk. Ilyen például a jól ismert $2(a + b)$ kifejezés, amely a téglalap területének képlete, ha a és b a téglalap különböző oldalai, vagy az $\frac{a \cdot h}{2}$ kifejezés, amely a háromszög területképlete, ha a a háromszög alapja, h pedig a hozzá tartozó magasság, valamint a $\sqrt{a^2 + b^2}$ kifejezés, amellyel a derékszögű háromszög átfogóját tudjuk kiszámolni, amennyiben a és b a derékszögű háromszög befogói.

Egy algebrai kifejezést akkor nevezünk *racionális algebrai kifejezésnek* (vagy *algebrai törtkifejezésnek*), ha abban csak racionális algebrai műveletek szerepelnek, vagyis csak az összeadás, kivonás, szorzás (ezzel egyidejűleg a hatványozás) és az osztás művelete. A pontos definíció a következőképpen adható meg:

3.1. Definíció.

1° A valós számok szimbólumai $(1, 3, 0, -2, \frac{3}{4}, \sqrt{2}, \dots)$ racionális algebrai kifejezések.

2° A változók szimbólumai $(x, y, z, a, b, c, \dots)$ racionális algebrai kifejezések.

3° Ha A és B racionális algebrai kifejezések, akkor $(A + B)$, $(A - B)$, $A \cdot B$ és $\frac{A}{B}$ is racionális algebrai kifejezések.

4° Racionális algebrai kifejezést csak az 1°, 2° és 3° szabályok véges számú alkalmazásával kaphatunk.

3.1. Példa. A fenti definíció értelmében $\sqrt{3}$, $3a - b$, $\frac{x + y}{x - y}$ és $\frac{ax^2 + bx + c}{x^3 + 1}$ algebrai törtkifejezések, viszont \sqrt{x} és $2 + 3\sqrt{a}$ nem azok, csupán algebrai kifejezések, mert ezekben szerepel a változók gyökvonása is.

Ha az algebrai mennyiségeket, valamint ezek egész kitevőjű hatványát és gyökét csak a szorzás és osztás véges számú alkalmazásával kapcsoljuk össze, *egytagú algebrai kifejezést* (*monomot*) kapunk. A betű vagy betűcsoportok előtti számot *együtthatónak* nevezzük.

Monomok például az $5x$, $\sqrt{3}a^2$, $-4\sqrt{xy^2z^4}$ és $\frac{2ab^2\sqrt{c}}{d^3}$ algebrai kifejezések, amelyekben rendre 5 , $\sqrt{3}$, -4 és 2 az együttható.

Ha az algebrai kifejezés nevezőjében nem szerepel változó, akkor azt *algebrai egész kifejezésnek* nevezzük. Az egytagú algebrai egész kifejezéseket az összeadás és kivonás műveletével összekapcsolva, *többtagú algebrai egész kifejezéseket* (*polinomokat*) kaphatunk. Ilyenek például a 7 , $-\sqrt{5}$, $2x^2 + 3x + 1$, $x + y$, amelyek közül az első kettő *állandó* (*konsztans*), a harmadik *egyváltozós*, a negyedik pedig *kétváltozós*. A többtagú algebrai egész kifejezésben az összeadás és kivonás sorrendjét felcserélhetjük. A tagok számát tekintve

az első kettő *egytágú kifejezés (monom)*, a negyedik *kéttágú kifejezés (binom)*, a harmadik pedig *háromtágú kifejezés (trinom)*. A többtágú egész algebrai kifejezésben az összeadás sorrendjét felcserélhetjük.

Valamely algebrai egész kifejezés *fokszáma* egyenlő az egy-egy tagban előforduló betűtényezők hatványkitevőinek összege közül a legnagyobbval.

Azokat az egytágú kifejezéseket, amelyek legfeljebb együtthatójukban különböznek, *egynemű tagoknak* nevezzük. Egynemű egytágúakat úgy adunk össze, hogy az együtthatóikat összeadjuk, a betűtényezőket pedig változatlanul leírjuk. Ezt más szóval összevonásnak is szokás nevezni.

3.2. Nevezetes alakú szorzatok - algebrai azonosságok

Minden algebrai törtkifejezést felírhatunk több különböző alakban. Ilyen például az $a(b + c) = ab + ac$. Az ilyen egyenlőségeket, amelyek a bennük szereplő változók minden lehetséges értékére igazak, *azonosságoknak* nevezzük. Ebben a fejezetben az algebrai egész kifejezések *azonos átalakításaival (identikus transzformációival)* foglalkozunk, amelyek az összeadás, kivonás és szorzás műveletek tulajdonságaiból következnek. Az első ilyen szabály a szorzás műveletének az összeadásra és kivonásra vonatkozó disztributív tulajdonságát fejezi ki.

3.1. Tétel. *Ha A , B , C és D algebrai kifejezések, akkor*

$$1^\circ A(B + C) = AB + AC,$$

$$2^\circ A(B - C) = AB - AC,$$

$$3^\circ (A + B)(C + D) = AC + AD + BC + BD.$$

3.2. Példa. A disztributív törvény alkalmazásával tudunk polinomokat összeszorozni, mint például $2x(a + b) = 2ax + 2bx$ esetén, illetve polinomokat szorzatra bontani, ha ellenkező irányban használjuk a szabályt, mint például az $ax + ay - az = a(x + y - z)$ esetben.

3.2. Tétel (Négyzetek különbsége). *Az A és B algebrai kifejezésekre érvényes, hogy*

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B).$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a jobb oldalon a disztributív és a kommutatív szabályt. Ekkor

$$(A - B)(A + B) = A^2 + AB - BA - B^2 = A^2 + AB - AB - B^2 = A^2 - B^2.$$

◇

3.3. Példa. A négyzetek különbségét felhasználva bonthatjuk tényezőkre a következő kifejezéseket:

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &= (x - 2)(x + 2), \\ (2x + 3)^2 - (x - 4)^2 &= (2x + 3 - x + 4)(2x + 3 + x - 4) = (x + 7)(3x - 1), \\ x^4 - 16 &= (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4). \end{aligned}$$

3.3. Tétel (Binom négyzete). *Ha A és B algebrai kifejezések, akkor*

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \quad \text{és} \quad (A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a bal oldalon a disztributív, majd a kommutatív szabályt. Ekkor

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + AB + AB + B^2 = A^2 + 2AB + B^2,$$

$$(A-B)^2 = (A-B)(A-B) = A^2 - AB - BA + B^2 = A^2 - AB - AB + B^2 = A^2 - 2AB + B^2.$$

◇

3.4. Példa. A binom négyzet, vagyis a teljes négyzet képlete alapján adódik, hogy

$$\begin{aligned}(ax - by)^2 &= a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2, \\ 101^2 &= (100 + 1)^2 = 10000 + 200 + 1 = 10201.\end{aligned}$$

3.4. Tétel (Trinom négyzete). Ha A , B és C algebrai kifejezések, akkor

$$(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a bal oldalon a disztributív, majd a kommutatív szabályt. Ekkor

$$\begin{aligned}(A+B+C)^2 &= (A+B+C)(A+B+C) = A^2 + AB + AC + BA + B^2 + BC + CA + CB + C^2 = \\ &= A^2 + AB + AC + AB + B^2 + BC + AC + BC + C^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC.\end{aligned}$$

◇

3.5. Példa. A trinom négyzet képlete alapján adódik, hogy

$$\left(2x - y + \frac{z}{2}\right)^2 = 4x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} - 4xy + 2xz - yz.$$

3.5. Tétel (Köbök összege és különbsége). Ha A és B algebrai kifejezések, akkor

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2) \quad \text{és} \quad A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2).$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a bal oldalon a disztributív, majd a kommutatív szabályt. Ekkor

$$(A + B)(A^2 - AB + B^2) = A^3 - A^2B + AB^2 + A^2B - AB^2 + B^3 = A^3 + B^3,$$

$$(A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 + A^2B + AB^2 - A^2B - AB^2 - B^3 = A^3 - B^3.$$

◇

3.6. Példa. A köbök összegének és különbségének képlete alapján bonthatók tényezőkre az $x^3 - 8$ és $(x + 1)^3 + 125$ egész algebrai kifejezések a következőképpen:

$$\begin{aligned}x^3 - 8 &= x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4), \\ (x + 1)^3 + 125 &= (x + 1)^3 + 5^3 = (x + 1 + 5)((x + 1)^2 - 5(x + 1) + 5^2) = \\ &= (x + 6)(x^2 + 2x + 1 - 5x - 5 + 25) = (x + 6)(x^2 - 3x + 21).\end{aligned}$$

3.6. Tétel (Binom köbe). Ha A és B algebrai kifejezések, akkor

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \quad \text{és} \quad (A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a bal oldalon a disztributív, majd a kommutatív szabályt. Ekkor

$$\begin{aligned}(A+B)^3 &= (A+B)^2(A+B) = (A^2+2AB+B^2)(A+B) = \\ &= A^3 + A^2B + 2A^2B + 2AB^2 + AB^2 + B^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3, \\ (A-B)^3 &= (A-B)^2(A-B) = (A^2-2AB+B^2)(A-B) = \\ &= A^3 - A^2B - 2A^2B + 2AB^2 + AB^2 - B^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3.\end{aligned}$$

◇

3.7. Példa. A binom köbének képletével kiszámíthatjuk például, hogy

$$99^3 = (100-1)^3 = 100^3 - 3 \cdot 100^2 \cdot 1 + 3 \cdot 100 \cdot 1^2 - 1^3 = 1000000 - 30000 + 300 - 1 = 970299,$$

vagy megállapíthatjuk, hogy

$$(x+2)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8,$$

illetve beláthatjuk, hogy

$$a^3 - 9a^2 + 27a - 27 = (a-3)^3.$$

FELADATOK.

Bontsuk tényezőkre a következő algebrai egész kifejezéseket.

1. $x^4 - 2x^2y + y^2 - z^2 = ?$

Megoldás.

$$\begin{aligned}x^4 - 2x^2y + y^2 - z^2 &= (x^4 - 2x^2y + y^2) - z^2 = \\ &= (x^2 - y)^2 - z^2 = (x^2 - y - z)(x^2 - y + z).\end{aligned}$$

2. $2pq - (r^2 - p^2 - q^2) = ?$

Megoldás.

$$\begin{aligned}2pq - (r^2 - p^2 - q^2) &= 2pq - r^2 + p^2 + q^2 = (p^2 + 2pq + q^2) - r^2 = \\ &= (p+q)^2 - r^2 = (p+q-r)(p+q+r).\end{aligned}$$

3. $x^{19} - x = ?$

Megoldás.

$$\begin{aligned}x^{19} - x &= x(x^{18} - 1) = x(x^9 - 1)(x^9 + 1) = \\ &= x(x^3 - 1)(x^6 + x^3 + 1)(x^3 + 1)(x^6 - x^3 + 1) = \\ &= x(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^6+x^3+1)(x^6-x^3+1).\end{aligned}$$

4. $a^5 - 2401a = ?$

Megoldás.

$$a^5 - 2401a = a(a^4 - 2401) = a(a^2 - 49)(a^2 + 49) = a(a - 7)(a + 7)(a^2 + 49).$$

5. $mnx^2 + (mq + np)x + pq = ?$

Megoldás.

$$\begin{aligned} mn x^2 + (mq + np)x + pq &= mn x^2 + m q x + n p x + p q = \\ &= m x (n x + q) + p (n x + q) = (n x + q)(m x + p). \end{aligned}$$

6. $x^4 + x^2 + 1 = ?$

Megoldás.

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 1 &= x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = \\ &= (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x) = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1). \end{aligned}$$

7. $a^4 + 4 = ?$

Megoldás.

$$\begin{aligned} a^4 + 4 &= a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 - (2a)^2 = \\ &= (a^2 + 2 - 2a)(a^2 + 2 + 2a) = (a^2 - 2a + 2)(a^2 + 2a + 2). \end{aligned}$$

8. * $x^4 + 5x^2y^2 + 6y^4 = ?$

Megoldás.

$$\begin{aligned} x^4 + 5x^2y^2 + 6y^4 &= x^4 + 6x^2y^2 + 9y^4 - x^2y^2 - 3y^4 = \\ &= (x^4 + 6x^2y^2 + 9y^4) - y^2(x^2 - 3y^2) = \\ &= (x^2 + 3y^2)^2 - y^2(x^2 - 3y^2) = \\ &= (x^2 + 3y^2)(x^2 + 3y^2 - y^2) = \\ &= (x^2 + 3y^2)(x^2 + 2y^2). \end{aligned}$$

9. * $2b^4 + b^3 + 4b^2 + b + 2 = ?$

Megoldás.

$$\begin{aligned} 2b^4 + b^3 + 4b^2 + b + 2 &= (2b^4 + 2b^2) + (b^3 + 2b^2) + (b + 2) = \\ &= 2b^2(b^2 + 1) + b^2(b + 2) + 1 \cdot (b + 2) = \\ &= 2b^2(b^2 + 1) + (b + 2)(b^2 + 1) = \\ &= (b^2 + 1)(2b^2 + b + 1). \end{aligned}$$

10. ** $a^4 + 2a^3y - 3a^2y^2 - 4ay^3 - y^4 = ?$

Megoldás.

$$\begin{aligned}
 a^4 + 2a^3y - 3a^2y^2 - 4ay^3 - y^4 &= (a^4 + 2a^3y + a^2y^2) - 4a^2y^2 - 4ay^3 - y^4 \\
 &= a^2(a^2 + 2ay + y^2) - y^2(4a^2 + 4ay + y^2) = \\
 &= a^2(a + y)^2 - y^2(2a + y)^2 = \\
 &= (a(a + y) - y(2a + y))(a(a + y) + y(2a + y)) = \\
 &= (a^2 + ay - 2ay - y^2)(a^2 + ay + 2ay + y^2) = \\
 &= (a^2 - ay - y^2)(a^2 + 3ay + y^2).
 \end{aligned}$$

3.3. Egyváltozós polinomok

Ebben a fejezetben olyan *algebrai egész kifejezésekről* (*polinomokról*) lesz szó, amelyben egy változó szerepel. Az ilyen kifejezéseket rendezéssel mindig a

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

kanonikus alakra vezethetjük, ahol n természetes szám vagy nulla, a_0, a_1, \dots, a_n pedig valós számok. A $P(x)$ kifejezést az x változó valós együtthatós polinomjának nevezzük, amelyben az a_0, a_1, \dots, a_n számokat a polinom *együtthatóinak* nevezzük. Ha $a_n \neq 0$, akkor a $P(x)$ polinom n -edfokú, és a_n a $P(x)$ polinom *főegyütthatója*. Bármelyik $i = 1, 2, \dots, n$ esetén $a_i x^i$ a polinom i -edfokú *tagja*, a_i neve pedig az i -edfokú tag *együtthatója*; a_0 -t a polinom *nulladfokú tagjának* vagy *állandó tagjának* (esetleg szabad tagjának) nevezzük. A polinomokat kis vagy nagy latin betűkkel jelöljük. A jelölés tehát: $P(x), Q(x), p(x), P_1(x), \dots$, stb. lehet. Ha az a_0, a_1, \dots, a_n együtthatók racionális, illetve egész számok, akkor racionális együtthatós, illetve egész együtthatós polinomról beszélünk. Tekintsük sorba a következő polinomokat.

Ha $a_1 \neq 0$, akkor $P_1(x) = a_1 \cdot x + a_0$ elsőfokú (lineáris) polinom,

ahol a_1 az **elsőfokú (lineáris) tag együtthatója** a főegyüttható, a_0 pedig az **állandó tag**.

Ha $a_2 \neq 0$, akkor $P_2(x) = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$ másodfokú polinom,

ahol a_2 a **másodfokú tag együtthatója** a főegyüttható, a_1 az **elsőfokú (lineáris) tag együtthatója**, a_0 pedig az **állandó tag**.

Ha $a_3 \neq 0$, akkor $P_3(x) = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$ harmadfokú polinom,

ahol a_3 a **harmadfokú tag együtthatója** a főegyüttható, a_2 a **másodfokú tag együtthatója**, a_1 az **elsőfokú (lineáris) tag együtthatója**, a_0 pedig az **állandó tag**.

Ha $a_4 \neq 0$, akkor $P_4(x) = a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$ harmadfokú polinom,

ahol a_4 a **negyedfokú tag együtthatója** a főegyüttható, a_3 a **harmadfokú tag együtthatója**, a_2 a **másodfokú tag együtthatója**, a_1 az **elsőfokú (lineáris) tag együtthatója**, a_0 pedig az **állandó tag**.

A fenti polinomok mellett találkozunk nulladfokú polinomokkal is. Az $n = 0$ esetben a polinom alakja $P_0(x) = a_0$. Ezek a nullától különböző számok. A 0 számot is polinomnak tekintjük, ez lesz a *nullapolinom*, az egyetlen olyan polinom, amelynek fokszámát nem definiáljuk.

3.8. Példa. A $P(x) = x^2 - 2x = 1 \cdot x^2 + (-2) \cdot x + 0$ másodfokú polinomban a **másodfokú tag együtthatója** $1 \neq 0$, az **elsőfokú (lineáris) tag együtthatója** -2 , míg az **állandó tag** 0 .

3.9. Példa. A $Q(x) = -x^3 + x - \pi = -1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 0$ harmadfokú polinomban a **harmadfokú tag együtthatója** $-1 \neq 0$, a **másodfokú tag együtthatója** 0 , az **elsőfokú (lineáris) tag együtthatója** 1 , az **állandó tag** pedig π .

3.10. Példa. Az $R(x) = 3ax^2 + b^3x + a^5 = 3a \cdot x^2 + b^3 \cdot x + a^5$ polinom x szerint másodfokú, ahol a **másodfokú tag együtthatója** $3a$, az **elsőfokú (lineáris) tag együtthatója** b^3 , az **állandó tag** pedig a^5 .

Ugyanakkor az $R(x) = 3ax^2 + b^3x + a^5 = x \cdot b^3 + 0 \cdot b^2 + 0 \cdot b + 3ax^2 + a^4$ polinom b szerint harmadfokú, ahol a **harmadfokú tag együtthatója** 1 , a **másodfokú tag együtthatója** 0 , az **elsőfokú (lineáris) tag együtthatója** 0 , az **állandó tag** pedig $3ax^2 + a^4$.

Az $R(x) = 3ax^2 + b^3x + a^4 = 1 \cdot a^4 + 0 \cdot a^3 + 0 \cdot a^2 + x^2 \cdot a + b^3x$ polinom viszont a szerint negyedfokú, ahol a **negyedfokú tag együtthatója** 1 , a **harmadfokú tag együtthatója** 0 , a **másodfokú tag együtthatója** 0 , az **elsőfokú (lineáris) tag együtthatója** x^2 , az **állandó tag** pedig b^3x .

Ha

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

adott x változós valós együtthatós polinom, c pedig egy valós szám, akkor a

$$P(c) = a_n \cdot c^n + a_{n-1} \cdot c^{n-1} + \dots + a_2 \cdot c^2 + a_1 \cdot c + a_0$$

számot, melyet úgy kapunk, hogy a $P(x)$ polinom kifejezésében az x változót a c számmal helyettesítjük és a kijelölt műveleteket elvégezzük, a $P(x)$ *polinom értékének* nevezzük $x = c$ -ben.

3.11. Példa. A $P(x)$ polinom esetében $P(0) = a_0$, azaz a $P(0)$ érték mindig az adott polinom állandó tagját adja, a $P(1) = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0$ egyenlőség pedig azt jelenti, hogy a $P(1)$ érték egyenlő a polinom együtthatóinak összegével.

3.12. Példa. Ha $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 1$, akkor

$$\begin{aligned} P(0) &= 2 \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 + 1 = 0 + 0 + 0 + 1 = 1, \\ P(1) &= 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 1 = 2 - 3 - 5 + 1 = -5, \\ P(-1) &= 2 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) + 1 = \\ &= 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 - 5 \cdot (-1) + 1 = -2 - 3 + 5 + 1 = 1, \\ P(2) &= 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 1 = 2 \cdot 8 - 3 \cdot 4 - 5 \cdot 2 + 1 = \\ &= 16 - 12 - 10 + 1 = -5. \end{aligned}$$

3.2. Definíció. A

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

és

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

valós együtthatós polinomok pontosan akkor egyenlők, ha azonos fokúak, azaz $n = m$ és megfelelő együtthatóik megegyeznek, azaz $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ..., $a_n = b_n$.

3.13. Példa. A $P(x) = ax^2 + 2x - 2$ és $Q(x) = bx^3 + x^2 + 2x - 2$ polinomok akkor és csak akkor egyenlők, ha azonos fokúak, tehát $b = 0$, így mindkettő másodfokú és ha $a = 1$, mert ekkor megfelelő együtthatóik egyenlők.

Egyváltozós polinomokkal könnyen tudunk különböző alpműveleteket végezni és könnyen megállapíthatjuk, hogy egyváltozós valós polinomok összege, különbsége és szorzata is egyváltozós polinom. Egy polinomhoz polinomot úgy adunk hozzá, hogy a polinom minden egyes tagját saját előjelével hozzákapcsoljuk, s ha vannak egynemű tagok, azokat összevonjuk. Egy polinomból polinomot úgy vonunk ki, hogy a kivonandó polinom minden tagját ellenkező előjellel kapcsoljuk hozzá, s az egynemű tagokat (ha előfordulnak) összevonjuk. Monomot monommal úgy szorzunk, hogy az együtthatókat és az egyenlő alapú hatványokat is összeszorozzuk. Polinomot polinommal úgy szorzunk, hogy minden tagot minden taggal megszorozunk.

3.14. Példa. Ha $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$ és $Q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$, akkor

$$\begin{aligned}
 P(x) + Q(x) &= (x^3 - 2x^2 + x - 3) + (2x^3 + 3x^2 - 4x + 5) = \\
 &= 1 \cdot x^3 + (-2) \cdot x^2 + 1 \cdot x + (-3) + 2 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 + (-4) \cdot x + 5 = \\
 &= (1 + 2) \cdot x^3 + (-2 + 3) \cdot x^2 + (1 - 4) \cdot x + (-3 + 5) = \\
 &= 3 \cdot x^3 + 1 \cdot x^2 + (-3) \cdot x + 2 = \\
 &= 3x^3 + x^2 - 3x + 2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(x) - Q(x) &= (x^3 - 2x^2 + x - 3) - (2x^3 + 3x^2 - 4x + 5) = \\
 &= 1 \cdot x^3 + (-2) \cdot x^2 + 1 \cdot x + (-3) - 2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - (-4) \cdot x - 5 = \\
 &= (1 - 2) \cdot x^3 + (-2 - 3) \cdot x^2 + (1 + 4) \cdot x + (-3 - 5) = \\
 &= (-1) \cdot x^3 + (-5) \cdot x^2 + 5 \cdot x + (-8) = \\
 &= -x^3 - 5x^2 + 5x - 8.
 \end{aligned}$$

3.15. Példa. Ha $P(x) = x^3 + x - 3$ és $Q(x) = -x^3 + 3x^2 + x + 1$, akkor

$$\begin{aligned}
 P(x) + Q(x) &= (x^3 + x - 3) + (-x^3 + 3x^2 + x + 1) = \\
 &= 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x + (-3) + (-1) \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 1 = \\
 &= (1 - 1) \cdot x^3 + (0 + 3) \cdot x^2 + (1 + 1) \cdot x + (-3 + 1) = \\
 &= 0 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x + (-2) = \\
 &= 3x^2 + 2x - 2.
 \end{aligned}$$

3.16. Példa. Ha $P(x) = x^3 + 2x^2 + x - 3$ és $Q(x) = x^2 - x + 1$, akkor

$$\begin{aligned}
 P(x) + Q(x) &= (x^3 + 2x^2 + x - 3) + (x^2 - x + 1) = \\
 &= 1 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 + 1 \cdot x + (-3) + 0 \cdot x^3 + 1 \cdot x^2 + (-1) \cdot x + 1 = \\
 &= (1 + 0) \cdot x^3 + (2 + 1) \cdot x^2 + (1 - 1) \cdot x + (-3 + 1) = \\
 &= 1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 + 0 \cdot x + (-2) = \\
 &= x^3 + 3x^2 - 2.
 \end{aligned}$$

3.17. Példa. Ha $P(x) = x - 3$ és $Q(x) = x^2 + x + 1$, akkor

$$\begin{aligned}
 P(x) \cdot Q(x) &= (x - 3) \cdot (x^2 + x + 1) = \\
 &= (1 \cdot x + (-3)) \cdot (1 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 1) = \\
 &= 1 \cdot x \cdot 1 \cdot x^2 + 1 \cdot x \cdot 1 \cdot x + 1 \cdot x \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot x^2 - 3 \cdot 1 \cdot x - 3 \cdot 1 = \\
 &= (1 \cdot 1) \cdot x^3 + (-3 \cdot 1 + 1 \cdot 1) \cdot x^2 + (-3 \cdot 1 + 1 \cdot 1) \cdot x + (-3 \cdot 1) = \\
 &= 1 \cdot x^3 + (-2) \cdot x^2 + (-2) \cdot x + (-3) = \\
 &= x^3 - 2x^2 - 2x - 3.
 \end{aligned}$$

Könnyen belátható, hogy érvényes az alábbi állítás.

3.7. Tétel. Legyenek $P(x)$ és $Q(x)$ a nullapolinomtól különböző valós polinomok. A $P(x) \cdot Q(x)$ polinom foka egyenlő a $P(x)$ és $Q(x)$ polinomok fokainak összegével, viszont a $P(x) + Q(x)$ és $P(x) - Q(x)$ polinomok foka nem nagyobb a $P(x)$ és $Q(x)$ polinomok fokai közül a nagyobbiktól.

A valós polinomok osztása már sokkal bonyolultabb művelet. Ebben a vonatkozásban a valós együtthatós polinomok tulajdonságai az egész számok tulajdonságaira emlékeztetnek.

3.3. Definíció. Legyenek $P(x)$ és $Q(x)$ valós polinomok, ahol $Q(x)$ nem a nullapolinom. Ha van olyan $H(x)$ polinom, hogy $P(x) = Q(x) \cdot H(x)$, akkor azt mondjuk, hogy a $P(x)$ polinom osztható a $Q(x)$ polinommal, vagy a $Q(x)$ polinom a $P(x)$ polinom osztója (tényezője), maga a $H(x)$ polinom pedig a $P(x)$ polinom $Q(x)$ polinommal való osztásának hányadosa.

3.18. Példa. A $P(x) = x^3 - 1$ polinom osztható a $Q(x) = x - 1$ polinommal, mert $P(x) = x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = Q(x)(x^2 + x + 1)$, tehát az osztás hányadosa a $H(x) = x^2 + x + 1$ polinom.

3.19. Példa. A $P(x) = x^2 + 1$ polinom nem osztható a $Q(x) = x - 1$ polinommal, mert ha lenne olyan $H(x)$ polinom, hogy $P(x) = Q(x)H(x)$, azaz $x^2 + 1 = (x - 1)H(x)$, akkor ez az egyenlőség minden valós x értékre igaz lenne, azonban $x = 1$ esetén a bal oldal értéke 2, a jobb oldal értéke pedig 0, ami azt jelenti, hogy ilyen tulajdonságú $H(x)$ polinom nem létezik.

A polinomok osztásának művelete tehát nem mindig végezhető el a valós polinomok halmazában. Tekintsük először az alábbi állítást, amely a valós polinomok maradékos osztását fogalmazza meg.

3.8. Tétel. Bármely két $P(x)$, $Q(x)$ polinomhoz ($Q(x) \neq 0$) található olyan $H(x)$ és $R(x)$ polinom, hogy

$$P(x) = Q(x)H(x) + R(x),$$

ahol $R(x)$ fokszáma vagy kisebb $H(x)$ fokszámánál, vagy $R(x) = 0$. Az ezen feltételnek eleget tevő $H(x)$ és $R(x)$ polinom egyértelműen meghatározott.

3.4. Definíció. A fenti tételben szereplő $H(x)$ polinomot a $P(x)$ polinom $Q(x)$ polinommal való osztásából adódó hányadosának, $R(x)$ -et ezen osztás maradékának nevezzük. Amennyiben $R(x) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy a $P(x)$ polinom osztható a $Q(x)$ polinommal, illetve a $Q(x)$ és $H(x)$ polinomok osztói a $P(x)$ polinomnak:

$$Q(x) | P(x) \quad \text{és} \quad H(x) | P(x).$$

Adott polinomok osztásának hányadosát és maradékát kétféle módon is meghatározhatjuk. Az egyik módszer a *határozatlan együtthatók módszere*.

3.20. Példa. Osszuk el a $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 5$ polinomot a $Q(x) = x^2 + 2x - 3$ polinommal. Az osztás hányadosa másodfokú polinom kell, hogy legyen, a maradék pedig legfeljebb elsőfokú polinom, ezért keressük ezeket a polinomokat $H(x) = ax^2 + bx + c$, illetve $R(x) = dx + e$ alakban. Ekkor teljesülnie kell az

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 5 = (x^2 + 2x - 3)(ax^2 + bx + c) + dx + e$$

egyenlőségnek, ahonnan

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 5 = ax^4 + (2a + b)x^3 + (-3a + 2b + c)x^2 + (-3b + 2c + d)x + (-3c + e).$$

A polinomok egyenlőségének definíciójából adódik, hogy

$$1 = a, \quad -3 = 2a + b, \quad 2 = -3a + 2b + c, \quad 1 = -3b + 2c + d, \quad -5 = -3c + e.$$

A fenti egyenletrendszer megoldása

$$a = 1, \quad b = -5, \quad c = 15, \quad d = -44, \quad e = 40,$$

azaz $H(x) = x^2 - 5x + 15$ és $R(x) = -44x + 40$.

A másik módszer a többszámjegyű számok osztásának algoritmusához hasonló, vagyis a polinomok körében, éppen úgy, mint az egész számok körében, létezik a *maradékos (euklideszi) osztás algoritmus*a.

3.21. Példa. Ahhoz, hogy elosszuk a $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 5$ polinomot a $Q(x) = x^2 + 2x - 3$ polinommal, osszuk el először a főtagokat egymással: $x^4 : x^2 = x^2$. Ezután szorozzuk meg a $Q(x)$ polinomot a kapott x^2 monommal, ez az $x^4 + 2x^3 - 3x^2$ polinom lesz, majd vonjuk ki a kapott polinomot a $P(x)$ polinomból. A megoldásunk a $-5x^3 + 5x^2 + x - 5$ polinom, amelynek $-5x^3$ főtagját el kell osztani x^2 -tel. A kapott $-5x$ hányadossal ismét megszorozzuk a $Q(x)$ polinomot, és így folytatjuk tovább az eljárást mindaddig, amíg nem kapunk 0-át vagy a $Q(x)$ polinomtól kisebb fokú polinomot, vagyis ebben az esetben elsőfokú polinomot. A fenti eljárást így írhatjuk le:

$$\begin{array}{r} (x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 5) : (x^2 + 2x - 3) = x^2 - 5x + 15 \\ x^4 + 2x^3 - 3x^2 \\ \hline -5x^3 + 5x^2 + x - 5 \\ -5x^3 - 10x^2 + 15x \\ \hline 15x^2 - 14x - 5 \\ 15x^2 + 30x - 45 \\ \hline -44x + 40 \end{array}$$

Tehát a hányados $H(x) = x^2 - 5x + 15$, a maradék pedig $R(x) = -44x + 40$, vagyis

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 5 = (x^2 + 2x - 3)(x^2 - 5x + 15) - 44x + 40.$$

3.5. Definíció. Ha a $P(x)$ valós polinom esetén van olyan c valós szám, hogy $P(c) = 0$ (vagyis ha a $P(x)$ polinom eltűnik, mikor a változó helyére a c számot helyettesítjük), akkor c -t a $P(x)$ polinom (vagy a $P(x) = 0$ egyenlet) gyökének nevezzük.

3.9. Tétel (Bezout-tétel). A $P(x)$ polinom $(x - c)$ elsőfokú polinommal való osztásának maradéka egyenlő a $P(x)$ polinom $P(c)$ értékével $x = c$ -nél.

Bizonyítás. Legyen

$$P(x) = (x - c)Q(x) + R.$$

Vegyük mindkét oldal értékét $x = c$ -ben:

$$P(c) = (c - c)Q(c) + R = R,$$

ami igazolja állításunkat. \diamond

Ebből adódik az alábbi rendkívül fontos következmény:

3.1. Következmény. A c szám akkor és csak akkor gyöke a $P(x)$ polinomnak, ha $P(x)$ osztható $(x - c)$ -vel.

Fontos: a $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ alakú egész együtthatós polinomokat $a_n = 1$ miatt normált polinomoknak nevezzük, és normált polinomok esetében az egész gyököket a $P(x)$ polinom a_0 állandó tagja osztóinak halmazában kell keresni, mert ha van egész gyök, akkor biztosan benne van ebben a halmazban.

3.22. Példa. Bontsuk tényezőkre az $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ polinomot. Próbálkozással megkaphatjuk, hogy $P(1) = 0$, mivel 1 benne van a $P(x)$ polinom -6 szabad tagja osztóinak $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$ halmazában. A fenti következményből tudjuk, hogy ekkor a $P(x)$ polinom osztható $x - 1$ -gyel. Végezzük el az osztást. Ekkor

$$\begin{array}{r} (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 1) = x^2 - 5x + 6 \\ x^3 - x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - - - - - \\ -5x^2 + 11x - 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -5x^2 + 5x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - - - - - \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6x - 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6x - 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - - - - - \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - 1)(x^2 - 5x + 6) = (x - 1)(x^2 - 2x - 3x + 6) = \\ &= (x - 1)(x(x - 2) - 3(x - 2)) = (x - 1)(x - 2)(x - 3). \end{aligned}$$

A fent mondottak miatt érdemes foglalkoznunk a $P(x)$ polinom $x - c$ elsőfokú polinommal való osztásának következő módszerével, amely egyszerűbb, mint a közönséges osztási algoritmus. Ezt a módszert *Horner elrendezésnek* nevezzük.

Legyen

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

és legyen

$$P(x) = (x - c)Q(x) + r, \quad (3.1)$$

ahol

$$Q(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0.$$

Összehasonlítva (3.1)-ben x egyenlő kitevőjű hatványainak együtthatóit, nyerjük:

$$a_n = b_{n-1},$$

$$a_{n-1} = b_{n-2} - cb_{n-1},$$

$$a_{n-2} = b_{n-3} - cb_{n-2},$$

.....

$$a_1 = b_0 - cb_1,$$

$$a_0 = r - cb_0.$$

Ebből következik, hogy $b_{n-1} = a_n$, $b_{k-1} = cb_k + a_k$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, azaz a b_{k-1} együtthatót úgy kapjuk, hogy az előző együtthatót, b_k -t szorozzuk c -vel, s ehhez hozzáadjuk a megfelelő a_k együtthatót; végül $r = cb_0 + a_0$, azaz a maradék is, mely mint tudjuk $P(c)$ -vel egyenlő, ugyanezen szabály szerint adódik. Így tehát a hányados együtthatói és a maradék lépésről lépésre megkaphatók azonos műveletek elvégzésével, melyeket táblázatba lehet helyezni.

3.23. Példa. Osszuk a $P(x) = 2x^5 - x^4 - 3x^3 - 35x^2 + x - 3$ polinomot $x - 3$ -mal.

Alkossunk egy táblázatot, melyben a vonal fölött jobbra a $P(x)$ polinom együtthatói helyezkednek el, baloldalt a megfelelő c érték, a vonal alatt pedig a hányados megfelelő együtthatói és a maradék, melyeket lépésről lépésre számítunk ki:

3	2	-1	-3	-35	1	-3
	2	$3 \cdot 2 - 1 = 5$	$3 \cdot 5 - 3 = 12$	$3 \cdot 12 - 35 = 1$	$3 \cdot 1 + 1 = 4$	$3 \cdot 4 - 3 = 9$

A keresett hányados tehát $Q(x) = 2 \cdot x^4 + 5 \cdot x^3 + 12 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 4$, a maradék pedig $r = P(3) = 9$. A számítások alapján felírható, hogy

$$2x^5 - x^4 - 3x^3 - 35x^2 + x - 3 = (x - 3)(2x^4 + 5x^3 + 12x^2 + x + 4) + 9.$$

3.24. Példa. Osszuk a $P(x) = x^4 - 8x^3 + x^2 + 4x - 9$ polinomot $x + 1$ -gyel.

-1	1	-8	1	4	-9
	1	-9	10	-6	-3

A keresett hányados tehát $Q(x) = 1 \cdot x^3 + (-9) \cdot x^2 + 10 \cdot x + (-6)$, a maradék pedig $r = P(-1) = -3$. Ezért felírható, hogy

$$x^4 - 8x^3 + x^2 + 4x - 9 = (x + 1)(x^3 - 9x^2 + 10x - 6) - 3.$$

Ezek a példák mutatják, hogy a Horner-elrendezés felhasználható polinomok értékének gyors kiszámítására a változó adott értéke mellett.

FELADATOK.

1. Egyenlőek-e a $P(x) = (x-2)(x+1)(x+3)$ és $Q(x) = x[x(x+2)-5]-6$ polinomok?

Megoldás. Igen, $P(x) = Q(x)$, mivel

$$P(x) = (x-2)(x+1)(x+3) = (x-2)(x^2+4x+3) = x^3+2x^2-5x-6$$

$$\text{és } Q(x) = x[x(x+2)-5]-6 = x[x^2+2x-5]-6 = x^3+2x^2-5x-6.$$

2. Határozzuk meg a $P(x)$ és $Q(x)$ polinomok $P(x) + Q(x)$ összegét, $P(x) - Q(x)$ különbségét, $P(x) \cdot Q(x)$ szorzatát és a $2P(x) - 3Q(x)$ kifejezést, amennyiben $P(x) = -x^3 + x^2 - 2x$ és $Q(x) = x^2 + x + 1$.

Megoldás.

$$P(x) + Q(x) = -x^3 + x^2 - 2x + x^2 + x + 1 = -x^3 + 2x^2 - x + 1,$$

$$P(x) - Q(x) = -x^3 + x^2 - 2x - x^2 - x - 1 = -x^3 - 3x - 1,$$

$$P(x) \cdot Q(x) = (-x^3 + x^2 - 2x) \cdot (x^2 + x + 1) = -x^5 - 2x^3 - x^2 - 2x,$$

$$2P(x) - 3Q(x) = 2(-x^3 + x^2 - 2x) - 3(x^2 + x + 1) = -2x^3 - x^2 - 7x - 3.$$

3. Határozzuk meg a $Q(x) = P(x-1) + P(x) + P(x+1)$ polinomot, ha $P(x) = x^3 - x$.

Megoldás.

$$\begin{aligned} Q(x) &= P(x-1) + P(x) + P(x+1) = (x-1)^3 - (x-1) + x^3 - x + (x+1)^3 - (x+1) = \\ &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x + 1 + x^3 - x + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x - 1 = 3x^3 + 3x. \end{aligned}$$

4. Adottak a $P(x) = x^3 + x + 1$, $Q(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2$ és $R(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ polinomok. Igazoljuk, hogy érvényesek az alábbi azonosságok minden $a \in \mathbf{R}$ esetén.

a) $P(a) + P(-a) = 2$, **b)** $P(1+a) + P(1-a) = 6 + 6a^2$, **c)** $Q(a) - Q(-a) = 0$,
d) $Q(1+a) - Q(1-a) = 8a^3$, **e)** $R(a) - R(-a) = 2a^3$, **f)** $R(1+a) + R(1-a) = -2$.

Megoldás.

$$\text{a) } P(a) + P(-a) = a^3 + a + 1 + (-a)^3 - a + 1 = a^3 + a + 1 - a^3 - a + 1 = 2,$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(1+a) + P(1-a) &= (1+a)^3 + 1 + a + 1 + (1-a)^3 + 1 - a + 1 = \\ &= 1 + 3a + 3a^2 + a^3 + 1 - 3a + 3a^2 - a^3 + 4 = 6 + 6a^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } Q(a) - Q(-a) &= a^4 - 2a^2 + 1 - ((-a)^4 - 2(-a)^2 + 1) = \\ &= a^4 - 2a^2 + 1 - (a^4 - 2a^2 + 1) = a^4 - 2a^2 + 1 - a^4 + 2a^2 - 1 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } Q(1+a) - Q(1-a) &= ((1+a)^2 - 1)^2 - (((1-a)^2 - 1)^2) = \\ &= (2a + a^2)^2 - (-2a + a^2)^2 = 4a^2 + 4a^3 + a^4 - 4a^2 + 4a^3 - a^4 = 8a^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } R(a) - R(-a) &= a^3 - 3a^2 + 1 - ((-a)^3 - 3(-a)^2 + 1) = \\ &= a^3 - 3a^2 + 1 - (-a^3 - 3a^2 + 1) = a^3 - 3a^2 + 1 + a^3 + 3a^2 - 1 = 2a^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } R(1+a) + R(1-a) &= (1+a)^3 - 3(1+a)^2 + 1 + (1-a)^3 - 3(1-a)^2 + 1 = \\ &= 1 + 3a + 3a^2 + a^3 - 3 - 6a - 3a^2 + 1 - 3a + 3a^2 - a^3 - 3 + 6a - 3a^2 + 2 = \\ &= -2. \end{aligned}$$

5. Számoljuk ki a $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ polinom $Q(x) = x^2 - 3x + 1$ polinommal való osztásának hányadosát és maradékát.

Megoldás.

$$\begin{array}{r}
 (2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6) : (x^2 - 3x + 1) = 2x^2 + 3x + 11 \\
 2x^4 - 6x^3 + 2x^2 \\
 \hline
 3x^3 + 2x^2 - 5x + 6 \\
 3x^3 - 9x^2 + 3x \\
 \hline
 11x^2 - 8x + 6 \\
 11x^2 - 33x + 11 \\
 \hline
 25x - 5
 \end{array}$$

Tehát a hányados $H(x) = 2x^2 + 3x + 11$, a maradék pedig $R(x) = 25x - 5$, vagyis

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = (x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 3x + 11) + 25x - 5,$$

$$\text{illetve} \quad \frac{2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 1} = 2x^2 + 3x + 11 + \frac{25x - 5}{x^2 - 3x + 1}.$$

6. Számoljuk ki a $P(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1$ polinom $Q(x) = 3x^2 - 2x + 1$ polinommal való osztásának hányadosát és maradékát.

Megoldás.

$$\begin{array}{r}
 (x^3 - 3x^2 - x - 1) : (3x^2 - 2x + 1) = \frac{1}{3}x - \frac{7}{9} \\
 x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3} \\
 \hline
 -\frac{7}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 1 \\
 -\frac{7}{3}x^2 + \frac{14}{9}x + \frac{7}{9} \\
 \hline
 -\frac{26}{9}x - \frac{2}{9}
 \end{array}$$

Tehát a hányados $H(x) = \frac{1}{3}x - \frac{7}{9}$, a maradék pedig $R(x) = -\frac{26}{9}x - \frac{2}{9}$, vagyis

$$x^3 - 3x^2 - x - 1 = (3x^2 - 2x + 1) \left(\frac{1}{3}x - \frac{7}{9} \right) - \frac{26}{9}x - \frac{2}{9},$$

$$\text{illetve} \quad \frac{x^3 - 3x^2 - x - 1}{3x^2 - 2x + 1} = \frac{1}{3}x - \frac{7}{9} - \frac{1}{9} \cdot \frac{26x + 2}{3x^2 - 2x + 1}.$$

7. Osztható-e a $P(x) = x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 9x + 4$ polinom a $Q(x) = x^2 + 2x + 1$ polinommal?

Megoldás. Végezzük el a polinomok osztásának algoritmusát.

$$\begin{array}{r}
 (x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 9x + 4) : (x^2 + 2x + 1) = x^2 + x + 4 \\
 x^4 + 2x^3 - x^2 \\
 \hline
 x^3 + 6x^2 + 9x + 4 \\
 x^3 + 2x^2 + x \\
 \hline
 4x^2 + 8x + 4 \\
 4x^2 + 8x + 4 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Az osztás maradéka a nullapolinom, a hányados pedig $H(x) = x^2 + x + 4$. Ezért

$$P(x) = x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 9x + 4 = (x^2 + 2x + 1)(x^2 + x + 4) = Q(x)H(x),$$

vagyis a $P(x)$ polinom osztható $Q(x)$ -szel.

8. Számoljuk ki a $P(x) = 2x^5 - 5x^3 - 8x$ polinom $Q(x) = x + 3$ polinommal való osztásának hányadosát és maradékát.

Megoldás. I. Az osztás maradéka a Bezout-tétel alapján:

$$\begin{aligned}
 P(-3) &= 2 \cdot (-3)^5 - 5 \cdot (-3)^3 - 8 \cdot (-3) = \\
 &= 2 \cdot (-243) - 5 \cdot (-27) - 8 \cdot (-3) = \\
 &= -486 + 135 + 24 = \\
 &= -327.
 \end{aligned}$$

II. A Horner-féle elrendezéssel ebben a speciális esetben kiszámítható az osztás hányadosa és a maradék is.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c}
 -3 & 2 & 0 & -5 & 0 & -8 & 0 \\
 \hline
 & 2 & -6 & 13 & -39 & 109 & -327
 \end{array}$$

A hányados tehát a $H(x) = 2 \cdot x^4 + (-6) \cdot x^3 + 13 \cdot x^2 + (-39) \cdot x + 109$ negyedfokú polinom, a maradék pedig az $R(x) = -327$ nulladfokú polinom, vagyis

$$2x^5 - 5x^3 - 8x = (x + 3)(2x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 39x + 109) - 327.$$

III. Osztási algoritmussal:

$$\begin{array}{r}
 (2x^5 - 5x^3 - 8x) : (x + 3) = 2x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 39x + 109 \\
 2x^5 + 6x^4 \\
 \hline
 -6x^4 - 5x^3 - 8x \\
 -6x^4 - 18x^3 \\
 \hline
 13x^3 - 8x \\
 13x^3 + 39x^2 \\
 \hline
 -39x^2 - 8x \\
 -39x^2 - 117x \\
 \hline
 109x \\
 109x + 327 \\
 \hline
 -327
 \end{array}$$

9. Számoljuk ki a $P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ polinom $Q_1(x) = x - 1$, majd $Q_2(x) = x + 1$ polinommal való osztásának hányadosát és maradékát.

Megoldás. Ha $P(x) = (x - 1)H_1(x) + r_1$ és $P(x) = (x + 1)H_2(x) + r_2$, akkor az osztás maradéka a Bezout-tétel alapján:

$$\begin{aligned}
 r_1 = P(1) &= 1^4 + 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 1 = \\
 &= 1 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 - 4 \cdot 1 + 1 = \\
 &= 1 + 2 - 3 - 4 + 1 = \\
 &= -3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r_2 = P(-1) &= (-1)^4 + 2 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 1 = \\
 &= 1 + 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 - 4 \cdot (-1) + 1 = \\
 &= 1 - 2 - 3 + 4 + 1 = \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

A Horner-féle elrendezés alapján adódik, hogy

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 1 & 1 & 2 & -3 & -4 & 1 \\
 \hline
 & 1 & 3 & 0 & -4 & -3
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 -1 & 1 & 2 & -3 & -4 & 1 \\
 \hline
 & 1 & 1 & -4 & 0 & 1
 \end{array}$$

tehát a megfelelő osztás hányadosa a $H_1(x) = 1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 + 0 \cdot x + (-4)$, illetve a $H_2(x) = 1 \cdot x^3 + 1 \cdot x^2 + (-4) \cdot x + 0$ harmadfokú polinom, a maradékok pedig $r_1 = -3$, illetve $r_2 = 1$. Ennek alapján következik, hogy

$$x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1 = (x - 1)(x^3 + 3x^2 - 4) - 3 = (x + 1)(x^3 + x^2 - 4x) + 1.$$

10. Határozzuk meg a p valós paraméter értékét úgy, hogy a $P(x) = x^5 + 3x^4 + 5x + p$ polinom osztható legyen $x - 2$ -vel.

Megoldás.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 5 & p \\ \hline & 1 & 5 & 10 & 20 & 45 & 90 + p \end{array}$$

Az osztás maradéka 0, ha $90 + p = 0$, ebből pedig $p = -90$.

11. Határozzuk meg az a és p valós paraméterek értékét úgy, hogy a

$$P(x) = x^4 + pa^2x^2 - 5a^3x + a^4$$

polinom osztható legyen $x - a$ polinommal.

Megoldás.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} a & 1 & 0 & pa^2 & -5a^3 & a^4 \\ \hline & 1 & a & (1+p)a^2 & (p-4)a^3 & (p-3)a^4 \end{array}$$

Az osztás maradéka 0, ha $(p-3)a^4 = 0$, ebből pedig $p-3 = 0$ vagy $a^4 = 0$, azaz $p = 3$ vagy $a = 0$.

12. Határozzuk meg a $P(x) = x^{100} - 2x^{51} + 1$ polinom $x^2 - 1$ polinommal való osztásának maradékát.

Megoldás. Mivel a $P(x) = x^{100} - 2x^{51} + 1$ polinom $x^2 - 1$ polinommal való osztásának maradéka egy $R(x) = ax + b$ alakú lineáris polinom, ezért

$$P(x) = (x^2 - 1)H(x) + ax + b,$$

ahonnan a és b értékét kell meghatározni. Helyettesítsünk x helyére 1-et, majd -1-et. Mivel

$$P(1) = 1^{100} - 2 \cdot 1^{51} + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$$

és

$$P(-1) = (-1)^{100} - 2 \cdot (-1)^{51} + 1 = 1 - 2 \cdot (-1) + 1 = 1 + 2 + 1 = 4,$$

ezért $x = 1$ -re

$$P(1) = (1^2 - 1)H(1) + a \cdot 1 + b, \quad \text{ahonnan} \quad a + b = 0,$$

$x = -1$ -re pedig

$$P(-1) = ((-1)^2 - 1)H(-1) + a \cdot (-1) + b, \quad \text{ahonnan} \quad -a + b = 4.$$

A kapott $a + b = 0$, $-a + b = 4$ egyenletrendszer megoldása $a = -2$ és $b = 2$, tehát az osztás maradéka az $R(x) = -2x + 2$ lineáris polinom.

13. A $P(x)$ polinom $x-1$ polinommal való osztásának maradéka 3, a $P(x)$ polinom $x-2$ polinommal való osztásának maradéka pedig 4. Mennyi a $P(x)$ polinom $(x-1)(x-2)$ polinommal való osztásának maradéka?

Megoldás. Mivel másodfokú polinommal osztunk, ezért a maradék legfeljebb elsőfokú polinom lehet, vagyis

$$P(x) = (x-1)(x-2)H(x) + ax + b,$$

ahonnan a és b értékét kell meghatározni. Helyettesítsünk x helyére 1-et, majd 2-t. Ekkor

$$P(1) = (1-1)(1-2)H(1) + a \cdot 1 + b \quad \text{és} \quad P(2) = (2-1)(2-2)H(2) + a \cdot 2 + b,$$

azaz az

$$a + b = 3, \quad 2a + b = 4$$

egyenletrendszer adódik, amelynek megoldása $a = 1$ és $b = 2$, tehát a keresett maradék az $R(x) = x + 2$ lineáris polinom.

14. Osztható-e a $P(x) = (x^2 + x - 1)^{2011} + (x^2 - x + 1)^{2011} - 2$ polinom az $x^2 - x$ polinommal?

Megoldás. Mivel $x^2 - x = x(x-1)$, ezért a $P(x)$ polinom osztható az $x^2 - x$ polinommal, ha a $P(x)$ polinom osztható az x polinommal is és az $x-1$ polinommal is. Az adott polinomok oszthatóságának feltétele a Bezout-tétel alapján az, hogy $P(0) = 0$ és $P(1) = 0$ egyidőben teljesüljön. Mivel

$$P(0) = (0^2 + 0 - 1)^{2011} + (0^2 - 0 + 1)^{2011} - 2 = (-1)^{2011} + 1^{2011} - 2 = -1 + 1 - 2 = -2$$

és

$$P(1) = (1^2 + 1 - 1)^{2011} + (1^2 - 1 + 1)^{2011} - 2 = (-1)^{2011} + 1^{2011} - 2 = -1 + 1 - 2 = -2,$$

ezért az oszthatóság nem teljesül.

15. Osztható-e a $P(x) = (x^2 + x - 1)^{2012} + (x^2 - x + 1)^{2012} - 2$ polinom az $x^2 - x$ polinommal?

Megoldás. Mivel most

$$P(0) = (0^2 + 0 - 1)^{2012} + (0^2 - 0 + 1)^{2012} - 2 = (-1)^{2012} + 1^{2012} - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$$

és

$$P(1) = (1^2 + 1 - 1)^{2012} + (1^2 - 1 + 1)^{2012} - 2 = (-1)^{2012} + 1^{2012} - 2 = 1 + 1 - 2 = 0,$$

ezért az oszthatóság teljesül.

16. Bontsuk tényezőkre a $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ polinomot egész gyökei segítségével.

Megoldás. A lehetséges egész gyökök halmaza $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$. Próbálgatással megkapjuk, hogy $P(1) = P(-1) = P(2) = P(-2) = 0$, a Horner-elrendezés segítségével pedig a felbontás a következő lépésekben történhet:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 1 & 1 & 0 & -5 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & -4 & -4 & 0 \end{array}, \quad \text{azaz} \quad P(x) = (x-1)(x^3 + x^2 - 4x - 4),$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 2 & 1 & 1 & -4 & -4 & \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 & \end{array}, \quad \text{azaz} \quad P(x) = (x-1)(x-2)(x^2 + 3x + 2),$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} -1 & 1 & 3 & 2 & & \\ \hline & 1 & 2 & 0 & & \end{array}, \quad \text{azaz} \quad P(x) = (x-1)(x-2)(x+1)(x+2).$$

17. Bontsuk tényezőkre a $P(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 14$ polinomot egész gyökei segítségével.

Megoldás. A lehetséges egész gyökök halmaza $\{\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14\}$. Próbálgatással megkapjuk, hogy $P(2) = 0$, az összes többi esetben a polinom értéke nem nulla, vagyis a $P(x)$ polinomnak csak egy egész gyöke van. A Horner-elrendezés segítségével a felbontás most a következő:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 2 & 1 & -6 & 15 & -14 & \\ \hline & 1 & -4 & 7 & 0 & \end{array}, \quad \text{vagyis} \quad P(x) = (x-2)(x^2 - 4x + 7).$$

18. Bontsuk tényezőkre a $P(x) = x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 5x - 6$ polinomot egész gyökei segítségével.

Megoldás. A lehetséges egész gyökök halmaza $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$. Próbálgatással megkapjuk, hogy $P(-1) = P(2) = P(-3) = 0$, az összes többi esetben a polinom értéke nem nulla. A Horner-elrendezés segítségével a következő felbontáshoz jutunk:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} -1 & 1 & 2 & -4 & -4 & -5 & -6 \\ \hline 2 & 1 & 1 & -5 & 1 & -6 & 0 \\ -3 & 1 & 3 & 1 & 3 & 0 & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 & & \end{array} \quad \begin{aligned} P(x) &= (x+1)(x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6) \\ &= (x+1)(x-2)(x^3 + 3x^2 + x + 3) \\ &= (x+1)(x-2)(x+3)(x^2 + 1). \end{aligned}$$

19. Bontsuk tényezőkre a $P(x) = x^5 + 2x^4 - 8x^3 - x^2 - 2x + 8$ polinomot egész gyökei segítségével.

Megoldás. A lehetséges egész gyökök halmaza $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$. Próbálgatással megkapjuk, hogy $P(1) = P(2) = P(-4) = 0$, az összes többi esetben a polinom értéke nem nulla. A Horner-elrendezés segítségével a következő felbontáshoz jutunk:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 1 & 1 & 2 & -8 & -1 & -2 & 8 \\ \hline 2 & 1 & 3 & -5 & -6 & -8 & 0 \\ -4 & 1 & 5 & 5 & 4 & 0 & \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 & & \end{array} \quad \begin{aligned} P(x) &= (x-1)(x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 6x - 8) \\ &= (x-1)(x-2)(x^3 + 5x^2 + 5x + 4) \\ &= (x-1)(x-2)(x+4)(x^2 + x + 1). \end{aligned}$$

20. Felbontható-e tényezőkre a $P(x) = x^4 + x^3 + 5x^2 + 4x + 4$ polinom az egész gyökei segítségével?

Megoldás. A lehetséges egész gyökök halmaza $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$. Próbálgatással megkapjuk, hogy a polinom értéke egyik esetben sem nulla, tehát a polinom az egész gyökei segítségével nem bontható tényezőkre, mert nincsenek egész gyökei.

3.4. Polinomok legnagyobb közös osztója és legkisebb közös többszöröse

A valós polinomok oszthatóságát már definiáltuk az előző fejezetben. Az elmondottak alapján megfogalmazhatjuk a következő fontos állítást.

3.10. Tétel. *A $Q(x)$ polinom akkor és csak akkor osztója a $P(x)$ polinomnak, ha van olyan $H(x)$ polinom, hogy*

$$P(x) = Q(x)H(x).$$

A következőkben megfogalmazzuk, hogy mit értünk két polinom legnagyobb közös osztóján és adunk egy eljárást két polinom legnagyobb közös osztójának meghatározására.

3.6. Definíció. *Legyen $P(x)$ és $Q(x)$ két tetszőleges valós együtthatós polinom. Azt mondjuk, hogy a $H(x)$ polinom $P(x)$ és $Q(x)$ közös osztója, ha $H(x)$ mindkét polinomnak osztója. Ha e két polinomnak a nulladfokú polinomokon kívül nincs más közös osztója, akkor azt mondjuk, hogy relatív prímek.*

3.7. Definíció. *A $P(x)$ és $Q(x)$ polinomok legnagyobb közös osztójának nevezünk egy olyan $D(x)$ polinomot, amely közös osztója e polinomoknak, s egyúttal minden más közös osztójukkal osztható. Jele: $LKO(P(x), Q(x))$.*

3.8. Definíció. *A $P(x)$ és $Q(x)$ nullapolinomtól különböző polinomok közös többszörösének nevezünk minden olyan polinomot, amelynek $P(x)$ és $Q(x)$ is osztója. A $P(x)$ és $Q(x)$ polinomok legkisebb közös többszörösének nevezzük azt a polinomot, amely a $P(x)$ és $Q(x)$ polinomok közös többszöröse és egyúttal a $P(x)$ és $Q(x)$ polinomok minden más közös többszörösének osztója. Jele: $LKT(P(x), Q(x))$.*

Euklideszi algoritmus. Az egész számok esetében létezik az *euklideszi algoritmusnak* nevezett eljárás, amelynek segítségével előállítható két egész szám legnagyobb közös osztója. Ez a módszer alkalmazható polinomokra is, s maga az algoritmus a következő: Legyen $P(x)$ és $Q(x)$ két tetszőleges valós együtthatós polinom. Osszuk el $P(x)$ -et $Q(x)$ -szel; általában kapunk valami $R_1(x)$ maradékot. Ezután $Q(x)$ -et osztjuk $R_1(x)$ -szel és kapjuk az $R_2(x)$ maradékot, $R_1(x)$ -et osztjuk $R_2(x)$ -szel és így tovább. Minthogy a maradék fokszáma minden lépésnél csökken, ezért az osztásoknak ebben a sorozatában el kell érniünk egy olyan pontig, ahol a soron következő osztás már maradék nélkül elvégezhető s ezért az eljárás megszakad. Az az $R_k(x)$ maradék, mellyel az előző $R_{k-1}(x)$ már maradék nélkül osztható, éppen $P(x)$ és $Q(x)$ legnagyobb közös osztója lesz. Írjuk le az előző bekezdésben elmondottakat egyenlőségek sorozatának alakjában:

$$\begin{aligned} P(x) &= Q(x)S_1(x) + R_1(x), \\ Q(x) &= R_1(x)S_2(x) + R_2(x), \\ R_1(x) &= R_2(x)S_3(x) + R_3(x), \\ &\dots\dots\dots \\ R_{k-3}(x) &= R_{k-2}(x)S_{k-1}(x) + R_{k-1}(x), \\ R_{k-2}(x) &= R_{k-1}(x)S_k(x) + R_k(x), \\ R_{k-1}(x) &= R_k(x)S_{k+1}(x). \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőség mutatja, hogy $R_k(x)$ osztója $R_{k-1}(x)$ -nek. Innen következik, hogy az utolsó előtti egyenlőség jobb oldalán mindkét összeadandó osztható $R_k(x)$ -szel, s így $R_k(x)$ osztója $R_{k-2}(x)$ -nek is. Ugyanígy továbbhaladva felfelé, azt találjuk, hogy $R_k(x)$ osztója $R_{k-3}(x)$ -nek, ..., $R_2(x)$ -nek és $R_1(x)$ -nek is. Innen a második egyenlőség alapján következik, hogy $R_k(x)$ osztója $Q(x)$ -nek is s ezért az első egyenlőségből kifolyólag $P(x)$ -nek is. Így tehát $R_k(x)$ közös osztója $P(x)$ -nek és $Q(x)$ -nek.

Tekintsük most a $P(x)$ és $Q(x)$ polinom tetszőleges $D(x)$ közös osztóját. Mivel a fenti levezetésben az első egyenlőség bal oldala és a jobb oldal első összeadandója osztható $D(x)$ -szel, azért $R_1(x)$ is osztható vele. Áttérve a második egyenlőségre, majd a továbbiakra ugyanilyen módon, azt kapjuk, hogy $R_2(x)$, $R_3(x)$, ... mind osztható $D(x)$ -szel. Végül, ha már bebizonyítottuk, hogy $R_{k-2}(x)$ és $R_{k-1}(x)$ osztható $D(x)$ -szel, akkor az utolsó előtti egyenlőségből nyerjük, hogy $R_k(x)$ is osztható vele. Így tehát $R_k(x)$ csakugyan $P(x)$ és $Q(x)$ legnagyobb közös osztója. Beláttuk tehát, hogy bármely két valós polinomnak van legnagyobb közös osztója és módszert is találtunk ennek kiszámítására.

Ha a $P(x)$ és $Q(x)$ polinom legnagyobb közös osztója $D(x)$, akkor e polinomok legnagyobb közös osztójának választhattuk volna a $CD(x)$ polinomot is, ahol C tetszőleges nullától különböző szám. Más szóval két polinom legnagyobb közös osztója csak nulldfokú tényezőtől eltekintve van egyértelműen meghatározva. Emiatt kiköthetjük, hogy két polinom legnagyobb közös osztójának főegyütthatóját mindig 1-nek választjuk, azaz normált polinomnak. Kihasználva ezt a feltételt azt mondhatjuk, hogy két polinom akkor és csak akkor relatív prím, ha legnagyobb közös osztójuk 1.

3.25. Példa. Határozzuk meg a következő két polinom legnagyobb közös osztóját:

$$P(x) = 6x^3 + 31x^2 + 4x - 5, \quad Q(x) = 2x^2 + 23x + 11.$$

Osszuk el $P(x)$ -et $Q(x)$ -szel:

$$\begin{array}{r} (6x^3 + 31x^2 + 4x - 5) : (2x^2 + 23x + 11) = 3x - 19 \\ 6x^3 + 69x^2 + 33x \\ \hline -38x^2 - 29x - 5 \\ -38x^2 - 437x - 209 \\ \hline 408x + 204 = 204(2x + 1) \end{array}$$

Az első maradék 204-gyel való osztás után $R_1(x) = 2x + 1$. Osszuk el vele $Q(x)$ -et.

$$\begin{array}{r} (2x^2 + 23x + 11) : (2x + 1) = x + 11 \\ 2x^2 - x \\ \hline 22x + 11 \\ 22x + 11 \\ \hline 0 \end{array}$$

A második maradék tehát $R_2(x) = 0$, a keresett legnagyobb közös osztó az előző lépés maradéka, tehát $LKO(P(x), Q(x)) = 2x + 1$.

3.26. Példa. Határozzuk meg a következő két polinom legnagyobb közös osztóját:

$$P(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3, \quad Q(x) = 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3.$$

Ha az euklideszi algoritmust egész együtthatós polinomokra alkalmazzuk, akkor a tört együtthatók elkerülése céljából megszorozhatjuk az osztandót vagy eloszthatjuk az osztót bármely zérótól különböző számmal, éspedig nemcsak valamelyik soron levő osztás kezdetekor, hanem ilyen osztás közben is. Ez természetesen a hányados eltorzítására vezet, de a bennünket érdeklő maradékok csak egy nulladfokú tényezővel szorozódnak, ami a legnagyobb közös osztó keresésénél megengedhető.

Osszuk el $P(x)$ -et $Q(x)$ -szel, miután az előbbi szoroztuk 3-mal:

$$\begin{array}{r} (3x^4 + 9x^3 - 3x^2 - 12x - 9) : (3x^3 + 10x^2 + 2x - 3) = x + 1 \\ 3x^4 + 10x^3 + 2x^2 - 3x \\ \hline -x^3 - 5x^2 - 9x - 9 \quad (-3\text{-mal szorozunk}) \\ 3x^3 + 15x^2 + 27x + 27 \\ \hline 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3 \\ \hline 5x^2 + 25x + 30 \end{array}$$

Így tehát az első maradék 5-tel való osztás után $R_1(x) = x^2 + 5x + 6$. Osszuk el vele a $Q(x)$ polinomot.

$$\begin{array}{r} (3x^3 + 10x^2 + 2x - 3) : (x^2 + 5x + 6) = 3x - 5 \\ 3x^3 + 15x^2 + 18x \\ \hline -5x^2 - 16x - 3 \\ -5x^2 - 25x - 30 \\ \hline 9x + 27 \end{array}$$

A második maradék tehát 9-cel való osztás után $R_2(x) = x + 3$. $R_1(x) = R_2(x)(x + 2)$ miatt, $R_2(x)$ lesz az utolsó maradék, mellyel az utolsó előtti (maradék nélkül) osztható. Ez lesz tehát a keresett legnagyobb közös osztó: $LKO(P(x), Q(x)) = x + 3$.

A bemutatott Euklideszi algoritmus egy általános eljárás, amellyel előállítható két vagy több polinom legnagyobb közös osztója, de nagyon sok esetben igen hosszadalmas és bonyolult. Most bemutatjuk polinomok legnagyobb közös osztójának egy sokkal egyszerűbb előállítását, amely akkor alkalmazható, ha a polinomokat felbonthatjuk olyan tényezőkre, melyek tovább már nem bonthatók.

3.27. Példa. Tekintsük a $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$ és $Q(x) = x^2 + 4x + 3$ polinomokat. Mivel $P(x) = x^2(x + 1) - 4(x + 1) = (x + 1)(x^2 - 4) = (x + 1)(x - 2)(x + 2)$, $Q(x)$ polinom gyökét pedig keressük a $\{\pm 1, \pm 3\}$ halmazban. Próbálkozással megállapíthatjuk, hogy $P(-1) = (-1)^2 + 4(-1) + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$, azaz $Q(x)$ osztható az $x - (-1) = x + 1$ polinommal, így a Horner-féle elrendezéssel vagy klasszikus osztási algoritmussal megkaphatjuk, hogy $Q(x) = (x + 1)(x + 3)$. Könnyen belátható, hogy közös osztó $x + 1$, s hogy ezzel minden más közös osztó is osztható, tehát $LKO(P(x), Q(x)) = x + 1$.

3.28. Példa. A $P(x) = (x+1)^3(x^2+x+1)^2$ és $Q(x) = (x+1)^2(x-3)(x^2+x+1)$ polinomok legnagyobb közös osztójának a $P(x)$ és $Q(x)$ polinomokban szereplő $x+1$ és x^2+x+1 közös osztók tényezői kell legyenek, a kitevő pedig a kisebbik kell hogy legyen azon kitevők közül, melyek a $P(x)$ és $Q(x)$ polinomokban szerepelnek, tehát $x+1$ esetén ez a 2, x^2+x+1 esetén pedig az 1. Tehát $LKO(P(x), Q(x)) = (x+1)^2(x^2+x+1)$.

3.29. Példa. Tekintsük most a már tényezőkre bontott $P(x) = (3x-1)^3(x-5)^3(x^2+2)^3$, $Q(x) = (3x-1)^4(x+5)^2(x^2+2)^2$ és $R(x) = (3x-1)^5(x-7)(x^2+2)^5$ polinomokat. Ekkor $LKO(P(x), Q(x), R(x)) = (3x-1)^3(x^2+2)^2$.

3.30. Példa. Bontsuk tényezőire a $P(x) = x^2 - 5x + 6$ és $Q(x) = x^2 + 5x + 6$ polinomokat. Keressük a polinomok gyökeit a $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$ halmazban. Próbálgatással megkaphatjuk például, hogy $P(2) = 0$ és $Q(-2) = 0$. Ekkor a Horner-féle elrendezéssel azt kapjuk, hogy

$$\begin{array}{c|c|c|c} 2 & 1 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -3 & 0 \end{array} \quad \text{és} \quad \begin{array}{c|c|c|c} -2 & 1 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & 0 \end{array}.$$

Ebből adódik, hogy $P(x) = (x-2)(x-3)$ és $Q(x) = (x+2)(x+3)$, valamint hogy $LKO(P(x), Q(x)) = 1$. Ez azt jelenti, hogy a $P(x)$ és $Q(x)$ polinomok relatív prímek.

3.31. Példa. Határozzuk meg a $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$ és $Q(x) = x^2 + 4x + 3$ polinomok legkisebb közös többszörösét. Mivel tudjuk, hogy $P(x) = (x+1)(x-2)(x+2)$ és $Q(x) = (x+1)(x+3)$, ezért hasonlóan, mint a számok esetében, a legkisebb közös többszörös minden tényezőt tartalmaz, amely a két polinom valamelyikében szerepel, tehát $LKT(P(x), Q(x)) = (x+1)(x-2)(x+2)(x+3)$.

3.32. Példa. A $P(x) = (x+1)^3(x^2+x+1)^2$ és $Q(x) = (x+1)^2(x-3)(x^2+x+1)$ polinomok legkisebb közös többszörösében szerepelnie kell minden tényezőnek, amelyek a $P(x)$ és $Q(x)$ polinomok valamelyikében szerepelnek, s ha közös tényezőkről van szó, akkor a lehető legnagyobb kitevőt kell venni azok közül, melyek a $P(x)$ és $Q(x)$ polinomok valamelyikében szerepelnek. Tehát $x+1$ esetében ez a 3, $x-3$ esetében az 1, x^2+x+1 esetében pedig a 2, s így $LKT(P(x), Q(x)) = (x+1)^3(x-3)(x^2+x+1)^2$.

3.33. Példa. Tekintsük most a már tényezőkre bontott $P(x) = (3x-1)^3(x-5)^3(x^2+2)^3$, $Q(x) = (3x-1)^4(x+5)^2(x^2+2)^2$ és $R(x) = (3x-1)^5(x-7)(x^2+2)^5$ polinomokat. Ekkor $LKT(P(x), Q(x), R(x)) = (3x-1)^5(x-5)^3(x+5)^2(x-7)(x^2+2)^5$.

Legyenek $P(x)$ és $Q(x)$ valós normált polinomok. Ekkor a $P(x)$ és $Q(x)$ polinomok legkisebb közös többszörösének és legnagyobb közös osztójának szorzata egyenlő a $P(x)$ és $Q(x)$ polinomok szorzatával, azaz LKT-t kifejezve:

$$LKT(P(x), Q(x)) = \frac{P(x)Q(x)}{LKO(P(x), Q(x))}.$$

3.34. Példa. Legyen $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x+1)(x-2)(x+2)$ és $Q(x) = x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3)$. Mivel $LKT(P(x), Q(x)) = (x+1)(x-2)(x+2)(x+3)$, $LKO(P(x), Q(x)) = x+1$ és $P(x) \cdot Q(x) = (x+1)^2(x-2)(x+2)(x+3)$, beláthatjuk, hogy a fenti egyenlőség teljesül. Ha nem tudjuk szorzatra bontani a polinomokat, akkor a fenti egyenlőséget is használhatjuk a legkisebb közös többszörös kiszámítására.

FELADATOK.

1. Euklideszi algoritmus segítségével keressük meg a valós $P(x) = 9x^4 + 5x^2 + 1$ és $Q(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$ polinomok legnagyobb közös osztóját.

Megoldás. Osszuk el a $P(x)$ polinomot $Q(x)$ -szel:

$$\begin{array}{r}
 (9x^4 + 5x^2 + 1) : (3x^3 + 2x^2 + 1) = 3x - 2 \\
 9x^4 + 6x^3 + 3x \\
 \hline
 -6x^3 + 5x^2 - 3x + 1 \\
 -6x^3 - 4x^2 + 2 \\
 \hline
 9x^2 - 3x + 3 = 3(3x^2 - x + 1)
 \end{array}$$

Az első maradék 3-mal való osztás után $R_1(x) = 3x^2 - x + 1$. Osszuk el vele $Q(x)$ -et.

$$\begin{array}{r}
 (3x^3 + 2x^2 + 1) : (3x^2 - x + 1) = x + 1 \\
 3x^3 - x^2 + x \\
 \hline
 3x^2 - x + 1 \\
 3x^2 - x + 1 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

A második maradék tehát $R_2(x) = 0$, a keresett legnagyobb közös osztó az előző lépés maradéka, tehát $LKO(P(x), Q(x)) = 3x^2 - x + 1$.

2. Euklideszi algoritmus segítségével keressük meg a valós $P(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x - 3$ és $Q(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$ polinomok legnagyobb közös osztóját.

Megoldás. Osszuk el $P(x)$ -et $Q(x)$ -szel, miután az előbbi szoroztuk 2-vel:

$$\begin{array}{r}
 (2x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 8x - 6) : (2x^3 - 5x^2 - 4x + 3) = x + 1 \\
 2x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 3x \\
 \hline
 x^3 - 4x^2 + 5x - 6 \quad (2\text{-vel szorozunk}) \\
 2x^3 - 8x^2 + 10x - 12 \\
 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 \\
 \hline
 -3x^2 + 14x - 15
 \end{array}$$

Így tehát az első maradék $R_1(x) = -3x^2 + 14x - 15$. Osszuk el vele a $Q(x)$ polinomot,

miután az utóbbit megszoroztuk 3-mal:

$$\begin{array}{r}
 (6x^3 - 15x^2 - 12x + 9) : (-3x^2 + 14x - 15) = -2x - 13 \\
 6x^3 - 28x^2 + 30x \\
 \hline
 13x^2 - 42x + 9 \quad (3\text{-mal szorozunk}) \\
 39x^2 - 126x + 27 \\
 39x^2 - 182x + 195 \\
 \hline
 56x - 168 = 56(x - 3)
 \end{array}$$

A második maradék tehát 56-tal való osztás után $R_2(x) = x - 3$. Mivel $R_1(x)$ maradék nélkül osztható $R_2(x)$ -szel, hiszen $R_1(x) = (x - 3)(-3x + 5)$, ezért $R_2(x)$ lesz az utolsó maradék, mellyel az utolsó előtti (maradék nélkül) osztható. Ez lesz tehát a keresett legnagyobb közös osztó: $LKO(P(x), Q(x)) = x - 3$.

3. Euklideszi algoritmus segítségével keressük meg a valós $P(x) = 4x^4 - 5x^3 + x^2$ és $Q(x) = 3x^2 - 4x + 1$ polinomok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét.

Megoldás. Osszuk el $P(x)$ -et $Q(x)$ -szel, miután az előbbi szoroztuk 3-mal:

$$\begin{array}{r}
 (12x^4 - 15x^3 + 3x^2) : (3x^2 - 4x + 1) = 4x^2 + x + 1 \\
 12x^4 - 16x^3 + 4x^2 \\
 \hline
 x^3 - x^2 \quad (3\text{-mal szorozunk}) \\
 3x^3 - 3x^2 \\
 3x^3 - 4x^2 + x \\
 \hline
 x^2 - x \quad (3\text{-mal szorozunk}) \\
 3x^2 - 3x \\
 3x^2 - 4x - 1 \\
 \hline
 x - 1
 \end{array}$$

Így tehát az első maradék $R_1(x) = x - 1$. Mivel $Q(x)$ maradék nélkül osztható $R_1(x)$ -szel, hiszen $Q(x) = (x - 1)(3x - 1)$, ezért $R_1(x)$ lesz az utolsó maradék, mellyel az utolsó előtti (maradék nélkül) osztható. Ez lesz tehát a keresett legnagyobb közös osztó: $LKO(P(x), Q(x)) = x - 1$. Mivel

$$P(x)Q(x) = (4x^4 - 5x^3 + x^2)(3x^2 - 4x + 1) = 12x^6 - 31x^5 + 27x^4 - 9x^3 + x^2,$$

ezért

$$LKT(P(x), Q(x)) = \frac{P(x)Q(x)}{LKO(P(x), Q(x))} = \frac{12x^6 - 31x^5 + 27x^4 - 9x^3 + x^2}{x - 1}.$$

A Horner-féle elrendezés segítségével

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} 1 & 12 & -31 & 27 & -9 & 1 & 0 & 0 \\ \hline & 12 & -19 & 8 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array},$$

vagyis $LKT(P(x), Q(x)) = 12x^5 - 19x^4 + 8x^3 - x^2$.

4. Határozzuk meg a valós $P(a) = a^2 - b^2$, $Q(a) = a^2 + 2ab + b^2$ és $R(a) = a^2 - ab - 2b^2$ polinomok legkisebb közös többszörösét és legnagyobb közös osztóját.

Megoldás. Mivel

$$P(a) = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b), \quad Q(a) = a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \quad \text{és}$$

$$R(a) = a^2 - ab - 2b^2 = a^2 + ab - 2ab - 2b^2 = a(a + b) - 2b(a + b) = (a + b)(a - 2b).$$

polinomokat. Ekkor

$$LKO(P(a), Q(a), R(a)) = a + b, \quad \text{és}$$

$$LKT(P(a), Q(a), R(a)) = (a - b)(a + b)^2(a - 2b).$$

5. Bontsuk tényezőkre a $P(x) = x^3 - 2x^2 - x - 6$, $Q(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ valamint $R(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 3$ polinomokat, ha tudjuk, hogy a polinomoknak vannak egész gyökeik. Határozzuk meg mennyi $LKO(P(x), Q(x))$, $LKT(P(x), Q(x))$, $LKO(Q(x), R(x))$, $LKT(Q(x), R(x))$.

Megoldás. A $P(x) = x^3 - 2x^2 - x - 6$ és $Q(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ polinomok lehetséges egész gyökei a $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$ halmaz elemei, az $R(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 3$ polinom lehetséges egész gyökei pedig a $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3\}$ halmaz elemei. Próbálgatással megkapjuk, hogy $P(3) = 0$, $Q(1) = Q(2) = Q(3) = 0$, valamint hogy $R(1) = R(-1) = 0$. A Horner-féle elrendezés alapján következik, hogy

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} 3 & 1 & -2 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}, \quad \text{ahonnan} \quad P(x) = (x - 3)(x^2 + x + 2),$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 1 & -6 & 11 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}, \quad \text{ahonnan} \quad Q(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6),$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} 2 & 1 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -3 & 0 \end{array}, \quad \text{ahonnan} \quad Q(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3),$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ \hline & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}, \quad \text{ahonnan} \quad R(x) = (x - 1)(x^3 + 2x + 3),$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} -1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}, \quad \text{ahonnan} \quad R(x) = (x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 3).$$

$$LKO(P(x), Q(x)) = x - 3, \quad LKT(P(x), Q(x)) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x^2 + x + 2),$$

$$LKO(P(x), R(x)) = x - 1, \quad LKT(P(x), R(x)) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x - 3)(x^2 - x + 3).$$

3.5. Műveletek racionális algebrai törtekkel

A racionális algebrai törtek esetében, az algebrai egész kifejezésektől eltérően, megjelenik a törtkifejezések értelmezettségének problémája. Például az $\frac{1}{x-2}$ algebrai tört nem értelmezett $x = 2$ esetén, az $\frac{x+5}{x^2-5x+6}$ pedig $x = 2$ és $x = 3$ esetén, hiszen ezekre az értékekre a tört nevezője nulla lenne. Ezért minden feladatnál kitűzzük a feltételeket is a megoldás mellett, és így úgynevezett "feltételes azonosságokat" adunk meg.

3.5.1. Algebrai törtek egyszerűsítése

Ha a racionális algebrai törtkifejezésben a számláló és nevező tényezőkre bontása után közös tényezők alakulnak ki, akkor ezekkel a nullától különböző közös tényezőkkel egyszerűsíthetjük a törtkifejezést. Adott A , B és C algebrai kifejezések esetén érvényes tehát, hogy

$$\frac{A \cdot B}{C \cdot B} = \frac{A}{C} \quad \text{ha} \quad B \neq 0 \quad \text{és} \quad C \neq 0.$$

3.35. Példa. Tekintsük az $\frac{ab^2 - b^3}{b^3 - a^2b}$ algebrai törtet. Tényezőkre bontva a számlálót és a nevezőt adódik, hogy

$$\frac{ab^2 - b^3}{b^3 - a^2b} = \frac{b^2(a - b)}{b(b - a)(b + a)} = \frac{-b^2(b - a)}{b(b - a)(b + a)} = -\frac{b}{b + a},$$

ahol az utolsó lépésben a b és $b - a$ közös tényezőkkel osztjuk el a számlálót is és a nevezőt is, tehát $b \neq 0$ és $b - a \neq 0$. A $-\frac{b}{b + a}$ megoldás $b + a \neq 0$ feltétel mellett értelmezett, valamint az egyszerűsítés miatt még a $b \neq 0$ és $b - a \neq 0$ kitűzést is figyelembe kell venni.

3.36. Példa. Tekintsük most az $\frac{3x^2 - 5x - 2}{x^3 - 8}$ algebrai törtet. Tényezőkre bontás után kapjuk, hogy

$$\frac{3x^2 - 5x - 2}{x^3 - 8} = \frac{(x - 2)(3x + 1)}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} = \frac{3x + 1}{x^2 + 2x + 4},$$

ha $x \neq 2$. A $3x^2 - 5x - 2$ polinom tényezőkre bontása a kifejezés átrendezésével történhet, mint $3x^2 - 5x - 2 = 3x^2 - 6x + x - 2 = 3x(x - 2) + x - 2 = (x - 2)(3x + 1)$ vagy pedig a Horner-elrendezés segítségével, az $x^3 - 8$ kifejezés viszont köbök különbsége, így a megfelelő azonosság szerint bontjuk fel, amelynek másodfokú tényezője

$$x^2 + 2x + 4 = x^2 + 2x + 1 + 3 = (x + 1)^2 + 3 > 0,$$

tehát egyetlen x valós számra sem nulla.

3.37. Példa. Egyszerűsítsük most az $\frac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{x^3 + y^3}$ algebrai törtet. Ekkor

$$\begin{aligned} \frac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{x^3 + y^3} &= \frac{(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - x^2y^2}{x^3 + y^3} = \frac{(x^2 + y^2)^2 - (xy)^2}{(x + y)(x^2 - xy + y^2)} = \\ &= \frac{(x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy)}{(x + y)(x^2 - xy + y^2)} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x + y}, \end{aligned}$$

ha $x + y \neq 0$.

3.5.2. Algebrai törtek összeadása és kivonása

Közös nevezőjű algebrai törteket úgy adunk össze vagy vonunk ki egymásból, hogy leírjuk a közös nevezőt, a számlálót pedig összeadjuk vagy kivonjuk egymásból. Ha nem közös az összeadandó vagy kivonandó algebrai törtek nevezője, akkor közös nevező hozzuk őket. Az összeadás vagy kivonás elvégzése után, ha lehetséges, akkor egyszerűsítjük a kifejezést. Ha A , B , C , D olyan adott algebrai kifejezések, hogy $B \neq 0$ és $D \neq 0$, akkor

$$\frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} = \frac{AD \pm BC}{BD}.$$

3.38. Példa. Végezzük el a következő algebrai törtek kivonását:

$$\begin{aligned} \frac{3}{a} - \frac{2a-1}{4a^2-1} - \frac{5}{2a-1} &= \frac{3}{a} - \frac{2a-1}{(2a-1)(2a+1)} - \frac{5}{2a-1} \\ &= \frac{3(2a-1)(2a+1) - (2a-1)a - 5a(2a+1)}{a(2a-1)(2a+1)} \\ &= \frac{3(4a^2-1) - 2a^2 + a - 10a^2 - 5a}{a(2a-1)(2a+1)} \\ &= \frac{12a^2 - 3 - 12a^2 - 4a}{a(2a-1)(2a+1)} \\ &= -\frac{4a+3}{a(2a-1)(2a+1)} \\ &= \frac{4a+3}{a-4a^3}, \quad a \neq \pm \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad a \neq 0. \end{aligned}$$

3.39. Példa. Végezzük el a következő algebrai törtek összeadását:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2+a} + \frac{1}{a^2+3a+2} &= \frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} = \\ &= \frac{a+2+a}{a(a+1)(a+2)} \\ &= \frac{2(a+1)}{a(a+1)(a+2)} \\ &= \frac{2}{a(a+2)}, \quad a \neq 0, \quad a \neq -1, \quad \text{és} \quad a \neq -2. \end{aligned}$$

3.40. Példa. Végezzük el a kijelölt műveletet, majd hozzuk legegyszerűbb alakra a kapott algebrai törtet:

$$\begin{aligned} \frac{a^2+a+1}{a^3-1} - \frac{(a-1)^2(a^2+7a)}{(a+1)(a^3+6a^2-7a)} &= \frac{a^2+a+1}{(a-1)(a^2+a+1)} - \frac{a(a-1)^2(a+7)}{a(a+1)(a-1)(a+7)} \\ &= \frac{1}{a-1} - \frac{a-1}{a+1} \\ &= \frac{a+1-(a-1)^2}{(a-1)(a+1)} \\ &= \frac{a+1-a^2+2a-1}{(a-1)(a+1)} \\ &= \frac{3a-a^2}{a^2-1}, \quad a \neq \pm 1, \quad a \neq 0 \quad \text{és} \quad a \neq -7. \end{aligned}$$

3.5.3. Algebrai törtek szorzása és osztása

Legyenek A, B, C, D olyan adott algebrai kifejezések, hogy $B \neq 0$ és $D \neq 0$. Az algebrai törtek szorzása és osztása esetén a jól ismert

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD},$$

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}, \quad C \neq 0,$$

valamint

$$\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{AD}{BC}, \quad C \neq 0$$

szabályokat alkalmazzuk, miközben sokszor érdemes a számlálót és a nevezőt tényezőkre bontani, s ha lehet, akkor ugyanazon törtek számlálót és nevezőt vagy pedig keresztbe egyszerűsítjük.

3.41. Példa. Végezzük el a szorzás műveletét, majd hozzuk legegyszerűbb alakra a kapott algebrai törtet:

$$\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{a + b}{a^2 + 2ab + b^2} = \frac{(a - b)^2}{(a - b)(a + b)} \cdot \frac{a + b}{(a + b)^2} = \frac{a - b}{(a + b)^2},$$

ha $a - b \neq 0$ és $a + b \neq 0$, azaz $a \neq \pm b$.

3.42. Példa. Végezzük el az adott algebrai törtek osztását. Milyen feltételek mellett érvényes a kapott eredmény?

$$\frac{p^2 + 2pq + q^2}{p^2 - q^2} : \frac{p + q}{2p - 2q} = \frac{(p + q)^2}{(p - q)(p + q)} \cdot \frac{2(p - q)}{p + q} = 2, \quad \text{ha } p \neq \pm q.$$

3.43. Példa. Rendezzük a következő emeletes törtet a megfelelő feltételek mellett:

$$\frac{\frac{x + 1}{x}}{\frac{x^2 - 1}{x^2}} = \frac{x^2(x + 1)}{x(x - 1)(x + 1)} = \frac{x}{x - 1}, \quad \text{ha } x \neq 0 \text{ és } x \neq \pm 1.$$

3.44. Példa. Összetett kifejezések esetén több műveletet is el kell végezni algebrai törtekkel egy feladatban, s ekkor figyelni kell arra, hogy melyik műveletnek van elsőbbsége.

$$\begin{aligned} & 6y - \left(\frac{y}{y + 2} - \frac{y}{y - 2} \right) : \frac{4y}{y^4 - 2y^3 + 8y - 16} = \\ &= 6y - \frac{y(y - 2) - y(y + 2)}{(y - 2)(y + 2)} \cdot \frac{y^3(y - 2) + 8(y - 2)}{4y} = \\ &= 6y - \frac{y(y - 2 - y - 2)}{(y - 2)(y + 2)} \cdot \frac{(y - 2)(y^3 + 8)}{4y} = \\ &= 6y - \frac{-4}{y + 2} \cdot \frac{(y + 2)(y^2 - 2y + 4)}{4} = \\ &= 6y + y^2 - 2y + 4 = \\ &= (y + 2)^2, \quad \text{ha } y \neq 0 \text{ és } y \neq \pm 2. \end{aligned}$$

FELADATOK.

Végezzük el a kijelölt műveleteket a következő feladatokban, majd hozzuk a legegyszerűbb alakra a kapott eredményeket.

1. $\frac{3x^2 + 2xy - y^2}{3y^2 + 4xy + x^2} - 2 + 10 \cdot \frac{xy - 3y^2}{x^2 - 9y^2} = ?$

Megoldás.

$$\begin{aligned}
 & \frac{3x^2 + 2xy - y^2}{3y^2 + 4xy + x^2} - 2 + 10 \cdot \frac{xy - 3y^2}{x^2 - 9y^2} = \\
 = & \frac{3x^2 + 2xy - y^2 - 2(3y^2 + 4xy + x^2)}{3y^2 + 4xy + x^2} + 10 \cdot \frac{y(x - 3y)}{(x - 3y)(x + 3y)} = \\
 = & \frac{3x^2 + 2xy - y^2 - 6y^2 - 8xy - 2x^2}{3y^2 + 4xy + x^2} + 10 \cdot \frac{y}{x + 3y} = \\
 = & \frac{x^2 - 6xy - 7y^2}{3y^2 + 4xy + x^2} + \frac{10y}{x + 3y} = \\
 = & \frac{(x - 7y)(x + y)}{(x + 3y)(x + y)} + \frac{10y}{x + 3y} = \\
 = & \frac{x - 7y}{x + 3y} + \frac{10y}{x + 3y} = \\
 = & \frac{x + 3y}{x + 3y} = \\
 = & 1, \quad \text{ha } x + y \neq 0 \quad \text{és} \quad x + 3y \neq 0.
 \end{aligned}$$

2. $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}} = ?$

Megoldás.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}} = \\
 = & \frac{1+x+1-x}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}} = \\
 = & \frac{2+2x^2+2-2x^2}{1-x^4} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}} = \\
 = & \frac{4+4x^4+4-4x^4}{1-x^8} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}} = \\
 = & \frac{8+8x^8+8-8x^8}{1-x^{16}} + \frac{16}{1+x^{16}} = \\
 = & \frac{16+16x^{16}+16-16x^{16}}{1-x^{32}} = \\
 = & \frac{32}{1-x^{32}}, \quad \text{ha } x \neq \pm 1.
 \end{aligned}$$

$$3. A = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} = ?$$

Megoldás. Vegyük észre, hogy az A kifejezés összeadandói felbonthatók különbségre a következőképpen:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{x+1}{x(x+1)} - \frac{x}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1},$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{x+2-x-1}{(x+1)(x+2)} = \frac{x+2}{(x+1)(x+2)} - \frac{x+1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2},$$

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{x+3-x-2}{(x+2)(x+3)} = \frac{x+3}{(x+2)(x+3)} - \frac{x+2}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3},$$

$$\frac{1}{(x+3)(x+4)} = \frac{x+4-x-3}{(x+3)(x+4)} = \frac{x+4}{(x+3)(x+4)} - \frac{x+3}{(x+3)(x+4)} = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}.$$

Ezért

$$A = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}$$

$$A = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+4}$$

$$A = \frac{x+4-x}{x(x+4)}$$

$$A = \frac{4}{x(x+4)}, \quad \text{ha } x \neq 0, x \neq 1, x \neq 2, x \neq 3, x \neq 4.$$

$$4. \left(\left(\frac{x^2}{y^3} + \frac{1}{x} \right) : \left(\frac{x}{y^2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right) \right) : \frac{(x-y)^2 + 4xy}{1 + \frac{y}{x}} = ?$$

Megoldás.

$$\begin{aligned} & \left(\left(\frac{x^2}{y^3} + \frac{1}{x} \right) : \left(\frac{x}{y^2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right) \right) : \frac{(x-y)^2 + 4xy}{1 + \frac{y}{x}} = \\ &= \left(\frac{x^3 + y^3}{xy^3} : \frac{x^2 - xy + y^2}{xy^2} \right) \cdot \frac{\frac{x+y}{x}}{x^2 - 2xy + y^2 + 4xy} \\ &= \frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{xy^3} \cdot \frac{xy^2}{x^2 - xy + y^2} \cdot \frac{x+y}{x(x^2 + 2xy + y^2)} \\ &= \frac{x+y}{y} \cdot \frac{x+y}{x(x+y)^2} \\ &= \frac{1}{xy}, \quad \text{ha } xy \neq 0 \text{ és } x+y \neq 0. \end{aligned}$$

$$5. \frac{\frac{x-y}{2x-y} - \frac{x^2+y^2+x}{2x^2+xy-y^2}}{(4y^4+4xy^2+x^2):(2y^2+x)} \cdot (y^2+y+xy+x) = ?$$

Megoldás.

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{x-y}{2x-y} - \frac{x^2+y^2+x}{2x^2+xy-y^2}}{(4y^4+4xy^2+x^2):(2y^2+x)} \cdot (y^2+y+xy+x) = \\ &= \frac{\frac{x-y}{2x-y} - \frac{x^2+y^2+x}{2x^2+2xy-xy-y^2}}{\frac{(2y^2+x)^2}{2y^2+x}} \cdot (y(y+1)+x(y+1)) \\ &= \frac{\frac{x-y}{2x-y} - \frac{x^2+y^2+x}{2x(x+y)-y(x+y)}}{2y^2+x} \cdot (y+1)(x+y) \\ &= \frac{(x-y)(x+y)-x^2-y^2-x}{(2x-y)(x+y)} \cdot (y+1)(x+y) \\ &= \frac{x^2-y^2-x^2-y^2-x}{(2x-y)(x+y)(2y^2+x)} \cdot (y+1)(x+y) \\ &= -\frac{(2y^2+x)(y+1)(x+y)}{(2x-y)(x+y)(2y^2+x)} \\ &= \frac{y+1}{y-2x}, \quad \text{ha } x+y \neq 0, 2y^2+x \neq 0, 2x-y \neq 0. \end{aligned}$$

$$6. \text{ Rendezzük az } A = \frac{1 - \frac{1}{(a+x)^2}}{\left(1 - \frac{1}{a+x}\right)^2} \cdot \left(1 - \frac{1 - (a^2+x^2)}{2ax}\right) \text{ kifejezést, ha } x = \frac{1}{a-1}.$$

Megoldás.

$$\begin{aligned} A &= \frac{\frac{(a+x)^2-1}{(a+x)^2}}{(a+x-1)^2} \cdot \frac{2ax-1+a^2+x^2}{2ax} \\ A &= \frac{(a+x-1)(a+x+1)}{(a+x-1)^2} \cdot \frac{(a+x)^2-1}{2ax} = \frac{(a+x+1)^2}{2ax} \\ A &= \frac{\left(a+1+\frac{1}{a-1}\right)^2}{2a \cdot \frac{1}{a-1}} = \frac{\left(\frac{a^2-a+a-1+1}{a-1}\right)^2}{\frac{2a}{a-1}} \\ A &= \frac{\frac{a^4}{(a-1)^2}}{\frac{2a}{a-1}} = \frac{a^3}{2}, \quad \text{ha } a \neq 0, a \neq 1, a+x-1 \neq 0. \end{aligned}$$

7. Mutassuk meg, hogy ha p prímszám, akkor $A = \frac{p^3 + 4p^2 + 10p + 12}{p^3 - p^2 + 2p + 16} \cdot \frac{p^3 - 3p^2 + 8p}{p^2 + 2p + 6}$ is prímszám.

Megoldás.

$$\begin{aligned} A &= \frac{p^3 + 2p^2 + 6p + 2p^2 + 4p + 12}{p^3 + 2p^2 - 3p^2 - 6p + 8p + 16} \cdot \frac{p(p^2 - 3p + 8)}{p^2 + 2p + 6} \\ A &= \frac{p(p^2 + 2p + 6) + 2(p^2 + 2p + 6)}{p^2(p + 2) - 3p(p + 2) + 8(p + 2)} \cdot \frac{p(p^2 - 3p + 8)}{p^2 + 2p + 6} \\ A &= \frac{(p^2 + 2p + 6)(p + 2)}{(p + 2)(p^2 - 3p + 8)} \cdot \frac{p(p^2 - 3p + 8)}{p^2 + 2p + 6} = p. \end{aligned}$$

Valóban, ha p prímszám, akkor $A = p$ is prímszám, kikötés pedig nincs, mert a kifejezések, amelyekkel egyszerűsítünk, mindig pozitívak.

8. Mutassuk meg, hogy az $A = \left(\frac{x + y + z}{x + y - z} + \frac{x + y - z}{x + y + z} \right)^2 - \left(\frac{x + y + z}{x + y - z} - \frac{x + y - z}{x + y + z} \right)^2$ kifejezés értéke nem függ x , y és z értékétől.

Megoldás. Vezessük be az $x + y + z = a$ és $x + y - z = b$ helyettesítést. Ekkor

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2 - \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right)^2 \\ A &= \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \\ A &= \frac{2b}{a} \cdot \frac{2a}{b} = 4, \quad \text{ha } x + y + z \neq 0 \quad \text{és} \quad x + y - z \neq 0. \end{aligned}$$

9. Mutassuk meg, hogy az $A = \left(4p^2 - p + 2 + \frac{5p^2 - 6p + 3}{p - 1} \right) : \left(2p + 1 + \frac{2p}{p - 1} \right)$ kifejezés értéke mindig páratlan szám, ha $p \neq 1$ és $p \in \mathbf{Z}$.

Megoldás.

$$\begin{aligned} A &= \frac{4p^3 - p^2 + 2p - 4p^2 + p - 2 + 5p^2 - 6p + 3}{p - 1} : \frac{2p^2 - 2p + p - 1 + 2p}{p - 1} \\ A &= \frac{4p^3 - 3p + 1}{p - 1} \cdot \frac{p - 1}{2p^2 + p - 1} \\ A &= \frac{3p^3 - 3p + p^3 + 1}{2p^2 + p - 1} \\ A &= \frac{3p(p^2 - 1) + (p + 1)(p^2 - p + 1)}{2p^2 + p - 1} \\ A &= \frac{(p + 1)(3p(p - 1) + p^2 - p + 1)}{2p^2 + p - 1} \\ A &= \frac{(p + 1)(3p^2 - 3p + p^2 - p + 1)}{p^2 + p + p^2 - 1} \\ A &= \frac{(p + 1)(4p^2 - 4p + 1)}{p(p + 1) + (p - 1)(p + 1)} \\ A &= \frac{(p + 1)(2p - 1)^2}{(p + 1)(2p - 1)} = 2p - 1, \quad \text{amely páratlan szám.} \end{aligned}$$

10. Mutassuk meg, hogy ha $x \neq 0$, $y \neq 0$ és $x \neq \pm y$, akkor az

$$A = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}} \cdot \frac{xy}{x^2 - y^2} : \frac{x^2 y^2}{(x + y)^2 - 3xy}$$

kifejezés értéke mindig pozitív, ha x és y ellentétes előjelűek és mindig negatív, ha x és y azonos előjelűek.

Megoldás.

$$\begin{aligned} A &= \frac{\frac{y-x}{xy}}{\frac{x^3+y^3}{x^3 y^3}} \cdot \frac{xy}{(x-y)(x+y)} \cdot \frac{x^2+2xy+y^2-3xy}{x^2 y^2} \\ A &= \frac{x^2 y^2 (y-x)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)} \cdot \frac{xy}{(x-y)(x+y)} \cdot \frac{x^2-xy+y^2}{x^2 y^2} \\ A &= \frac{-xy(x-y)}{(x-y)(x+y)^2} \\ A &= -\frac{xy}{(x+y)^2}. \end{aligned}$$

Ha x és y azonos előjelűek, akkor a szorzatuk pozitív és így $A < 0$. Ha viszont x és y ellentétes előjelűek, akkor szorzatuk negatív és $A > 0$.

3.6. Néhány fontosabb egyenlőtlenség

Ha az algebrai kifejezéseket azonossági transzformációkkal a megfelelő alakra hozzuk, akkor következtethetünk a kifejezés előjelére, vagyis megállapíthatjuk, hogy a vizsgált kifejezés a benne szereplő változók tetszőleges értékeire milyen előjelű. Például tudjuk, hogy ha A tetszőleges algebrai kifejezés, akkor $A^2 \geq 0$ és $-A^2 \leq 0$ az A kifejezésben szereplő változók bármely értékére, az egyenlőség pedig csak $A = 0$ esetben áll fenn. Ebből adódik, hogy algebrai kifejezések négyzeteinek összege is mindig nemnegatív. Ezt a fontos állítást a következő tételben fogalmazzuk meg.

3.11. Tétel. *Legyenek A és B tetszőleges algebrai kifejezések. Ekkor*

$$A^2 + B^2 \geq 0$$

az algebrai kifejezésekben szereplő változók bármely valós értékére, az egyenlőség pedig csak $A = B = 0$ esetén áll fenn.

3.45. Példa. A fenti gondolatmenet alapján $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2 \geq 0$ minden $x \in \mathbf{R}$ -re, ahol az egyenlőség $x = -3$ érték esetén áll fenn, viszont $-x^2 + 4x - 4 = -(x-2)^2 \leq 0$ minden $x \in \mathbf{R}$ értékre, az egyenlőség viszont $x = 2$ esetén igaz.

3.46. Példa. Néhány másodfokú algebrai egész kifejezés előjelét is megállapíthatjuk a fenti tétel alapján, mint $x^2 - xy + y^2 = x^2 - xy + \frac{y^2}{4} - \frac{y^2}{4} + y^2 = \left(x - \frac{y}{4}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} \geq 0$,

minden $x, y \in \mathbf{R}$ esetén, vagy pedig a hozzá nagyon hasonló és szintén gyakran használt kifejezés esetében, hogy $x^2 + xy + y^2 = x^2 + xy + \frac{y^2}{4} - \frac{y^2}{4} + y^2 = \left(x + \frac{y}{4}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} \geq 0$, minden $x, y \in \mathbf{R}$ értékre. Az egyenlőség mindkét esetben $x = y = 0$ esetben lesz igaz.

3.47. Példa. Végül tekintsünk egy összetettebb kifejezést.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz &= \frac{1}{2} (2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz) \\ &= \frac{1}{2} [(x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2xz + z^2) + (y^2 - 2yz + z^2)] \\ &= \frac{1}{2} [(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2] \geq 0 \end{aligned}$$

minden $x, y, z \in \mathbf{R}$ értékre, az egyenlőség pedig $x = y = z$ esetén teljesül. A fenti egyenlőtlenséget $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$ alakban is felírhatjuk.

3.12. Tétel. Minden $x > 0$ valós számra érvényes, hogy

$$x + \frac{1}{x} \geq 2,$$

az egyenlőség pedig $x = 1$ esetén áll fenn.

Bizonyítás. Induljunk ki az ismert $(x - 1)^2 \geq 0$ egyenlőtlenségből, végezzünk rajta ekvivalens átalakításokat, majd mutassuk meg, hogy az állításunk igaz. Négyzetre emeléssel, majd átrendezéssel kapjuk az

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0, \quad \text{illetve} \quad x^2 + 1 \geq 2x$$

egyenlőtlenséget. Mivel $x > 0$, így eloszthatjuk a második egyenlőtlenség mindkét oldalát x -szel. Ekkor kapjuk, hogy

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Mivel az $(x - 1)^2 \geq 0$ egyenlőtlenségben az egyenlőség $x = 1$ -re teljesül, ezért a tekintett egyenlőtlenségben is $x = 1$ -re teljesül az egyenlőség, s a tétel állítását igazoltuk. \diamond

3.48. Példa. Legyenek $x_1, x_2, \dots, x_{2011}$ pozitív valós számok és tekintsük az

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{x_2} &\leq 2 \\ x_2 + \frac{1}{x_3} &\leq 2 \\ &\dots \\ x_{2010} + \frac{1}{x_{2011}} &\leq 2 \\ x_{2011} + \frac{1}{x_1} &\leq 2 \end{aligned}$$

egyenlőtlenségrendszert. Az érdekel bennünket, hogy milyen $x_1, x_2, \dots, x_{2011}$ pozitív valós számok teljesítik az fenti feltételek mindegyikét. Adjuk össze az egyenlőtlenségeket. Ekkor az

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) + \dots + \left(x_{2010} + \frac{1}{x_{2010}}\right) + \left(x_{2011} + \frac{1}{x_{2011}}\right) \leq 4022$$

egyenlőtlenséget kapjuk, ahol a fenti tétel alapján a bal oldalon a zárójelben levő összegek mindegyike nagyobb vagy egyenlő 2-nél, tehát mindkét feltétel egyidőben csak akkor teljesül, ha

$$x_1 + \frac{1}{x_1} = 2, \quad x_2 + \frac{1}{x_2} = 2, \quad \dots, \quad x_{2010} + \frac{1}{x_{2010}} = 2, \quad x_{2011} + \frac{1}{x_{2011}} = 2,$$

azaz ha $x_1 = x_2 = \dots = x_{2010} = x_{2011} = 1$.

3.49. Példa. Mutassuk meg, hogy ha $x + y > 0$, akkor

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^3 \leq \frac{x^3+y^3}{2}.$$

Induljunk ki a bizonyítandó egyenlőtlenségből, s végezzünk ekvivalens átalakításokat.

$$\frac{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}{8} \leq \frac{x^3 + y^3}{2},$$

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \leq 4x^3 + 4y^3,$$

$$3x^3 - 3x^2y - 3xy^2 + 3y^3 \geq 0,$$

$$x^2(x-y) - y^2(x-y) \geq 0,$$

$$(x-y)(x^2 - y^2) \geq 0,$$

$$(x+y)(x-y)^2 \geq 0.$$

Mivel a feltétel szerint $x + y > 0$, s ugyanekkor $(x - y)^2 \geq 0$, így a kapott állítás minden olyan $x, y \in \mathbf{R}$ értékre igaz, ahol $x + y > 0$, tehát a vele ekvivalens egyenlőtlenség is igaz, amelyből kiindultunk.

Az egyenlőtlenségek bizonyítása során sokszor használjuk a *nevezetes közepek* közötti összefüggéseket. Itt csak a legegyszerűbbeket fogjuk megmutatni. Mivel a mértani középben gyök is szerepel, ezért a racionális algebrai kifejezésekről áttérünk az algebrai kifejezésekre.

3.9. Definíció. Legyenek x és y nemnegatív valós számok ($x \geq 0, y \geq 0$). Ekkor az $\frac{x+y}{2}$ számot az adott számok számtani közepének, a \sqrt{xy} számot pedig az adott számok mértani közepének nevezzük.

3.13. Tétel. Az x és y nemnegatív valós számok ($x \geq 0, y \geq 0$) számtani és mértani közepe között fennáll a

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

összefüggés, ahol az egyenlőség $x = y$ esetén érvényes.

Bizonyítás. Induljunk ki a $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$ egyenlőtlenségből, amelyről tudjuk, hogy minden pozitív valós x és y számra fennáll. Végezzünk ekvivalens transzformációkat, s kezdjük a négyzetre emeléssel. Ekkor az

$$x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0$$

majd átrendezéssel az $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ egyenlőtlenséget kapjuk, 2-vel való osztás után pedig a kívánt egyenlőtlenség adódik. Mivel a $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = 0$ egyenlőség $\sqrt{x} = \sqrt{y}$, azaz $x = y$ esetén áll fenn, így tehát igazoltuk az állítást. \diamond

3.10. Definíció. Legyenek x , y és z nemnegatív valós számok ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$). Ekkor az $\frac{x+y+z}{3}$ számot az adott számok számtani közepének, a $\sqrt[3]{xyz}$ számot pedig az adott számok mértani közepének nevezzük.

3.14. Tétel. Az x , y és z nemnegatív valós számok ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$) számtani és mértani közepe között fennáll a

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$$

összefüggés, ahol az egyenlőség $x = y = z$ esetén érvényes.

Bizonyítás. Mivel $x \geq 0$, $y \geq 0$ és $z \geq 0$, így bevezethetjük az $x = a^3$, $y = b^3$ és $z = c^3$ helyettesítést, s a kapott egyenleteknek van egyértelmű megoldása, $a = \sqrt[3]{x}$, $b = \sqrt[3]{y}$ és $c = \sqrt[3]{z}$, ahol $a \geq 0$, $b \geq 0$ és $c \geq 0$ szintén teljesül. A 3.47. Példa alapján állíthatjuk, hogy $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$. Szorozzuk be ezt az egyenlőtlenséget $a + b + c \geq 0$ kifejezéssel. Ekkor

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) \geq (ab + ac + bc)(a + b + c)$$

adódik, ahonnan beszorzás után kapjuk, hogy

$$a^3 + a^2b + a^2c + ab^2 + b^3 + b^2c + ac^2 + bc^2 + c^3 \geq a^2b + ab^2 + abc + a^2c + abc + bc^2 + abc + b^2c + bc^2,$$

rendezés után pedig azt, hogy

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc.$$

Visszahelyettesítve az $a = \sqrt[3]{x}$, $b = \sqrt[3]{y}$ és $c = \sqrt[3]{z}$ kifejezéseket adódik, hogy

$$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}\sqrt[3]{z},$$

ahonnan

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz},$$

illetve a tétel állítása következik. Az egyenlőség $a = b = c$, illetve $\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{z}$, vagyis $x = y = z$ esetén érvényes. \diamond

3.50. Példa. A számtani és mértani közepek között fennálló összefüggés segítségével igazoljuk, hogy minden x , y és z nemnegatív valós számra igaz, hogy

$$(x + y + z)(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) \geq 9\sqrt{xyz}.$$

Az előző tétel alapján igaz, hogy

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz} \quad \text{és} \quad \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}{3} \geq \sqrt[3]{\sqrt{x}\sqrt{y}\sqrt{z}}.$$

Innen

$$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3\sqrt[6]{x^2y^2z^2} \quad \text{és} \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geq 3\sqrt[6]{xyz}.$$

Összeszorozva a fenti egyenlőtlenségek megfelelő oldalait adódik, hogy

$$(x + y + z)(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) \geq 3\sqrt[6]{x^2y^2z^2} \cdot 3\sqrt[6]{xyz},$$

illetve

$$(x + y + z)(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) \geq 9\sqrt[3]{xyz}.$$

FELADATOK.

1. Igazoljuk, hogy a, b, c pozitív valós számok esetén

$$ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c) \geq 6abc.$$

Megoldás. Alkalmazzunk ekvivalens átlakításokat mindaddig, amíg nyilvánvalóvá nem válik az egyenlőtlenség érvényessége. E célból alakítsuk át a baloldali kifejezést.

$$\begin{aligned} a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + a^2c + ac^2 &\geq 6abc, \\ a(b^2 - 2bc + c^2) + b(a^2 - 2ac + c^2) + c(a^2 - 2ab + b^2) + 6abc &\geq 6abc, \\ a(b-c)^2 + b(a-c)^2 + c(a-b)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

2. Igazoljuk, hogy a, b, c pozitív valós számok esetén

$$(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc.$$

Megoldás. Alkalmazzuk háromszor a 3.13. Tételt. Ekkor

$$(a+b)(b+c)(a+c) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ac} = 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc.$$

3. Igazoljuk, hogy a, b, c pozitív valós számok esetén

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9.$$

Megoldás. Alkalmazzuk kétszer a 3.14. Tételt. Ekkor

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 3\sqrt[3]{abc} \cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} = 9\sqrt[3]{\frac{a}{a} \cdot \frac{b}{b} \cdot \frac{c}{c}} = 9\sqrt[3]{1} = 9.$$

4. Igazoljuk, hogy a, b, c pozitív valós számok esetén

$$a^2(1+b^2) + b^2(1+c^2) + c^2(1+a^2) \geq 6abc.$$

Megoldás. Alkalmazzuk először a 3.13. Tételt, majd a 3.14. Tételt. Ekkor

$$\begin{aligned} a^2(1+b^2) + b^2(1+c^2) + c^2(1+a^2) &\geq a^2 \cdot 2\sqrt{b^2 \cdot 1} + b^2 \cdot 2\sqrt{c^2 \cdot 1} + c^2 \cdot 2\sqrt{a^2 \cdot 1} = \\ &= 2a^2b + 2b^2c + 2ac^2 = 2(a^2b + b^2c + ac^2) \geq 2 \cdot 3\sqrt[3]{a^2b \cdot b^2c \cdot ac^2} = 6abc. \end{aligned}$$

5. Igazoljuk, hogy a pozitív valós szám esetén

$$2a^3 + 11 > 9a.$$

Megoldás. Alkalmazzuk kétszer a 3.14. Tételt. Ekkor

$$2a^3 + 11 = (a^3 + 1 + 1) + (a^3 + 8 + 1) > 3\sqrt[3]{a^3 \cdot 1 \cdot 1} + 3\sqrt[3]{a^3 \cdot 8 \cdot 1} = 3a + 3 \cdot 2a = 9a,$$

mivel az egyenlőség nem tud teljesülni.

4. Lineáris egyenletek, egyenlőtlenségek és egyenletrendszerek

4.1. Lineáris egyenletek

4.1. Definíció. Minden olyan egyenletet, amely ekvivalens átalakításokkal

$$ax = b$$

alakra hozható, ahol a és b adott valós számok, x pedig az ismeretlen, x -ismeretlenű lineáris algebrai egyenletnek nevezünk.

4.2. Definíció. Legyenek a és b tetszőleges valós számok. Az $ax = b$ lineáris egyenlet megoldása minden olyan x_0 valós szám (ha létezik ilyen), amelyre teljesül az $ax_0 = b$ egyenlőség, vagyis, ha az x_0 szám kielégíti az $ax = b$ egyenletet.

Megoldani az egyenletet annyit jelent, mint megtalálni az összes megoldását, vagy megmutatni, hogy az adott egyenletnek nincs megoldása. Az egyenlet megoldásának menete az egyenlőség-reláció tulajdonságain alapszik. Ezeket a tulajdonságokat a következő tételben fogalmazzuk meg.

4.1. Tétel. Legyenek B , J , B_1 , J_1 és K tetszőleges algebrai kifejezések. Jelölje B az egyenlet bal oldalát, J pedig az egyenlet jobb oldalát. Igazak a következő állítások:

1° Az egyenlet B bal oldala lecserélhető egy vele identikusan megegyező B_1 kifejezéssel, azaz

$$B = B_1 \implies (B = J \iff B_1 = J).$$

2° Az egyenlet J jobb oldala lecserélhető egy vele identikusan megegyező J_1 kifejezéssel, azaz

$$J = J_1 \implies (B = J \iff B = J_1).$$

3° Ha a K kifejezés értelmezett minden olyan valós számra, ahol a B és J kifejezések is értelmezettek, akkor az egyenlet mindkét oldalához hozzáadhatjuk a K kifejezést, azaz

$$B = J \iff B + K = J + K.$$

4° Ha a K kifejezés értelmezett minden olyan valós számra, ahol a B és J kifejezések is értelmezettek és $K \neq 0$, akkor az egyenlet mindkét oldalát megszorozhatjuk a K kifejezéssel, azaz

$$B = J \iff B \cdot K = J \cdot K.$$

4.3. Definíció. Két egyenlet egymással ekvivalens, ha megoldáshalmazaik megegyeznek, azaz

$$E_1 \sim E_2 \iff M_1 = M_2,$$

ha E_1 és E_2 jelöli a két egyenletet, M_1 és M_2 pedig a megfelelő megoldáshalmazokat.

4.1. Példa. Tekintsük az

$$E_1 : x + 2 = 0, \quad E_2 : \frac{x^2 + 2}{x + 2} = 0, \quad E_3 : |x + 2| = 0 \quad \text{és} \quad E_4 : \frac{x^2 - 4}{x + 2} = 0$$

egyenleteket, melyek megoldáshalmazai, ugyanebben a sorrendben,

$$M_1 = \{-2\}, \quad M_2 = \emptyset, \quad M_3 = \{-2\} \quad \text{és} \quad M_4 = \{2\}.$$

Mivel a megoldáshalmazok közül csak $M_1 = M_3$, így $E_1 \sim E_3$, vagyis a megadott egyenletek közül csupán az első és harmadik egyenlet ekvivalens egymással.

4.4. Definíció. *Ha egy egyenletnek egy és csakis egy megoldása van, akkor azt mondjuk rá, hogy határozott, ha végtelen sok megoldása van, akkor határozatlannak nevezzük, ha pedig nincs egy megoldása sem, akkor ellentmondásos egyenletnek mondjuk.*

A definícióban szereplő fogalmaknak megfelelően kimondható a következő tétel.

4.2. Tétel. *Legyenek a és b tetszőleges valós számok. Az $ax = b$ lineáris egyenlet*

1° *egyértelműen megoldható, azaz határozott, ha $a \neq 0$ és ekkor a megoldása $x = \frac{b}{a}$,*

2° *nem megoldható, azaz ellentmondásos, ha $a = 0$ és $b \neq 0$, mert most a $0 \cdot x = b$ egyenletet lehetetlen teljesíteni,*

3° *megoldható és végtelen sok megoldása van, azaz határozatlan, ha $a = 0$ és $b = 0$, hiszen ekkor a $0 \cdot x = 0$ egyenletnek minden $x \in \mathbf{R}$ szám megoldása.*

4.2. Példa. A $3(x + 2)^2 + (2x - 1)^2 - 7(x + 3)(x - 3) = 28$ egyenlet határozott, mert négyzetre emelés és beszorzás után a $3x^2 + 12x + 12 + 4x^2 - 4x + 1 - 7x^2 + 63 - 28 = 0$ ekvivalens egyenletet kapjuk, amelyből rendezés után a $8x + 48 = 0$ lineáris egyenlet következik, ahonnan $x = -\frac{48}{8} = -6$ az egyetlen megoldás, vagyis $M = \{-6\}$.

4.3. Példa. A $\frac{7x - 6}{3} + \frac{3x + 6}{2} = 5x - \frac{7x - 6}{6}$ egyenlet határozatlan, mert 6-tal való beszorzás után a $14x - 12 + 9x + 18 = 30x - 7x + 6$ egyenletet kapjuk, amelyből rendezés után a $23x - 23x = 6 - 6$, illetve $0 \cdot x = 0$ egyenlet következik, amelynek minden valós szám megoldása, vagyis $M = \mathbf{R}$.

4.4. Példa. Az $\left(\frac{x}{2} - 3\right) \cdot 4 = 2x - 1$ egyenlet ellentmondásos, mert rendezés után a $2x - 12 = 2x - 1$ lineáris egyenletet kapjuk, amelyből $0 \cdot x = 11$ következik. Ennek az egyenletnek nincs egy megoldása sem, a megoldáshalmaz az üreshalmaz, az $M = \emptyset$.

I. Lineáris egyenletre visszavezethető nemlineáris algebrai egyenletek

Sok esetben a nemlineáris egyenletek megoldása visszavezethető lineáris egyenletek megoldására. Például, ha az egyenlet bal oldala felírható lineáris tényezők szorzataként, az egyenlet jobb oldalán pedig nulla áll, akkor felhasználva az

$$A_1(x) \cdot A_2(x) \cdots A_k(x) = 0 \iff A_1(x) = 0 \quad \vee \quad A_2(x) = 0 \quad \vee \cdots \vee \quad A_k(x) = 0$$

ekvivalenciát, az eredeti nemlineáris egyenlet megoldását visszavezetjük több lineáris egyenlet megoldására.

4.5. Példa. Írjuk fel az $x^2 - 7x + 12 = 0$ egyenletet $(x-3)(x-4) = 0$ ekvivalens alakban, ahonnan következik, hogy egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, vagyis $x-3=0$ vagy $x-4=0$, illetve $x=3$ vagy $x=4$. A megoldáshalmaz tehát $M = \{3, 4\}$.

4.6. Példa. A $2x^2 - x - 10 = 0$ másodfokú egyenletet megoldása is visszavezethető lineáris egyenletek megoldására, hiszen az eredeti egyenlet ekvivalens alakja $(2x-5)(x+2) = 0$, ahonnan $2x-5=0$ vagy $x+2=0$ kell teljesüljön, ebből pedig az egyik megoldás $x_1 = \frac{5}{2}$, a másik pedig $x_2 = -2$. A megoldáshalmaz most $M = \left\{-2, \frac{5}{2}\right\}$.

4.7. Példa. Tekintsük most az $x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$ harmadfokú egyenletet, amelynek bal oldala felbontható szorzat alakjába a következő módon, majd megoldható az előző gondolatmenet segítségével.

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0 &\iff x^2(x-4) - (x-4) = 0 \\ &\iff (x-4)(x^2-1) = 0 \\ &\iff (x-4)(x-1)(x+1) = 0 \\ &\iff x-4=0 \quad \vee \quad x-1=0 \quad \vee \quad x+1=0 \\ &\iff x=4 \quad \vee \quad x=1 \quad \vee \quad x=-1. \end{aligned}$$

A megoldáshalmaz tehát $M = \{-1, 1, 4\}$.

II. Lineáris egyenletre visszavezethető egyenletek ismeretlennel a nevezőben

Ha az egyenletben szereplő kifejezések racionális algebrai kifejezések, akkor előfordulhat, hogy a nevezőben is szerepel az x ismeretlen. Ilyen esetben meg kell szabadulnunk minden törttől, ezért az egyenlet mindkét oldalát beszorozzuk a nevezőben szereplő egész algebrai kifejezések legkisebb közös többszörösével. Mivel nullával nem szorozhatjuk az egyenleteket, ezért a beszorzásokkal egyidőben kikötéseket is kell tennünk, amelyeket a megoldáshalmaz felírásánál is figyelembe kell vennünk.

4.8. Példa. Oldjuk meg az

$$\frac{5-x}{4x^2-8x} + \frac{7}{8x} = \frac{x-1}{2x^2-4x} + \frac{1}{8x-16}$$

egyenletet. Bontsuk fel szorzatra a nevezőket. Ekkor felírhatjuk, hogy

$$\frac{5-x}{4x(x-2)} + \frac{7}{8x} = \frac{x-1}{2x(x-2)} + \frac{1}{8(x-2)}.$$

Szorozzuk be az egyenlet mindkét oldalát a nevezőkben szereplő kifejezések legkisebb közös többszörösével, azaz $8x(x-2)$ -vel azzal a kikötéssel, hogy $x \neq 0$ és $x \neq 2$. Ekkor a

$$2(5-x) + 7(x-2) = 4(x-1) + x$$

egyenletet kapjuk, ahonnan beszorzás után a $10-2x+7x-14 = 4x-4+x$, rendezés után pedig a $0 \cdot x = 0$ egyenlet adódik. Ennek az egyenletnek a megoldása minden valós szám, de figyelembe véve a kikötéseket azt kapjuk, hogy a megoldáshalmaz $M = \mathbf{R} \setminus \{0, 2\}$.

4.9. Példa. Határozzuk most meg az

$$\frac{y^2 + 17}{y^2 - 1} = \frac{y - 2}{y + 1} - \frac{5}{1 - y}$$

egyenlet megoldáshalmazát. Írjuk fel az egyenlet nevezőit szorzatalakban. Ekkor

$$\frac{y^2 + 17}{(y - 1)(y + 1)} = \frac{y - 2}{y + 1} + \frac{5}{y - 1}$$

majd szorozzuk be mindkét oldalt $(y - 1)(y + 1)$ -gyel, azzal, hogy kikötjük, $y \neq \pm 1$. Beszorzás után kapjuk az $y^2 + 17 = (y - 2)(y - 1) + 5(y + 1)$ egyenletet, amely rendezés után az $y^2 + 17 = y^2 - 3y + 2 + 5y + 5$, illetve $2y = 10$ lineáris egyenletre vezetődik vissza. Ennek megoldása $y = 5$, amely értéket a kikötésekkel nem zártunk ki a lehetséges megoldások közül, így a megoldáshalmaz $M = \{5\}$.

III. Abszolút értéket tartalmazó lineáris egyenletek

Az abszolút értéket tartalmazó lineáris egyenleteket fel kell írni abszolút értékek nélkül, felhasználva $a \in \mathbf{R}$ esetén az

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

definíciót és figyelembe véve a felbontás után a megfelelő intervallumokat.

4.10. Példa. Az $|x - 4| + x = 10$ egyenletet, az abszolút érték elhagyása után, két különböző tartományban kétféleképpen írható fel. Mivel

	$(-\infty, 4)$	$(4, \infty)$
$x - 4$	$-$	$+$

így a két eset a következő:

1° $x < 4$ esetén $x - 4 < 0$, az ekvivalens egyenlet pedig

$$-x + 4 + x = 10, \quad \text{azaz} \quad 0 \cdot x = 6,$$

ami azt jelenti, hogy az egyenlet ellentmondásos, vagyis $M_1 = \emptyset$.

2° $x \geq 4$ esetén $x - 4 \geq 0$, az ekvivalens egyenlet pedig

$$x - 4 + x = 10, \quad \text{azaz} \quad 2x = 14, \quad \text{vagyis} \quad x = 7,$$

ami $7 > 4$ miatt azt jelenti, hogy az egyenlet határozott és $M_2 = \{7\}$.

Mivel az eredeti egyenlet megoldáshalmaza $M = M_1 \cup M_2 = \{7\}$, ezért a 7 egyetlen megoldása az egyenletnek.

4.11. Példa. Oldjuk most meg a $|x + 4| + |x - 1| = 5$ egyenletet. Mivel

	$(-\infty, -4)$	$(-4, 1)$	$(1, \infty)$
$x + 4$	$-$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$+$

így most három esetet kell figyelembe venni.

1° $x < -4$ esetén $x + 4 < 0$ és $x - 1 < 0$, az ekvivalens egyenlet pedig

$$-x - 4 - x + 1 = 5, \quad \text{azaz} \quad -2x = 8, \quad \text{vagyis} \quad x = -4,$$

ám ez a megoldás nincs benne a szemlélt intervallumban, így $M_1 = \emptyset$.

2° $-4 \leq x < 1$ esetén $x + 4 \geq 0$ és $x - 1 < 0$, az ekvivalens egyenlet pedig

$$x + 4 - x + 1 = 5, \quad \text{azaz} \quad 0 \cdot x = 0,$$

ami azt jelenti, hogy az egyenlet határozatlan, vagyis végtelen sok megoldása van, ami ebben az esetben azt jelenti, hogy $M_2 = [-4, 1)$.

3° $x \geq 1$ esetén $x + 4 \geq 0$ és $x - 1 \geq 0$, az ekvivalens egyenlet pedig

$$x + 4 + x - 1 = 5, \quad \text{azaz} \quad 2x = 2, \quad \text{vagyis} \quad x = 1,$$

és mivel ez a megoldás benne van a szemlélt intervallumban, így $M_3 = \{1\}$.

Mivel az eredeti egyenlet megoldáshalmaza $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 = [-4, 1]$, ezért az eredeti egyenletnek most végtelen sok megoldása van.

4.12. Példa. Végül tekintsük a $\sqrt{x^2 - 8x + 16} - |2x + 3| = 2$ egyenletet és határozzuk meg a megoldáshalmazát. Mivel $x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$ és $\sqrt{(x - 4)^2} = |x - 4|$, ezért a szemlélt egyenlet felírható $|x - 4| - |2x + 3| = 2$ alakban. Írjuk fel a táblázatot:

	$\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$	$\left(-\frac{3}{2}, 4\right)$	$(4, \infty)$
$2x + 3$	–	+	+
$x - 4$	–	–	+

Így most három esetet kell figyelembe venni.

1° $x < -\frac{3}{2}$ esetén $2x + 3 < 0$ és $x - 4 < 0$, az ekvivalens egyenlet pedig

$$-x + 4 + 2x + 3 = 2, \quad \text{azaz} \quad x + 7 = 2, \quad \text{vagyis} \quad x = -5,$$

és mivel ez a megoldás benne van a szemlélt intervallumban, így $M_1 = \{-5\}$.

2° $-\frac{3}{2} \leq x < 4$ esetén $2x + 3 \geq 0$ és $x - 4 < 0$, az ekvivalens egyenlet pedig

$$-x + 4 - 2x - 3 = 2, \quad \text{azaz} \quad -3x = 1, \quad \text{vagyis} \quad x = -\frac{1}{3},$$

a kapott megoldás benne van a szemlélt intervallumban, így $M_2 = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

3° $x \geq 4$ esetén $2x + 3 \geq 0$ és $x - 4 \geq 0$, az ekvivalens egyenlet pedig

$$x - 4 - 2x - 3 = 2, \quad \text{azaz} \quad -x = 9, \quad \text{vagyis} \quad x = -9,$$

és most ez a megoldás nincs benne a szemlélt intervallumban, így $M_3 = \emptyset$.

Mivel az eredeti egyenlet megoldáshalmaza $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 = \left\{-5, -\frac{1}{3}\right\}$, ezért az eredeti egyenletnek most két megoldása van.

IV. Paraméteres lineáris egyenletek

Ha egy lineáris egyenletben az x (y , z , t vagy más) ismeretlen kívül olyan együttható is szerepel, amely változtathatja az értékeit, akkor ezt a változót most *paraméternek* nevezzük, és ki kell vizsgálni, hogy értékeitől függően mikor lesz az egyenlet határozott, határozatlan, vagy esetleg ellentmondásos. A megoldások paraméterek szerinti kivizsgálását *diszkusszió*nak is nevezzük.

4.13. Példa. Vizsgáljuk ki az $a(ax+1) = 2(2x-1)$ lineáris egyenlet megoldásait a benne szereplő valós a paraméter értékeitől függően. Először rendezzük az egyenletet.

$$\begin{aligned} a(ax+1) = 2(2x-1) &\iff a^2x - 4x = -a - 2 &\iff \\ \iff (a-2)(a+2)x = -(a+2) &\iff x = \frac{1}{2-a}, \quad \text{ha } a \neq \pm 2. \end{aligned}$$

Diszkusszió:

1° Ha $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, akkor az egyenlet határozott és egyetlen megoldása $x = \frac{1}{2-a}$.

2° Ha $a = -2$, akkor ezt az eredeti egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy $0 \cdot x = 0$, vagyis az egyenlet határozatlan, így végtelen sok megoldása van.

3° Ha $a = 2$, akkor ezt az eredeti egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy $0 \cdot x = -4$, vagyis az egyenlet ellentmondásos, hiszen nincs megoldása.

4.14. Példa. Oldjuk meg az $(a^2 - 5a + 6)x = a - 3$ egyenletet, ahol tetszőleges valós paraméter. Mivel az egyenlet most felírható $(a-2)(a-3)x = a-3$ alakban, így

$$x = \frac{a-3}{(a-2)(a-3)} = \frac{1}{a-2} \quad \text{ha } a \neq 2 \text{ és } a \neq 3.$$

Diszkusszió:

1° Ha $a \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$, akkor az egyenlet határozott és egyetlen megoldása $x = \frac{1}{a-2}$.

2° Ha $a = 2$, akkor ezt az eredeti egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy $0 \cdot x = -1$, vagyis az egyenlet ellentmondásos, mert nincs megoldása.

3° Ha $a = 3$, akkor ezt az eredeti egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy $0 \cdot x = 0$, vagyis az egyenlet határozatlan, így végtelen sok megoldása van.

4.15. Példa. Vizsgáljuk most ki a $\frac{c+x}{cx} = \frac{1}{c} + \frac{c}{c+x}$ egyenlet megoldásait a benne szereplő valós c paraméter értékeitől függően. Először rendezzük az egyenletet, azaz fejezzük ki x -et.

$$\begin{aligned} \frac{c+x}{cx} &= \frac{1}{c} + \frac{c}{c+x} &\iff \frac{c+x}{cx} &= \frac{c+x+c^2}{c(c+x)} &\iff \\ \iff c(c+x)^2 &= cx(c+c^2+x) &\iff c^3 &= c^3x - c^2x &\iff \\ \iff c^2(c-1)x &= c^3 &\iff x &= \frac{c}{c-1}, \quad \text{ha } c \neq 0 \text{ és } c \neq 1. \end{aligned}$$

Diszkusszió:

1° Ha $c \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, akkor az egyenlet határozott és egyetlen megoldása $x = \frac{c}{c-1}$.

2° Ha $c = 0$, akkor ezt az eredeti egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy $0 \cdot x = 0$, az egyenlet határozatlan, így végtelen sok megoldása van.

3° Ha $c = 1$, akkor ezt az eredeti egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy $0 \cdot x = 1$, az egyenlet most ellentmondásos, mert nincs megoldása.

FELADATOK

1. Határozzuk meg, hogy melyek ekvivalensek a következő egyenletek közül:

$$E_1 : 2x(3x - 2) - 3 \left(1 - (2 - x)(2x + 3) - \frac{x - 3}{2} \right) = 13,$$

$$E_2 : \frac{2x + 19}{5x^2 - 5} - \frac{17}{x^2 - 1} - \frac{3}{1 - x} = 0,$$

$$E_3 : \frac{3x - 3}{2x^2 - 2} - \frac{2x + 2}{3x^2 + 6x + 3} = \frac{5x - 5}{12x^2 - 24x + 12}.$$

Megoldás. A feladat megoldásához szükségünk van az egyenletek megoldáshalmazainak meghatározására, ezért oldjuk meg az egyenleteket.

$$E_1 : 2x(3x - 2) - 3 \left(1 - (2 - x)(2x + 3) - \frac{x - 3}{2} \right) = 13$$

$$6x^2 - 4x - 3 + 3(4x + 6 - 2x^2 - 3x) + \frac{3x - 9}{2} = 13$$

$$6x^2 - 4x - 3 + 12x + 18 - 6x^2 - 9x + \frac{3x - 9}{2} = 13$$

$$\frac{3x - 9}{2} - x = -2 \quad / \cdot 2$$

$$3x - 9 - 2x = -4$$

$$x = 5.$$

Az E_1 egyenlet megoldáshalmaza tehát $M_1 = \{5\}$.

$$E_2 : \frac{2x + 19}{5x^2 - 5} - \frac{17}{x^2 - 1} - \frac{3}{1 - x} = 0, \quad x \neq \pm 1$$

$$\frac{2x + 19}{5(x - 1)(x + 1)} - \frac{17}{(x - 1)(x + 1)} + \frac{3}{x - 1} = 0 \quad / \cdot 5(x - 1)(x + 1)$$

$$2x + 19 - 85 + 15x + 15 = 0$$

$$17x = 51$$

$$x = 3.$$

Az E_2 egyenlet megoldáshalmaza tehát $M_2 = \{3\}$.

$$E_3 : \frac{3x - 3}{2x^2 - 2} - \frac{2x + 2}{3x^2 + 6x + 3} = \frac{5x - 5}{12x^2 - 24x + 12}$$

$$\frac{3(x - 1)}{2(x - 1)(x + 1)} - \frac{2(x + 1)}{3(x + 1)^2} = \frac{5(x - 1)}{12(x - 1)^2}, \quad x \neq \pm 1$$

$$\frac{3}{2(x + 1)} - \frac{2}{3(x + 1)} = \frac{5}{12(x - 1)} \quad / \cdot 12(x - 1)(x + 1)$$

$$18(x - 1) - 8(x - 1) = 5(x + 1)$$

$$10x - 10 = 5x + 5$$

$$5x = 15$$

$$x = 3.$$

Az E_3 egyenlet megoldáshalmaza tehát $M_3 = \{3\}$.

Mivel a kapott megoldáshalmazok közül $M_2 = M_3$, így $E_2 \sim E_3$.

2. Oldjuk meg a $\frac{3(x+1)}{2} - \frac{2(x-3)}{5} - \frac{31x}{10} = 5 - 2x$ egyenletet.

Megoldás. 10-zel való beszorzás és rendezés után a következő ekvivalens egyenleteket kapjuk:

$$\begin{aligned}\frac{3(x+1)}{2} - \frac{2(x-3)}{5} - \frac{31x}{10} &= 5 - 2x \quad / \cdot 10 \\ 15(x+1) - 4(x-3) - 31x &= 50 - 20x \\ 15x + 15 - 4x + 12 - 31x &= 50 - 20x \\ -20x + 27 &= 50 - 20x \\ 0 \cdot x &= 23.\end{aligned}$$

Mivel a kapott egyenletnek nincs megoldása, így az egyenlet ellentmondásos, megoldáshalmaza pedig $M = \emptyset$.

3. Vizsgáljuk ki, hogy megoldható-e a következő egyenlet:

$$\frac{1 + \frac{x}{4}}{2} + \frac{3.5x + 1}{6} - \frac{1 + 5x}{24} - \frac{\frac{7}{2} + 6x}{12} = \frac{1}{3}.$$

Megoldás. Szorozzuk az adott egyenlet mindkét oldalát 24-gyel, majd rendezzük. Ekkor a következő ekvivalens egyenletekhez jutunk:

$$\begin{aligned}\frac{1 + \frac{x}{4}}{2} + \frac{3.5x + 1}{6} - \frac{1 + 5x}{24} - \frac{\frac{7}{2} + 6x}{12} &= \frac{1}{3} \quad / \cdot 24 \\ 12 \left(1 + \frac{x}{4} \right) + 4(3.5x + 1) - (1 + 5x) - 2 \left(\frac{7}{2} + 6x \right) &= 8 \\ 12 + 3x + 14x + 4 - 1 - 5x - 7 - 12x &= 8 \\ 0 \cdot x &= 0.\end{aligned}$$

A kapott egyenletnek, és így az eredetinek is, minden valós szám megoldása, vagyis a megoldáshalmaz $M = \mathbf{R}$, ezért az egyenlet megoldható, de határozatlan.

4. Van-e megoldása a $\frac{3x-1}{x-1} - \frac{2x+5}{x+3} + \frac{4}{x^2+2x-3} = 1$ egyenletnek?

Megoldás. Bontsuk fel a nevezőt szorzat alakjába, majd szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát a legkisebb közös többszörössel és rendezzük. Ekkor a következő ekvivalens átalakítások adódnak:

$$\begin{aligned}\frac{3x-1}{x-1} - \frac{2x+5}{x+3} + \frac{4}{x^2+2x-3} &= 1, \quad x \neq 1 \quad \text{és} \quad x \neq -3 \\ \frac{3x-1}{x-1} - \frac{2x+5}{x+3} + \frac{4}{(x-1)(x+3)} &= 1 \quad / \cdot (x-1)(x+3) \\ (3x-1)(x+3) - (2x+5)(x-1) + 4 &= (x-1)(x+3) \\ 3x^2 + 8x - 3 - 2x^2 - 3x + 5 + 4 &= x^2 + 2x - 3 \\ 3x &= -9 \\ x &= -3,\end{aligned}$$

ezt viszont nem fogadhatjuk el megoldásnak, hiszen kikötöttük, hogy $x \neq -3$. Ezért az eredeti egyenletnek nincs megoldása, a megoldáshalmaz tehát $M = \emptyset$.

5. Hány megoldása van az $|2x - 3| - \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 5x - 10$ egyenletnek?

Megoldás. Mivel $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = \sqrt{(x + 1)^2} = |x + 1|$, ezért az egyenlet felírható $|2x - 3| - |x + 1| = 5x - 10$ alakban és

	$(-\infty, -1)$	$\left(-1, \frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$
$2x - 3$	–	–	+
$x + 1$	–	+	+

miatt három esetet kell figyelembe venni.

1° $x < -1$ esetén $2x - 3 < 0$ és $x + 1 < 0$, az ekvivalens egyenlet pedig

$$-2x + 3 + x + 1 = 5x - 10, \quad \text{azaz} \quad 6x = 14, \quad \text{vagyis} \quad x = \frac{7}{3},$$

és a kapott megoldás nincs benne a szemlélt intervallumban, így $M_1 = \emptyset$.

2° $-1 \leq x < \frac{3}{2}$ esetén $2x - 3 < 0$ és $x + 1 \geq 0$, az ekvivalens egyenlet pedig

$$-2x + 3 - x - 1 = 5x - 10, \quad \text{azaz} \quad 8x = 12, \quad \text{vagyis} \quad x = \frac{3}{2},$$

most a megoldás benne van a szemlélt intervallumban, így $M_2 = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

3° $x \geq \frac{3}{2}$ esetén $2x - 3 \geq 0$ és $x + 1 \geq 0$, az ekvivalens egyenlet pedig

$$2x - 3 - x - 1 = 5x - 10, \quad \text{azaz} \quad 4x = 6, \quad \text{vagyis} \quad x = \frac{3}{2},$$

és mivel ez a megoldás nincs benne a szemlélt intervallumban, így $M_3 = \emptyset$.

Az eredeti egyenlet megoldáshalmaza most $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 = \left\{\frac{3}{2}\right\}$, ezért az eredeti egyenletnek egyetlen egy megoldása van.

6. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\frac{x - 29}{1971} + \frac{x - 27}{1973} + \frac{x - 25}{1975} + \cdots + \frac{x - 3}{1997} = \frac{x - 1997}{3} + \frac{x - 1995}{5} + \cdots + \frac{x - 1971}{29}.$$

Megoldás. Vegyük észre, hogy minden tört számlálójában és nevezőjében a számok összege 2000, ezért az egyenletet felírhatjuk a következő ekvivalens alakban:

$$\begin{aligned} & \frac{x - 2000 + 1971}{1971} + \frac{x - 2000 + 1973}{1973} + \frac{x - 2000 + 1975}{1975} + \cdots + \frac{x - 2000 + 1997}{1997} = \\ & = \frac{x - 2000 + 3}{3} + \frac{x - 2000 + 5}{5} + \frac{x - 2000 + 7}{7} + \cdots + \frac{x - 2000 + 29}{29}, \end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned} & \frac{x - 2000}{1971} + 1 + \frac{x - 2000}{1973} + 1 + \frac{x - 2000}{1975} + 1 + \cdots + \frac{x - 2000}{1997} + 1 = \\ & = \frac{x - 2000}{3} + 1 + \frac{x - 2000}{5} + 1 + \frac{x - 2000}{7} + 1 + \cdots + \frac{x - 2000}{29} + 1 \end{aligned}$$

módon. Mivel az egyenlet bal és jobb oldalán egyenlő számú tag van, azaz 14-14, ezért az egyesek kiesnek. Ha minden tényezőt átviszünk a bal oldalra és kiemeljük az $x - 2000$ közös tényezőt, akkor az

$$(x - 2000) \left(\frac{1}{1971} + \frac{1}{1973} + \cdots + \frac{1}{1997} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \cdots - \frac{1}{29} \right) = 0$$

egyenletet kapjuk. Mivel egy szorzat akkor nulla, ha legalább az egyik tényező nulla és a második zárójelben csupa kicsi számból vonunk ki ugyanannyi nagyobb számot, ezért ott egy negatív állandót kapunk, így az $x - 2000 = 0$ egyenlethez jutunk, amelynek megoldása $x = 2000$. Az eredeti egyenlet megoldáshalmaza tehát $M = \{2000\}$.

7. Határozzuk meg a valós a és b paraméterek értékeit úgy, hogy az

$$a - (a + b)x = (b - a)x - (3 + bx)$$

egyenlet határozatlan legyen.

Megoldás. Végezzük el a beszorzásokat és rendezzük az egyenletet. Ekkor az

$$a - ax - bx = bx - ax - 3 - bx, \quad \text{illetve} \quad bx = a + 3$$

egyenlethez jutunk. A kapott egyenlet akkor határozatlan, ha $b = 0$ és $a = -3$, mert ebben az esetben $0 \cdot x = 0$ alakú, s a megoldáshalmaza $M = \mathbf{R}$.

8. Vizsgáljuk ki a következő egyenlet megoldhatóságát az a és b valós paraméterek értékeitől függően:

$$\frac{a}{b} - \frac{ax}{bx - 1} = \frac{b}{a} - \frac{bx}{ax - 1}.$$

Megoldás. $a \neq 0$, $b \neq 0$, $x \neq \frac{1}{a}$ és $x \neq \frac{1}{b}$ feltételek mellett szorozzuk be az egyenlet mindkét oldalát a nevezőben szereplő kifejezések legkisebb közös többszörösével, azaz $ab(ax - 1)(bx - 1) - gyel$. Ekkor a rendezés során a következő ekvivalens egyenleteket kapjuk:

$$\begin{aligned} a^2(ax - 1)(bx - 1) - a^2bx(ax - 1) &= b^2(ax - 1)(bx - 1) - ab^2x(bx - 1) \\ a^3bx^2 - a^3x - a^2bx + a^2 - a^3bx^2 + a^2bx &= ab^3x^2 - ab^2x - b^3x + b^2 - ab^3x^2 + ab^2x \\ -a^3x + a^2 &= -b^3x + b^2 \\ (b^3 - a^3)x &= b^2 - a^2 \\ (b - a)(b^2 + ab + a^2)x &= (b - a)(b + a) \quad / : (b - a) \quad b \neq a \\ (b^2 + ab + a^2)x &= b + a, \quad \text{illetve} \quad x = \frac{a + b}{a^2 + ab + b^2}. \end{aligned}$$

Diszkusszió:

- 1° Ha $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$, akkor az egyenlet határozott és egyetlen megoldása $x = \frac{a + b}{a^2 + ab + b^2}$.
 2° Ha $a = 0$ vagy $b = 0$, akkor az eredeti egyenlet nem értelmezett.
 3° Ha $a = b$, akkor a $0 \cdot x = 0$ egyenletet kapjuk, vagyis az egyenlet határozatlan és megoldáshalmaza $M = \mathbf{R}$.

9. Egy kétjegyű szám egyeseinek helyén álló számjegy 3-mal nagyobb, mint a tízesek helyén álló számjegy. Ha ezt a kétjegyű számot elosztjuk számjegyeinek összegével, akkor az osztás hányadosa 3, maradéka pedig 4 lesz. Határozzuk meg ezt a számot.

Megoldás. Legyen \overline{xy} a keresett kétjegyű szám, ahol x jelöli a tízeseket és y az egyeseket. Ekkor a kétjegyű szám számértéke $\overline{xy} = 10x + y$. A feltételek szerint most $y = x + 3$ és így $\overline{xy} = 10x + x + 3 = 11x + 3$. A maradékos osztás tétele alapján az osztandó egyenlő az osztó és hányados szorzatával, amelyhez hozzáadjuk a maradékot, ezért a másik feltételből felírható, hogy $11x + 3 = (x + x + 3) \cdot 3 + 4$, azaz $11x + 3 = (2x + 3) \cdot 3 + 4$. A kapott egyenlet rendezés után ekvivalens a $11x + 3 = 6x + 13$, illetve $5x = 10$ egyenlettel, ahonnan $x = 2$ és $y = 5$. A keresett kétjegyű szám tehát a 25, amelyre valóban teljesül mindkét feltétel, hiszen

$$\frac{25}{2+7} = \frac{25}{9} = 2 + \frac{7}{9}.$$

10. Egy medence két csapból tölthető. Csak az első csapból a medence 4 óra 30 perc alatt, csak a második csapból pedig 6 óra 45 perc alatt tölthető fel. Kezdetben csak az első csapot nyitották meg, és pontosan addig töltötték belőle a medencét, amennyi idő alatt a két csapból egyszerre töltve a medence feltöltődött volna. Ezután megnyitották a második csapot is, és addig töltötték tovább két csapból a medencét, amíg az tele nem lett. Mennyi ideig volt nyitva a második csap?

Megoldás. Az ilyen jellegű feladatoknál mindig abban kell gondolkodni, hogy egy időegység alatt a medence hanyad része fog megtelni vízzel. Tudjuk, hogy az első csapból a medence 4 óra 30 perc, azaz 270 perc alatt tölthető fel, tehát a 1 perc alatt a medence térfogatának $\frac{1}{270}$ része telik meg vízzel. Ugyanakkor az második csapból a medence 6 óra 45 perc, azaz 405 perc alatt tölthető fel, tehát a 1 perc alatt a medence térfogatának $\frac{1}{405}$ része telik meg vízzel.

Legyen x azoknak a perceknek a száma, amennyi idő alatt a két csapból egyszerre töltve a medence feltöltődne. Ekkor

$$x \left(\frac{1}{270} + \frac{1}{405} \right) = 1, \quad \text{illetve} \quad x \cdot \frac{3+2}{810} = 1, \quad \text{azaz} \quad x \cdot \frac{1}{162} = 1,$$

ahonnan $x = 162$. Ez azt jelenti, hogy ha a két csapból egyszerre eresztjük a vizet, akkor a medence 162 perc alatt telik meg vízzel.

Jelölje y azoknak a perceknek a számát, amennyi ideig a második csap nyitva volt. Ekkor a feladat feltételeiből felírható a

$$162 \cdot \frac{1}{270} + y \cdot \left(\frac{1}{270} + \frac{1}{405} \right) = 1$$

egyenlet, amelynek ekvivalens alakja a rendezés után

$$y \cdot \frac{1}{162} = 1 - \frac{162}{270}, \quad \text{ahonnan} \quad y = \frac{324}{5} = 64\frac{4}{5}.$$

Eszerint a második csapot pontosan 64.8 percig, azaz 1 óra 4 perc 48 másodpercig kell nyitva tartani ahhoz, hogy a medence megteljen vízzel.

4.2. Lineáris egyenlőtlenségek és egyenlőtlenségrendszerek

4.5. Definíció. *x -ismeretlenű lineáris egyenlőtlenségnek nevezünk minden olyan egyenlőtlenséget, amely ekvivalens átalakításokkal*

$$ax < b, \quad ax \leq b, \quad ax > b, \quad \text{illetve} \quad ax \geq b$$

alakra hozható, ahol a és b adott valós számok, x pedig az ismeretlen.

4.6. Definíció. *Legyenek a és b tetszőleges valós számok. Az $ax < b$ ($ax \leq b$, $ax > b$, illetve $ax \geq b$) lineáris egyenlőtlenség megoldása minden olyan x_0 valós szám (ha létezik ilyen), amelyre az $ax_0 < b$ ($ax_0 \leq b$, $ax_0 > b$, illetve $ax_0 \geq b$) egyenlőtlenség teljesül.*

Megoldani az egyenlőtlenséget annyit jelent, mint megtalálni az összes megoldását, vagy megmutatni, hogy az adott egyenlőtlenségnek nincs megoldása.

4.16. Példa. A $2x - 2 > 0$ egyenlőtlenségnek megoldása minden $x > 1$ valós szám, ezért a megoldáshalmaza $M = (1, +\infty)$, míg az $x < x - 5$ egyenlőtlenségnek nincs megoldása, ezért ebben az esetben a megoldáshalmaz $M = \emptyset$.

Az egyenlőtlenségek megoldása során ekvivalens átalakításokat alkalmazunk, melyeket a következő tételben fogalmazunk meg és amelyek a *kisebb-reláció* (vagy valamelyik másik megfelelő reláció) tulajdonságaira épülek.

4.3. Tétel. *Legyenek B , J , B_1 , J_1 és K tetszőleges algebrai kifejezések. Jelölje B az egyenlőtlenség bal oldalát, J pedig az egyenlőtlenség jobb oldalát. Igazak a következő állítások:*

1° *Az egyenlőtlenség B bal oldala lecserélhető egy vele identikusan megegyező B_1 kifejezéssel, azaz*

$$B = B_1 \implies (B < J \iff B_1 < J).$$

2° *Az egyenlőtlenség J jobb oldala lecserélhető egy vele identikusan megegyező J_1 kifejezéssel, azaz*

$$J = J_1 \implies (B < J \iff B < J_1).$$

3° *Ha a K kifejezés értelmezett minden olyan valós számra, ahol a B és J kifejezések is értelmezettek, akkor az egyenlőtlenség mindkét oldalához hozzáadhatjuk a K kifejezést, azaz*

$$B < J \iff B + K < J + K.$$

4° *Ha a K kifejezés értelmezett minden olyan valós számra, ahol a B és J kifejezések is értelmezettek és $K > 0$, akkor az egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozhatjuk a K kifejezéssel, azaz*

$$B < J \iff B \cdot K < J \cdot K.$$

5° *Ha a K kifejezés értelmezett minden olyan valós számra, ahol a B és J kifejezések is értelmezettek és $K < 0$, akkor az egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozhatjuk a K kifejezéssel, miközben a " $<$ " jel " $>$ " jelre változik, azaz*

$$B < J \iff B \cdot K > J \cdot K.$$

4.7. Definíció. *Két egyenlőtlenség akkor és csak akkor ekvivalens egymással, ha megoldáshalmazaik megegyeznek.*

4.17. Példa. Ha a $\frac{3x-1}{4} - \frac{2x-2}{5} > 2$ egyenlőtlenség megoldáshalmazát kell meghatározni, akkor első lépésben szorozzuk meg az adott egyenlőtlenséget 20-szal. Ekkor a $5(3x-1) - 4(2x-2) > 40$ egyenlőtlenséget kapjuk, amely rendezés után vezetődik vissza a $15x - 5 - 8x + 8 > 40$ ekvivalens egyenlőtlenségre. Ebből $7x > 37$ következik, amelyből megkapjuk, hogy $x > \frac{37}{7}$, azaz a megoldáshalmaz $M = \left(\frac{37}{7}, +\infty\right)$, amely a valós számtengelyen a következő módon ábrázolható:



4.18. Példa. Az $|x+3| - |x+1| < 2$ lineáris egyenlőtlenség megoldásakor az $x+3$ és $x+1$ kifejezések előjeleit figyelembe véve, felírjuk az egyenlőtlenséget abszolút érték nélkül. Mivel

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, \infty)$
$x+3$	–	+	+
$x+1$	–	–	+

így most három esetet kell figyelembe venni.

1° $x < -3$ esetén $x+3 < 0$ és $x+1 < 0$, az ekvivalens egyenlőtlenségek pedig

$$-x-3+x+1 < 2, \quad \text{azaz} \quad 0 \cdot x < 4,$$

amely minden valós x -re igaz állítás, ezért a szemlélt intervallum minden pontja megoldása az egyenlőtlenségnek, így a megoldáshalmaz $M_1 = (-\infty, -3)$.

2° $-3 \leq x < -1$ esetén $x+3 \geq 0$ és $x+1 < 0$, az ekvivalens egyenlőtlenségek pedig

$$x+3+x+1 < 2, \quad \text{azaz} \quad 2x < -2, \quad \text{vagyis} \quad x < -1.$$

A kapott halmaz és a szemlélt intervallum metszetét tekintjük, ezért a megoldáshalmaz most $M_2 = [-3, -1)$.

3° $x \geq -1$ esetén $x+3 \geq 0$ és $x+1 \geq 0$, az ekvivalens egyenlőtlenségek pedig

$$x+3-x-1 < 2, \quad \text{azaz} \quad 0 \cdot x < 0,$$

amely egyenlőtlenség egyetlen valós számra sem teljesül, tehát $M_3 = \emptyset$.

Az eredeti egyenlőtlenség megoldáshalmaza most $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 = (-\infty, -1)$.

4.19. Példa. Oldjuk most meg az $a(x-1) > x-2$ lineáris egyenlőtlenséget az a valós paraméter értékeitől függően. Ha rendezzük az adott egyenlőtlenséget, akkor az

$$ax - a > x - 2, \quad \text{illetve} \quad (a-1)x > a-2$$

egyenlőtlenséget kapjuk, amelyből ki kell fejezni az x ismeretlent, ehhez viszont tudnunk kell, hogy az $a-1$ tényező mikor pozitív és mikor negatív, mert ezekben az esetekben más-más megoldáshalmazt kapunk.

Diszkusszió:

1° Ha $a > 1$, akkor $a-1 > 0$ és $x > \frac{a-2}{a-1}$, a megoldáshalmaz pedig $M = \left(\frac{a-2}{a-1}, +\infty\right)$.

2° Ha $a < 1$, akkor $a-1 < 0$ és $x < \frac{a-2}{a-1}$, a megoldáshalmaz pedig $M = \left(-\infty, \frac{a-2}{a-1}\right)$.

3° Ha $a = 1$, akkor $a-1 = 0$ és a $0 \cdot x > -1$ egyenlőtlenséget kapjuk, amelynek minden x valós szám megoldása, megoldáshalmaza tehát $M = \mathbf{R}$.

4.8. Definíció. Ha több egyváltozós lineáris egyenlőtlenségnek kell egyszerre teljesülnie, akkor egyváltozós lineáris egyenlőtlenségek konjunkciójáról beszélünk, amelyet egyváltozós lineáris egyenlőtlenségrendszernek nevezünk.

Ha az

$$a_1x < b_1, \quad a_2x < b_2, \quad \dots \quad a_nx < b_n$$

egyváltozós lineáris egyenlőtlenségrendszerben szereplő egyenlőtlenségek megoldáshalmazai, ugyanebben a sorrendben, az M_1, M_2, \dots, M_n halmazok, akkor a lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmaza $M = M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n$.

4.20. Példa. Tekintsük az

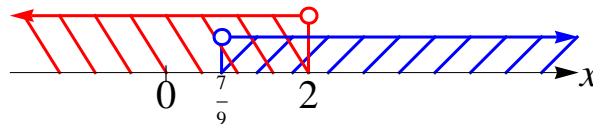
$$\frac{x-1}{2} - \frac{2x+3}{3} + \frac{x+5}{2} < 2 - \frac{x}{6}, \quad 1 - \frac{x+5}{8} + \frac{x+1}{4} < 3x - \frac{4-x}{2}$$

egyváltozós lineáris egyenlőtlenségrendszert, amelynek megoldásához oldjuk meg külön-külön az egyenlőtlenségeket. Ha M_1 és M_2 jelöli, ugyanebben a sorrendben, az első és második egyenlőtlenség megoldáshalmazait, akkor az adott egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmaza $M = M_1 \cap M_2$.

Szorozzuk meg az első egyenlőtlenséget 6-tal, majd rendezzük. Ekkor a $3x < 6$ egyenlőtlenséget kapjuk, ahonnan $x < 2$, a megoldáshalmaz pedig $M_1 = (-\infty, 2)$.

Szorozzuk most meg a második egyenlőtlenséget 8-cal, majd rendezzük, így a $27x > 21$ egyenlőtlenséghez jutunk, ahonnan $x > \frac{7}{9}$, a megoldáshalmaz pedig $M_2 = \left(\frac{7}{9}, \infty\right)$.

Az adott lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmaza tehát $M = M_1 \cap M_2 = \left(\frac{7}{9}, 2\right)$.



Lineáris egyenlőtlenségek megoldására vezetődnek vissza azoknak a magasabbfokú egyenlőtlenségeknek a megoldásai is, amelyek felírhatók szorzat vagy hányados 0-hoz viszonyított alakjában.

4.21. Példa. Tekintsük az $x^2 + x < 6$ másodfokú egyenlőtlenséget, amely felírható $x^2 + x - 6 < 0$ módon, ahol az egyenlőtlenség bal oldalán szereplő másodfokú kifejezés felbontható két lineáris tényező szorzatára, és így az adott egyenlőtlenség felírható az eredetivel ekvivalens $(x-2)(x+3) < 0$ alakban. Mivel egy szorzat akkor negatív, amikor a tényezői különböző előjelűek, így valójában az $x-2$ és $x+3$ lineáris kifejezések előjelét kell megvizsgálnunk. Tegyük ezt a vizsgálatot táblázat segítségével:

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 2)$	$(2, \infty)$
$x - 2$	–	+	+
$x + 3$	–	–	+
$(x - 2)(x + 3)$	+	–	+

A táblázatból kiolvasható, hogy a keresett szorzat a $(-3, 2)$ nyitott intervallumban negatív, vagyis az adott egyenlőtlenség megoldáshalmaza $M = (-3, 2)$.

4.22. Példa. Az előző módszer alkalmazásával oldható meg például az $\frac{x+1}{x+2} > \frac{x}{x+1}$ egyenlőtlenség is. A két törtet a bal oldalon csoportosítva és közös nevezőre hozva az $\frac{x+1}{x+2} - \frac{x}{x+1} > 0$, illetve $\frac{1}{(x+1)(x+2)} > 0$ egyenlőtlenséget kapjuk, amelyben a tört számlálója egy pozitív szám, tehát a bal oldali hányados akkor nagyobb nullánál, ha a nevezője is pozitív. Ezért a továbbiakban az $(x+1)(x+2) > 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmazát keressük, melyet a következő táblázatból olvashatunk ki:

	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, \infty)$
$x+2$	–	+	+
$x+1$	–	–	+
$(x+1)(x+2)$	+	–	+

Az adott egyenlőtlenség megoldáshalmaza tehát $M = (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$.

FELADATOK

1. Mutassuk meg, hogy az

$$(x-2)(x+3) + (x+4)^2 \geq 2x(x+4) + x$$

egyenlőtlenségnek minden x valós szám megoldása.

Megoldás. Rendezzük az adott egyenlőtlenséget. Ekkor

$$x^2 + 3x - 2x - 6 + x^2 + 8x + 16 \geq 2x^2 + 8x + x, \quad \text{vagyis} \quad 0 \cdot x \geq -10$$

következik. A kapott ekvivalens egyenlőtlenséget minden x valós szám teljesíti, az egyenlőtlenség megoldáshalmaza pedig $M = \mathbf{R}$.

2. Oldjuk meg az $|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3$ egyenlőtlenséget.

Megoldás. Első lépésben írjuk fel lineáris tényezők szorzatára az abszolút értékben levő másodfokú polinomot. Némi rendezés után azt kapjuk, hogy

$$x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 - 4 = (x-1)^2 - 4 = (x-1-2)(x-1+2) = (x-3)(x+1).$$

Írjuk most fel az

$$|(x-3)(x+1)| < 3x-3$$

egyenlőtlenséget abszolút érték nélkül. Mivel

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, \infty)$
$x+1$	–	+	+
$x-3$	–	–	+
$(x-3)(x+1)$	+	–	+

ezért három esetet kell figyelembe venni.

1° $x < -1$ esetén $x+1 < 0$ és $x-3 < 0$, az ekvivalens egyenlőtlenségek pedig

$$(-x+3)(-x-1) < 3x-3, \quad x^2 - 5x < 0, \quad \text{azaz} \quad x(x-5) < 0.$$

Az $x(x-5) < 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza a következő táblázatból kiolvasható:

	$(-\infty, 0)$	$(0, 5)$	$(5, \infty)$
x	–	+	+
$x - 5$	–	–	+
$x(x - 5)$	+	–	+

Az adott egyenlőtlenséget $x \in (0, 5)$ teljesítené, de ezek a valós számok nem esnek bele a szemlélt intervallumba, tehát a megoldáshalmaz most $M_1 = \emptyset$.

2° $-1 \leq x < 3$ esetén $x + 1 \geq 0$ és $x - 3 < 0$, az ekvivalens egyenlőtlenségek pedig

$$(-x + 3)(x + 1) < 3x - 3, \quad x^2 + x - 6 > 0, \quad \text{vagyis} \quad (x - 2)(x + 3) > 0.$$

Az $(x - 2)(x + 3) < 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza a következő táblázatból kiolvasható:

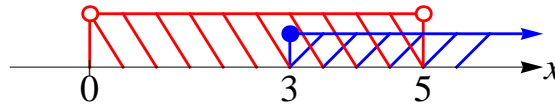
	$(-\infty, -3)$	$(-3, 2)$	$(2, \infty)$
$x + 3$	–	+	+
$x - 2$	–	–	+
$(x - 2)(x + 3)$	+	–	+

Az adott egyenlőtlenséget $x \in (-\infty, -3) \cup (2, \infty)$ teljesítené, de a megoldáshalmaz csak az $M_2 = (2, 3)$ intervallum, mert $((-\infty, -3) \cup (2, \infty)) \cap [-1, 3) = (2, 3)$.

3° $x \geq 3$ esetén $x + 1 \geq 0$ és $x - 3 \geq 0$, az ekvivalens egyenlőtlenségek pedig

$$(x - 3)(x + 1) < 3x - 3, \quad x^2 - 5x < 0, \quad \text{azaz} \quad x(x - 5) < 0,$$

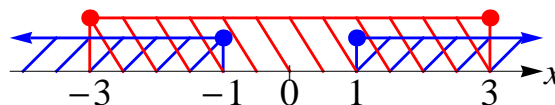
amely egyenlőtlenség minden $x \in (0, 5)$ valós számra teljesül, ezért figyelembe véve a szemlélt intervalumot azt kapjuk, hogy a megoldáshalmaz most $M_3 = [3, 5)$.



Az eredeti egyenlőtlenség megoldáshalmaza tehát $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 = (2, 5)$.

3. Mi az $||x| - 2| \leq 1$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza?

Megoldás. Az első lépésben szabaduljunk meg a külső abszolút értéktől. Mivel tetszőleges a valós számra az $|a| \leq 1$ egyenlőtlenség a $-1 \leq a \leq 1$ egyenlőtlenségrendszerrel ekvivalens, ezért az adott egyenlőtlenség a $-1 \leq |x| - 2 \leq 1$ egyenlőtlenségrendszerrel lesz ekvivalens, amelynek egyszerűbb alakja $1 \leq |x| \leq 3$. A kapott egyenlőtlenségrendszer az $|x| \geq 1$ és $|x| \leq 3$ egyenlőtlenségek konjunkciója, vagyis az eredeti egyenlőtlenség megoldáshalmaza a kapott egyenlőtlenségek megoldáshalmazainak metszete. Az $|x| \geq 1$ megoldáshalmaza $M_1 = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, az $|x| \leq 3$ megoldáshalmaza pedig $M_2 = [-3, 3]$. Ekkor az eredeti egyenlőtlenség megoldáshalmaza $M = M_1 \cap M_2 = [-3, -1] \cup [1, 3]$.



4. Oldjuk meg az $\left| \frac{4x}{4x^2 + 1} \right| < 1$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

Megoldás. Az adott egyenlőtlenség ekvivalens a

$$-1 < \frac{4x}{4x^2 + 1} < 1$$

egyenlőtlenségrendszerrel, amely felírható a

$$\frac{4x}{4x^2 + 1} > -1 \quad \text{és} \quad \frac{4x}{4x^2 + 1} < 1$$

egyenlőtlenségek konjunkciójaként. Az eredeti egyenlőtlenség megoldáshalmaza a kapott egyenlőtlenségek megoldáshalmazainak metszete lesz. Végezzük el a kapott egyenlőtlenségek ekvivalens átalakításait. Az első egyenlőtlenség esetében

$$\frac{4x}{4x^2 + 1} > -1 \iff \frac{4x}{4x^2 + 1} + 1 > 0 \iff \frac{4x^2 + 4x + 1}{4x^2 + 1} > 0 \iff \frac{(2x + 1)^2}{4x^2 + 1} > 0,$$

amely egyenlőtlenség minden $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$ esetén igaz, tehát $M_1 = \mathbf{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$.

A második egyenlőtlenség esetében

$$\frac{4x}{4x^2 + 1} < 1 \iff \frac{4x}{4x^2 + 1} - 1 < 0 \iff \frac{-4x^2 + 4x - 1}{4x^2 + 1} < 0 \iff \frac{-(2x - 1)^2}{4x^2 + 1} < 0,$$

amely egyenlőtlenség minden $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ esetén igaz, tehát $M_2 = \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

Ekkor az eredeti egyenlőtlenség megoldáshalmaza $M = M_1 \cap M_2 = \mathbf{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$.

5. Van-e megoldása az $\left| \frac{-6x}{x^2 + 9} \right| > 1$ egyenlőtlenségnek?

Megoldás. Az adott egyenlőtlenség ekvivalens a

$$\frac{-6x}{x^2 + 9} < -1 \quad \text{és} \quad \frac{-6x}{x^2 + 9} > 1$$

egyenlőtlenségek konjunkciójával. Az eredeti egyenlőtlenség megoldáshalmaza a kapott egyenlőtlenségek megoldáshalmazainak metszete lesz. Végezzük el a kapott egyenlőtlenségek ekvivalens átalakításait. Mivel $x^2 + 9 > 0$, mindkét egyenlőtlenség beszorozható ezzel a kifejezéssel. Ekkor az első egyenlőtlenség esetében

$$\frac{-6x}{x^2 + 9} < -1 \iff -6x < -x^2 - 9 \iff x^2 - 6x + 9 < 0 \iff (x - 3)^2 < 0,$$

ami azt jelenti, hogy az egyenlőtlenség egyetlen x valós értékre sem teljesül, tehát megoldáshalmaza $M_1 = \emptyset$. A második egyenlőtlenség esetében

$$\frac{-6x}{x^2 + 9} > 1 \iff -6x > x^2 + 9 \iff x^2 + 6x + 9 < 0 \iff (x + 3)^2 < 0,$$

ami azt jelenti, hogy az egyenlőtlenség ebben az esetben sem teljesül egyetlen x valós értékre sem, tehát megoldáshalmaza $M_2 = \emptyset$.

Ekkor az eredeti egyenlőtlenség megoldáshalmaza $M = M_1 \cap M_2 = \emptyset$, tehát az eredeti egyenlőtlenségnek nincs megoldása.

6. Mi a megoldása az $x^2 + x > 5x - 15$ egyenlőtlenségnek?

Megoldás. Végezzünk ekvivalens átalakításokat. Ekkor

$$x^2 - 4x + 15 > 0, \quad x^2 - 4x + 4 + 11 > 0, \quad \text{vagyis} \quad (x - 2)^2 + 11 > 0.$$

A kapott egyenlőtlenség minden $x \in \mathbf{R}$ esetén igaz, tehát a megoldáshalmaz $M = \mathbf{R}$.

7. Oldjuk meg az $x^3 - 5x^2 + 10x - 12 < 0$ harmadfokú egyenlőtlenséget.

Megoldás. Bontsuk tényezőkre a bal oldali kifejezést. Keressük a harmadfokú polinom nulláit a 12 osztóinak halmazában, amely a $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$ halmaz. Próbálkozással a Horner-elrendezés segítségével megkapjuk, hogy a 3 nullája az adott polinomnak, tehát

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} 3 & 1 & -5 & 10 & -12 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & 0 \end{array}, \quad \text{azaz} \quad x^3 - 5x^2 + 10x - 12 = (x - 3)(x^2 - 2x + 4),$$

Vegyük észre, hogy az $x^2 - 2x + 4 = (x - 1)^2 + 3$ kifejezés minden x valós értékre pozitív. Ekkor az eredetivel ekvivalens egyenlőtlenség alakja $(x - 3)((x - 1)^2 + 3) < 0$, amely akkor igaz, ha $x - 3 < 0$, azaz $x < 3$. Ezért az adott egyenlőtlenség megoldáshalmaza $M = (-\infty, 3)$.

8. Határozzuk meg az $\frac{1}{2-x} + \frac{5}{2+x} < 1$ egyenlőtlenség megoldáshalmazát.

Megoldás. Vigyünk minden tagot a bal oldalra és hozzuk közös nevezőre a törtet. Ekkor a következő ekvivalens átlakításokat kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2-x} + \frac{5}{2+x} < 1 &\iff \frac{1}{2-x} + \frac{5}{2+x} - 1 < 0 \iff \\ \iff \frac{2+x+10-5x-4+x^2}{(2-x)(2+x)} < 0 &\iff \frac{x^2-4x+8}{(2-x)(2+x)} < 0 \iff \\ \iff \frac{x^2-4x+4+4}{(2-x)(2+x)} < 0 &\iff \frac{(x-2)^2+4}{(2-x)(2+x)} < 0. \end{aligned}$$

Mivel az utolsó egyenlőtlenség számlálója minden x valós szám esetén pozitív, ezért a hányados csak akkor negatív, ha a nevező negatív, vagyis $(2-x)(2+x) < 0$ esetén. A bal oldali szorzat előjele z alábbi táblázatból leolvasható:

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
$2+x$	–	+	+
$2-x$	+	+	–
$(2-x)(2+x)$	–	+	–

A $(2-x)(2+x) < 0$ egyenlőtlenség és ezzel együtt az eredeti egyenlőtlenség megoldáshalmaza tehát

$$M = (-\infty, -2) \cup (2, \infty).$$

9. Vizsgáljuk ki a $2mx + 5 < 4x + 3m$ egyenlőtlenség megoldásait az m valós paraméter értékeitől függően.

Megoldás. Rendezzük az egyenlőtlenséget és fejezzük ki az x ismeretlent. Ekkor ekvivalens átalakításokkal a következő egyenlőtlenségeket kapjuk:

$$2mx + 5 < 4x + 3m \iff 2mx - 4x < 3m - 5 \iff (2m - 4)x < 3m - 5.$$

Diszkusszió:

1° Ha $m > 2$, akkor $2m - 4 > 0$ és $x < \frac{3m - 5}{2m - 4}$, a megoldáshalmaz pedig

$$M = \left(-\infty, \frac{3m - 5}{2m - 4} \right).$$

2° Ha $m < 2$, akkor $2m - 4 < 0$ és $x > \frac{3m - 5}{2m - 4}$, a megoldáshalmaz pedig

$$M = \left(\frac{3m - 5}{2m - 4}, +\infty \right).$$

3° Ha $m = 2$, akkor $2m - 4 = 0$ és a $0 \cdot x < 1$ egyenlőtlenséget kapjuk, amelynek minden x valós szám megoldása, tehát megoldáshalmaza $M = \mathbf{R}$.

10. Oldjuk meg az $mnx - mx < mn + n$ egyenlőtlenséget az m és n pozitív valós paraméterek értékeitől függően.

Megoldás. A feladat feltételeiből tudjuk, hogy $m > 0$ és $n > 0$. Rendezzük az egyenlőtlenséget és fejezzük ki az x ismeretlent. Ekkor ekvivalens átalakításokkal a következő egyenlőtlenségeket kapjuk:

$$mnx - mx < mn + n \iff m(n - 1)x < n(m + 1) \iff (n - 1)x < \frac{n(m + 1)}{m}.$$

Diszkusszió:

1° Ha $n > 1$, akkor $n - 1 > 0$ és $x < \frac{n(m + 1)}{m(n - 1)}$, a megoldáshalmaz pedig

$$M = \left(-\infty, \frac{n(m + 1)}{m(n - 1)} \right).$$

2° Ha $n < 1$, akkor $n - 1 < 0$ és $x > \frac{n(m + 1)}{m(n - 1)}$, a megoldáshalmaz pedig

$$M = \left(\frac{n(m + 1)}{m(n - 1)}, +\infty \right).$$

3° Ha $n = 1$, akkor $n - 1 = 0$ és a $0 \cdot x < 1 + \frac{1}{m}$ egyenlőtlenséget kapjuk, amelynek minden x valós szám megoldása, tehát megoldáshalmaza $M = \mathbf{R}$.

4.3. Lineáris egyenletrendszerek

4.9. Definíció. Az elsőfokú (lineáris) kétismeretlenes egyenlet általános alakja:

$$ax + by = d,$$

ahol a , b és d ismert, x és y pedig ismeretlen mennyiségek.

Az egyenlet $b \neq 0$ esetén y -ra megoldva:

$$y = \frac{d - ax}{b}.$$

Ebben x helyére különböző értékeket helyettesítve, y -ra más és más értékeket kapunk. Az így kapott $\left(x, \frac{d - ax}{b}\right)$ értékpárok mind kielégítik az egyenletet, tehát végtelen sok megoldás van, vagyis az egyenlet határozatlan. $a \neq 0$ esetén az egyenletet x -re megoldva adódik:

$$x = \frac{d - by}{a},$$

és hasonló indoklással, mint az előző esetben kapjuk azt, hogy a $\left(\frac{d - by}{a}; y\right)$ értékpárok mind kielégítik az egyenletet, tehát az határozatlan. Nézzük most az $a = b = 0$ esetet. Ekkor a $d = 0$ értékre a

$$0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$$

egyenletet kapjuk, amelynek megoldása a valós számsík bármelyik $(x; y)$ pontja, tehát az egyenlet *határozatlan*; $d \neq 0$ esetén a

$$0 \cdot x + 0 \cdot y = d$$

egyenlet adódik, amelynek nincs megoldása, tehát ekkor az egyenlet *ellentmondásos*.

4.10. Definíció. Az elsőfokú (lineáris) kétismeretlenes egyenletrendszer általános alakja:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2, \end{aligned}$$

ahol a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} , b_1 és b_2 tetszőlegesen adott valós számok az együtthatók, x és y pedig az ismeretlenek.

Az egyenletrendszer megoldásának nevezzük mindazokat az $(x; y)$ valós számpárokat, amelyek egyidejűleg kielégítik mindkét egyenletet.

Megoldani a kétismeretlenes lineáris egyenletrendszert annyit jelent, mint megtalálni mindazokat a rendezett párokat, amelyek megoldásai az egyenletrendszernek, vagy megmutatni, hogy nem létezik megoldása. A fenti egyenletrendszer csak akkor oldható meg egyértelműen, vagyis akkor *határozott*, ha a két egyenlet egymástól független és nincs ellentmondásban egymással. Ha az általános alakban felírt egyenletrendszer egyik egyenletét valamilyen számmal végigszorozva, a másik egyenletet kapjuk, akkor a két egyenlet nem független, míg ha valamilyen számmal végigszorozva, a másik egyenlet bal oldalát megkapjuk ugyan, egyidejűleg azonban a jobb oldalak nem egyeznek meg, akkor a két egyenlet ellentmondásos. Az első esetben a két egyenlet lényegében nem különböző, a másik esetben pedig az egyenletrendszer nem oldható meg.

4.11. Definíció. Két kétismeretlenes egyenletrendszer egymással ekvivalens, ha megoldáshalmazaik megegyeznek, azaz ha mindkét egyenletrendszert ugyanazok a számpárok elégítik ki vagy ha mindkét egyenletrendszer ellentmondásos.

Az elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszer megoldására három eljárást ismerünk:

1° a helyettesítő módszert

2° az ellentett együtthatók módszerét és

3° a determinánsok módszerét.

1° A helyettesítő módszernél valamelyik egyenletből kifejezzük az egyik ismeretlent, s azt a másik egyenletbe ugyanannak az ismeretlennek a helyére behelyettesítjük, majd az így kapott egyismeretlenes egyenletet megoldjuk. Az egyik ismeretlen így meghatározott értékét bármely egyenletbe helyettesítjük, és kiszámítjuk a másik ismeretlen értékét is.

4.23. Példa. Oldjuk meg helyettesítő módszerrel a következő egyenletrendszert:

$$3x - 4y = -6$$

$$3x + 2y = 12.$$

Az első egyenletből $3x = 4y - 6$ és ezt a második egyenletben $3x$ helyére helyettesítve kapjuk, hogy

$$4y - 6 + 2y = 12, \quad \text{azaz} \quad 6y = 18, \quad \text{ahonnan} \quad y = 3.$$

Visszahelyettesítve ezt az első egyenletbe megkapjuk, hogy

$$3x = 4 \cdot 3 - 6, \quad \text{vagyis} \quad 3x = 6, \quad \text{ahonnan} \quad x = 2.$$

Az egyenletrendszer egyetlen megoldása a $(2; 3)$ rendezett számpár, ezért ez egy határozott rendszer, amelynek megoldáshalmaza $M = \{(2; 3)\}$.

2° Az ellentett együtthatók módszerével a kétismeretlenes egyenletrendszert úgy oldjuk meg, hogy az egyenleteket egy-egy alkalmasan választott számmal megszorozzuk azért, hogy a kiküszöbölendő ismeretlen együtthatója a két egyenletben ellentett szám legyen. Ezután a két egyenlet megfelelő oldalait összeadjuk, így egyismeretlenes egyenletet kapunk, amelynek megoldását az egyik egyenletbe visszahelyettesítve, a másik ismeretlen értékét is meghatározhatjuk, vagy a másik ismeretlennel is elvégezzük az eljárást.

4.24. Példa. Határozzuk meg ellentett együtthatók módszerével az egyenletrendszert:

$$3x - 2y = 6$$

$$6x - 4y = -12.$$

Szorozzuk be az első egyenlet mindkét oldalát -2 -vel. Ekkor az egyenletrendszer ekvivalens alakja a következő egyenletrendszer:

$$-6x + 4y = -12$$

$$6x - 4y = -12.$$

Összeadva a két egyenlet megfelelő oldalait kapjuk, hogy $0 \cdot x + 0 \cdot y = -24$, amely egyenletnek nincs megoldása, vagyis az egyenletrendszer ellentmondásos, megoldáshalmaza pedig

$$M = \emptyset.$$

3° A determinánsok módszere.

A *másodrendű determináns* négy elemből áll, az a_{11} , a_{12} , a_{21} és a_{22} elemekből, determinánsnak pedig az

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

táblázatos elrendezést nevezzük, amelynek van egy az elemek és az elrendezés alapján meghatározott értéke. A determináns D értékét megkapjuk, ha a főátlón levő elemek szorzatából kivonjuk a mellékátlón levő elemek szorzatát, azaz

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Az

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

egyenletrendszer esetén legyen

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{és} \quad D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

A D determinánst most az egyenletrendszer determinánsának nevezzük. Ha $D \neq 0$, akkor az egyenletrendszer határozott és megoldása az $(x; y)$ rendezett pár, ahol

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}.$$

Az egyenletrendszerek megoldásának ezt a módszerét Cramer-szabálynak is nevezik.

4.25. Példa. Oldjuk meg determinánsok módszerével az egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ -3x + 4y &= 17. \end{aligned}$$

Mivel az egyenletrendszer determinánsa

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - (-6) = 10 \neq 0,$$

ezért a rendszer határozott és így a determinánsok módszere alkalmazható. Továbbá

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 17 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 34 = -30 \quad \text{és} \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 17 \end{vmatrix} = 17 + 3 = 20,$$

ezért

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-30}{10} = -3, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{20}{10} = 2.$$

Az adott egyenletrendszer megoldása tehát a $(-3; 2)$ rendezett pár, így az egyenletrendszer határozott, megoldáshalmaza pedig $M = \{(-3; 2)\}$.

A következőkben olyan egyenletrendszerekkel foglalkozunk, amelyekben kettőtől több lehet az ismeretlenek száma és az egyenletek száma is. Defináljunk egy ilyen általánosabb egyenletrendszert.

4.12. Definíció. Az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (4.1)$$

lineáris (elsőfokú) egyenletek konjunkcióját, ahol $x_j \in \mathbf{R}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) az ismeretleneket, $a_{ij} \in \mathbf{R}$ az ismeretlenek együtthatóit jelenti ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$), a b_i -k pedig valós számok ($i = 1, 2, \dots, m$), lineáris (más szóval elsőfokú) egyenletrendszernek nevezzük. Ha a b_i számok mindegyike nulla, akkor a lineáris egyenletrendszer homogén, ellenkező esetben inhomogén.

Az egyenletrendszer megoldása minden olyan $(\xi_1; \xi_2; \dots; \xi_n)$ rendezett szám n -es, amelynek értékeit a megfelelő ismeretlenek helyébe helyettesítve, vagyis $x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2, \dots, x_n = \xi_n$ esetén, az egyenletrendszer minden egyenletére teljesül az egyenlőség.

Ha az egyenletrendszernek van megoldása, akkor azt mondjuk rá, hogy megoldható, ha nincs megoldása, akkor ellentmondásos egyenletrendszerről van szó.

4.13. Definíció. Két n -ismeretlenes egyenletrendszer egymással ekvivalens, ha megoldáshalmazaik megegyeznek, azaz ha mindkét egyenletrendszert ugyanazok a rendezett szám n -esek elégítik ki, vagy ha mindkét egyenletrendszer ellentmondásos.

Megoldani egy m egyenletből álló n -ismeretlenes egyenletrendszert annyit jelent, mint meghatározni az összes $(\xi_1; \xi_2; \dots; \xi_n)$ alakú megoldását. Ehhez olyan eljárásokat kell alkalmazni, amelyek során az adott egyenletrendszert vele ekvivalens, de egyszerűbb egyenletekből álló rendszerrel helyettesítjük. Az eljárást addig kell folytatni, amíg olyan egyszerű egyenletekhez nem jutunk, amelyekből az ismeretlenek értéke közvetlenül leolvasható. Defináljuk most azokat az elemi átalakításokat (vagy transzformációkat), amelyeket az egyenletrendszerek megoldási eljárásaiban majd alkalmazunk.

4.14. Definíció. A lineáris egyenletrendszerek elemi átalakításai (vagy transzformációi) a következők:

- 1° az egyenletek sorrendjének felcserélése,
- 2° valamely egyenlet nullától különböző számmal való szorzása,
- 3° valamely egyenlet szorzása egy nullától különböző számmal és az így kapott egyenlet egy másik egyenlethez való hozzáadása.

4.4. Tétel. Ha egy lineáris egyenletrendszeren elemi átalakításokat végzünk, akkor az eredetivel ekvivalens egyenletrendszert kapunk.

A több egyenletből álló többismeretlenes egyenletrendszer megoldására leginkább a Gauss-féle eliminációs (kiküszöbölési) módszert alkalmazzuk, amely a fentiekben értelmezett elemi átalakítások megfelelő sorrendű alkalmazását jelenti. Az eliminálás kifejezés azt jelenti, hogy bizonyos egyenletekből bizonyos ismeretleneket kiküszöbölünk. A módszer lényege abból áll, hogy elemi átalakítások egymás utáni elvégzésével az eredeti "téglalap"

alakú egyenletrendszert olyan vele ekvivalens "háromszög" alakú rendszerre hozzuk, amelynek első egyenlete n -ismeretlenes, második egyenlete $n - 1$ -ismeretlenes, harmadik egyenlete $n - 2$ -ismeretlenes, és így tovább. Az utolsó egyenletből valamelyik ismeretlen értéke kiolvasható lesz, és ezt az értéket az utolsó előtti egyenletbe helyettesítve még egy ismeretlen értéket kiszámíthatunk. Az eljárást addig folytatjuk, amíg a rendelkezésünkre álló egyenletekből az összes ismeretlent ki nem számoltuk.

Tegyük fel, hogy az egyenletrendszer együtthatói között van nullától különböző, és legyen ez éppen a_{11} (ami az egyenletek felcserélésével és az ismeretlenek átszámozásával mindig elérhető). Az első egyenletet osszuk végig a_{11} -gyel, majd adjuk hozzá az első egyenlet $-a_{21}$ -szeresét a második egyenlethez, majd az első egyenlet $-a_{31}$ -szeresét a harmadik egyenlethez és így tovább, végül az első egyenlet $-a_{m1}$ -szeresét az m -edik egyenlethez. Az eredeti egyenletrendszer minden megoldása az így kapott egyenletrendszernek is megoldása és fordítva. Az új egyenletrendszer első egyenlete megegyezik az eredeti rendszer első egyenletével, a többi egyenletből viszont *kiküszöböltük* x_1 -et.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \dots + a'_{3n}x_n &= b'_3 \\ &\dots \\ a'_{m2}x_2 + a'_{m3}x_3 + \dots + a'_{mn}x_n &= b'_m \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy az így kapott egyenletrendszerben az új $a'_{22} \neq 0$. (Ha $a'_{22} = 0$, de mondjuk $a'_{52} \neq 0$, akkor a második és ötödik egyenletet felcseréljük, és így haladunk tovább. Ha ez sem megy, azaz minden $i \geq 2$ esetén $a_{i2} = 0$, akkor a harmadik, vagy az azt követő ismeretlenre térünk át.) Ekkor az előző eljárást megismételhetjük: a második egyenletet osszuk végig a'_{22} -vel, majd adjuk hozzá a második egyenlet $-a'_{32}$ -szeresét a harmadik egyenlethez és így tovább, végül a második egyenlet $-a'_{m2}$ -szeresét az m -edik egyenlethez. A most kapott egyenletrendszer első egyenlete megegyezik az eredeti rendszer első egyenletével, a második egyenlet megegyezik a második lépésben kapott rendszer második egyenletével, a többi egyenletből viszont *kiküszöböltük* x_2 -t.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ a''_{33}x_3 + \dots + a''_{3n}x_n &= b''_3 \\ &\dots \\ a''_{m3}x_3 + \dots + a''_{mn}x_n &= b''_m \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a fenti lépések nyomkövetéséhez elég csak az együtthatók és a jobb oldali konstansok változását figyelni, az $x_1, x_2, \dots, x_n, +$ és "jeleket" fölösleges mindig újra leírni. Ezért az egyenletrendszert egyszerűbben leírhatjuk táblázatos írásmód segítségével.

Most három lineáris egyenletrendszeren mutatjuk be a Gauss-féle eliminációs módszert.

4.26. Példa. Az

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 8 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 &= 12. \end{aligned}$$

egyenletrendszer esetén $a_{11} = 1 \neq 0$, ezért az egyenletek átrendezésére nincs szükség. Vonjuk ki az első egyenlet kétszeresét a második egyenletből, majd az első egyenletet a harmadikból és a negyedikből. Ekkor a következő ekvivalens egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 8 \\-x_2 + x_3 - 3x_4 &= -13 \\x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= -8 \\-2x_2 + 2x_4 &= 4.\end{aligned}$$

Most a második egyenletet adjuk a harmadikhoz, majd a második kétszeresét vonjuk ki a negyedikből. Ekkor adódik:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 8 \\-x_2 + x_3 - 3x_4 &= -13 \\3x_3 - 6x_4 &= -21 \\-2x_3 + 8x_4 &= 30.\end{aligned}$$

A harmadik egyenletet egyszerűsítsük 3-mal, a negyediket pedig 2-vel, ekkor:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 8 \\-x_2 + x_3 - 3x_4 &= -13 \\x_3 - 2x_4 &= -7 \\-x_3 + 4x_4 &= 15.\end{aligned}$$

A harmadik egyenletet hozzáadva a negyedikhez adódik:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 8 \\-x_2 + x_3 - 3x_4 &= -13 \\x_3 - 2x_4 &= -7 \\2x_4 &= 8.\end{aligned}$$

Az utolsó egyenletből kiszámolható egyetlen megoldása, $x_4 = 4$ s most visszafelé haladva, rendre visszahelyettesítünk az egyenletekbe:

$$\begin{aligned}x_4 &= 4, \\x_3 &= -7 + 2x_4 = -7 + 8 = 1, \\x_2 &= 13 + x_3 - 3x_4 = 13 + 1 - 12 = 2, \\x_1 &= 8 - x_2 + x_3 - x_4 = 8 - 2 + 1 - 4 = 3.\end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása tehát $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$ és $x_4 = 4$, vagyis az egyetlen megoldása a $(3; 2; 1; 4)$ rendezett négyes, ami azt jelenti, hogy a rendszer határozott, megoldáshalmaza pedig

$$M = \{(3; 2; 1; 4)\}.$$

Az ismeretlenek sokszori leírásának nehézségétől szabadulhatunk meg a táblázatos írásmóddal. Ezt a módszert úgy mutatjuk be, hogy az előző példa megoldását táblázatos írásmóddal

most megismételjük.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & | & 8 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & | & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & | & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 3 & | & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & | & 8 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & | & -13 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & | & -8 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & | & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & | & 8 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & | & -13 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & | & -21 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & | & 30 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & | & 8 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & | & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & | & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & | & 8 \end{pmatrix}$$

Az utolsó sorból következik a $2x_4 = 8$ egyenlet és az eljárás hasonló módon folytatódik, mint ahogyan az előbb bemutattuk.

4.27. Példa. Második példaként oldjuk meg az

$$\begin{aligned} x_1 - 8x_2 + 9x_3 &= -32 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 12 \end{aligned}$$

egyenletrendszert, most már rögtön táblázatos írásmóddal. Mivel $a_{11} \neq 0$, a Gauss-féle algoritmus azonnal elkezdhető:

$$\begin{pmatrix} 1 & -8 & 9 & | & -32 \\ 2 & -1 & 3 & | & -1 \\ 1 & 2 & -1 & | & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -8 & 9 & | & -32 \\ 0 & 15 & -15 & | & 63 \\ 0 & 10 & -10 & | & 44 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -8 & 9 & | & -32 \\ 0 & 15 & -15 & | & 63 \\ 0 & 0 & 0 & | & 2 \end{pmatrix}.$$

A redukált egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} x_1 - 8x_2 + 9x_3 &= -32 \\ 15x_2 - 15x_3 &= 63 \\ 0 &= 2. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlet ellentmondást tartalmaz, ezért az egyenletrendszer nem oldható meg, megoldáshalmaza tehát $M = \emptyset$.

4.28. Példa. Harmadik példaként oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x_2 - x_3 - x_4 &= -1 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= -1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 &= -7 \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 &= -8. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása táblázatos írásmóddal:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & | & -1 \\ 1 & -4 & 2 & 0 & | & -1 \\ 2 & -3 & -1 & -5 & | & -7 \\ 3 & -7 & 1 & -5 & | & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & | & -5 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & | & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix},$$

ezért az eredeti egyenletrendszer egyszerűsített ekvivalens alakja:

$$\begin{aligned}x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= -1 \\x_2 - x_3 - x_4 &= -1.\end{aligned}$$

A négy ismeretlen kiszámításához csak két egyenletünk van, ami azt jelenti, hogy két ismeretlent szabadon választunk. Ha ezek például $x_3 = \alpha$ és $x_4 = \beta$, akkor a második egyenletből

$$x_2 = \alpha + \beta - 1,$$

és ezt az első egyenletbe helyettesítve adódik

$$x_1 = 4(\alpha + \beta - 1) - 2\alpha - 1 = 2\alpha + 4\beta - 5.$$

Az egyenletrendszer megoldáshalmaza tehát

$$M = \{(2\alpha + 4\beta - 5, \alpha + \beta - 1, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbf{R}\},$$

vagyis végtelen sok számnégyes elégíti ki az eredeti egyenletrendszert. Egy ilyen számnégyes például $\alpha = 2$ és $\beta = 1$ választása esetén $(3; 2; 2; 1)$ vagy $\alpha = 1$ és $\beta = 0$ választása esetén $(-3; 0; 1; 0)$. Példánkban x_3 és x_4 helyett másik két ismeretlen tetszőlegesen megválasztása mellett is dönthettünk volna.

A fenti példákban világosan látszik az általános eljárás. A "felülről lefelé" történő lépegetésnél végül egy olyan táblázathoz jutunk, amelyben az első sort kivéve minden sor nullákkal kezdődik, az első valahány sorban az első nemnulla elem mindig 1-es, (az úgynevezett *vezéregyes*), ezek csupa külön oszlopban, lépcsőzetesen jobbra helyezkednek el, a vezéregyesek alatt pedig minden elem 0. Lehetnek ezen kívül olyan sorok is, amelyekben minden elem csupa nulla. Ezt *lépcsős alaknak* hívjuk.

Az egyenletrendszer akkor és csak akkor *megoldható*, ha a redukált lépcsős alakban nem fordul elő olyan sor, amelyben az együtthatóknak megfelelő rész csupa nulla, a jobb oldali rész pedig nem nulla, a továbbiakban ezt *ellentmondásos sornak* hívjuk. Az ellentmondásos sor léte már a lépcsős alaknál is kiderül, amelyet ekkor persze felesleges tovább redukálni.

A megoldás akkor és csak akkor *egyértelmű*, ha nincs ellentmondásos sor és minden oszlopban áll vezéregyes, azaz a vezéregyesek száma megegyezik az ismeretlenek számával. Fontos megemlíteni, hogy ennek semmi köze sincs az olyan csupa nulla sorok léteéhez vagy nemléteéhez, amelyeknek a jobb oldali része is nulla. Nevezzük az ilyen sorokat *fölösleges soroknak*. Egy fölösleges sor csak azt jelenti, hogy az annak megfelelő egyenlet következik a többiből, tehát nem tartalmaz új információt, új megkötést, és így ezek az információk elhagyhatók.

Ha az egyenletrendszer megoldása egyértelmű, azaz az egyenletrendszer *határozott*, akkor a redukált lépcsős alak azonnal megadja a megoldást. Ha a megoldás nem egyértelmű, azaz az egyenletrendszer *határozatlan*, akkor a vezéregyest nem tartalmazó oszlopoknak megfelelő ismeretlenek tetszőlegesen választhatók, azaz ezek *szabad paraméterek*, a többi ismeretlen pedig ezekkel egyértelműen kifejezhető. A megoldások száma így végtelen sok lesz, hiszen a szabad paraméterek tetszőlegesen választhatják értékeiket a valós számok halmazából. A szabad paraméterek száma megadja a határozatlan lineáris egyenletrendszer *szabadságfokát*.

FELADATOK

1. Ekvivalensek-e a következő egyenletrendszerek:

$$\begin{array}{lcl} 2x + y = 24 & & x + 2y = 24 \\ 3x - 2y = 8 & \text{és} & 2x + 3y = 40. \end{array}$$

Megoldás. Határozzuk meg az adott egyenletrendszerek megoldáshalmazait, majd hasonlítsuk össze a kapott halmazokat.

Oldjuk meg az első egyenletrendszert a helyettesítő módszerrel. A $2x + y = 24$ egyenletből fejezzük ki a második ismeretlent, ez $y = 24 - 2x$, majd helyettesítsük be a kapott kifejezést a második egyenletbe. Ekkor a $3x - 2(24 - 2x) = 8$ egyismeretlenes egyenletet kapjuk, amely rendezés után a $7x = 56$ ekvivalens alakot veszi fel, ahonnan $x = 8$. Visszahelyettesítve a kapott értéket az első egyenletbe adódik $y = 24 - 2 \cdot 8 = 8$, vagyis a rendszer határozott, egyetlen megoldása a $(8, 8)$ rendezett pár, megoldáshalmaza pedig $M_1 = \{(8, 8)\}$.

Oldjuk meg a második egyenletrendszert az ellentett együtthatók módszerével. Szorozzuk be az első egyenletet (-2) -vel, majd adjuk össze a két egyenletet. Beszorzás után az eredetivel ekvivalens

$$\begin{array}{l} -2x - 4y = -48 \\ 2x + 3y = 40. \end{array}$$

egyenletrendszert kapjuk, összeadva a két egyenletet pedig a $-y = -8$ egyismeretlenes egyenletet, ahonnan az $y = 8$ érték adódik. A kapott értéket helyettesítsük be például a második egyenletbe. Ekkor a $2x + 3 \cdot 8 = 40$ egyismeretlenes egyenletet kapjuk, ahonnan $2x = 16$, illetve $x = 8$, miszerint az egyenletrendszer egyetlen megoldása a $(8; 8)$ rendezett pár, megoldáshalmaza pedig $M_2 = \{(8; 8)\}$.

Mivel $M_1 = M_2$, így a két egyenletrendszer egymással ekvivalens.

2. Vizsgáljuk ki a következő egyenletrendszer megoldhatóságát:

$$\begin{array}{lcl} 3(x + y - 1) & = & x - 2y + 1 \\ 4(x + 3y - 2) & = & 4 - 2x - 3y. \end{array}$$

Megoldás. Rendezzük először az egyenletrendszert a szokásos alakra, amely ebben az esetben

$$\begin{array}{l} 2x + 5y = 4 \\ 6x + 15y = 12. \end{array}$$

A rendszer determinánsa most

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 15 \end{vmatrix} = 2 \cdot 15 - 5 \cdot 6 = 30 - 30 = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy a rendszer nem határozott, tehát a determinánssal nem oldható meg. Nézzük meg, hogy mi történik, ha elimináljuk valamelyik ismeretlent. Szorozzuk be az első egyenletet -3 -mal. Ekkor a

$$\begin{array}{l} -6x - 15y = -12 \\ 6x + 15y = 12 \end{array}$$

egyenletrendszert kapjuk, s az első egyenletet hozzáadva a másodikhoz adódik a $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$ egyenlet, amelynek végtelen sok megoldása van. A megoldáshalmaz felírásához válasszuk például a $2x + 5y = 4$ egyenletben tetszőleges paraméternek az x ismeretlent. Legyen most $x = p$, ahol p tetszőlegesen választható valós szám. Ekkor $2p + 5y = 4$, ahonnan $y = \frac{4-2p}{5}$, a megoldások pedig a $\left(p; \frac{4-2p}{5}\right)$ alakú rendezett párok, ahol $p \in \mathbf{R}$. Néhány ilyen megoldás

$$\left(0; \frac{4}{5}\right), \quad \left(1; \frac{2}{5}\right), \quad (-3; 2), \dots$$

az egyenletrendszer megoldáshalmaza pedig

$$M = \left\{ \left(p; \frac{4-2p}{5}\right), p \in \mathbf{R} \right\}.$$

3. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\frac{4}{x+2y} - \frac{1}{3x+6y} = 3 \quad \frac{2}{x+2y} - \frac{1}{9x+18y} = 3.$$

Megoldás. Vegyük észre, hogy ez nem lineáris egyenletrendszer, de felírható

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{2}{x+2y} - \frac{1}{3x+6y} &= 3 \\ \frac{2}{x+2y} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3x+6y} &= 3 \end{aligned}$$

alakban, amelyben a $\frac{2}{x+2y} = a$ és $\frac{1}{3x+6y} = b$ helyettesítést alkalmazva már a

$$\begin{aligned} 2a - b &= 3 \\ a - \frac{b}{3} &= 3 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszert kapjuk. Szorozzuk be a második egyenletet -3 -mal. Ekkor kapjuk a

$$\begin{aligned} 2a - b &= 3 \\ -3a + b &= -9 \end{aligned}$$

ekvivalens rendszert, ahol a két egyenlet összeadásával adódik, hogy $-a = -6$, ahonnan $a = 6$. Ezt behelyettesítve az első egyenletbe kapjuk, hogy $2 \cdot 6 - b = 3$, ahonnan $b = 9$. Térjünk most vissza a helyettesítésekre és számoljuk ki az eredeti x és y ismeretlenek értékeit. Mivel most

$$\frac{2}{x+2y} = 6 \quad \text{és} \quad \frac{1}{3x+6y} = 9,$$

ebből kapjuk, hogy

$$x+2y = \frac{1}{3} \quad \text{és} \quad 3x+6y = \frac{1}{9}.$$

Az egyenletrendszer első egyenletét -3 -mal szorozva és hozzáadva a második egyenlethez adódik a $0 \cdot x + 0 \cdot y = -\frac{2}{3}$ egyenlet, amelynek nincs megoldása, tehát az eredeti egyenletrendszer ellentmondásos, a megoldáshalmaz pedig $M = \emptyset$.

4. Vizsgáljuk ki és oldjuk meg az

$$\begin{aligned} ax + 4y &= 2 \\ 9x + ay &= 3 \end{aligned}$$

egyenletrendszert az a valós paraméter értékeitől függően.

Megoldás. Alkalmazzuk a Cramer-szabályt. A rendszer determinánsa

$$D = \begin{vmatrix} a & 4 \\ 9 & a \end{vmatrix} = a^2 - 36 = (a - 6)(a + 6).$$

Diszkusszió:

1° Ha $a \neq 6$ és $a \neq -6$, akkor $D \neq 0$ és az egyenletrendszer határozott. Ekkor

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & a \end{vmatrix} = 2a - 12 = 2(a - 6) \quad \text{és} \quad D_y = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 3a - 18 = 3(a - 6),$$

az egyenletrendszer megoldásai pedig

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{2(a - 6)}{(a - 6)(a + 6)} = \frac{2}{a + 6} \quad \text{és} \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{3(a - 6)}{(a - 6)(a + 6)} = \frac{3}{a + 6}.$$

Adott $a \in \mathbf{R} \setminus \{-6, 6\}$ esetén az egyenletrendszer egyetlen megoldása a

$$\left(\frac{2}{a + 6}; \frac{3}{a + 6} \right) \text{ rendezett pár, míg megoldáshalmaza } M = \left\{ \left(\frac{2}{a + 6}; \frac{3}{a + 6} \right) \right\}.$$

2° Ha $a = -6$, akkor a

$$\begin{aligned} -6x + 4y &= 2 \\ 9x - 6y &= 3 \end{aligned}$$

egyenletrendszert kapjuk. Összük el 2-vel az első egyenletet és 3-mal a másodikat. Az ekvivalens rendszer most

$$\begin{aligned} -3x + 2y &= 1 \\ 3x - 2y &= 1, \end{aligned}$$

összeadva a két egyenletet pedig a $0 \cdot x + 0 \cdot y = 2$ egyenlet adódik, amelynek nincs megoldása. A rendszer tehát ellentmondásos, a megoldáshalmaz pedig $M = \emptyset$.

3° Ha $a = 6$, akkor a

$$\begin{aligned} 6x + 4y &= 2 \\ 9x + 6y &= 3 \end{aligned}$$

egyenletrendszert kapjuk. Összük el -2 -vel az első egyenletet és 3-mal a másodikat. Az ekvivalens rendszer most

$$\begin{aligned} -3x - 2y &= -1 \\ 3x + 2y &= 1, \end{aligned}$$

összeadva a két egyenletet pedig a $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$ egyenlet adódik, amelynek végtelen sok megoldása van. A megoldáshalmaz felírásához válasszuk például a $3x + 2y = 1$ egyenletben tetszőleges paraméternek az x ismeretlent. Legyen most $x = p$, ahol p tetszőlegesen választható valós szám. Ekkor $3p + 2y = 1$, ahonnan $y = \frac{1-3p}{2}$, a megoldások pedig a $\left(p; \frac{1-3p}{2}\right)$ alakú rendezett párok, ahol $p \in \mathbf{R}$. A rendszer tehát határozatlan, megoldáshalmaza pedig

$$M = \left\{ \left(p; \frac{1-3p}{2} \right), p \in \mathbf{R} \right\}.$$

5. Vizsgáljuk ki és oldjuk meg az

$$\begin{aligned} 3x + (1+k)y &= 2k-1 \\ 2x + (1-k)y &= -(2k+1) \end{aligned}$$

egyenletrendszert a k valós paraméter értékeitől függően.

Megoldás. Alkalmazzuk ismét a Cramer-szabályt. A rendszer determinánsa

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1+k \\ 2 & 1-k \end{vmatrix} = 3(1-k) - 2(1+k) = 1-5k.$$

Diszkússzió:

1° Ha $k \neq \frac{1}{5}$, akkor $D \neq 0$ és az egyenletrendszer határozott. Ekkor

$$D_x = \begin{vmatrix} 2k-1 & 1+k \\ -2k-1 & 1-k \end{vmatrix} = 6k \quad \text{és} \quad D_y = \begin{vmatrix} 3 & 2k-1 \\ 2 & -2k-1 \end{vmatrix} = -10k-1,$$

az egyenletrendszer megoldásai pedig

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{6k}{1-5k} \quad \text{és} \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{10k+1}{5k-1}.$$

Az egyenletrendszer egyetlen megoldása adott $k \in \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{1}{5} \right\}$ esetén a

$\left(\frac{6k}{1-5k}; \frac{10k+1}{5k-1} \right)$ rendezett pár, a megoldáshalmaz pedig

$$M = \left\{ \left(\frac{6k}{1-5k}; \frac{10k+1}{5k-1} \right) \right\}.$$

2° Ha $k = \frac{1}{5}$, akkor a

$$\begin{aligned} 3x + \frac{6}{5}y &= -\frac{3}{5} \\ 2x + \frac{4}{5}y &= -\frac{7}{5} \end{aligned}$$

egyenletrendszert kapjuk. Szorozzuk be $\left(-\frac{5}{3}\right)$ -dal az első egyenletet és $\frac{5}{2}$ -del a másodikat. Az ekvivalens rendszer most

$$\begin{aligned} -5x - 2y &= 1 \\ 5x + 2y &= -\frac{7}{2}, \end{aligned}$$

összeadva a két egyenletet pedig a $0 \cdot x + 0 \cdot y = -\frac{5}{2}$ egyenlet adódik, amelynek nincs megoldása. A rendszer tehát ellentmondásos, a megoldáshalmaz pedig $M = \emptyset$.

6. Oldjuk meg a következő háromismeretlenes lineáris homogén egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ 2x + 3y + 4z &= 0 \\ x + y + z &= 0. \end{aligned}$$

Megoldás. Alkalmazzuk a Gauss-féle eliminációs módszert a táblázatos írásmóddal. Elimináljuk az x változót. Ezért szorozzuk az első egyenletet (-2) -vel és adjuk hozzá a másodikhoz, majd szorozzuk az első egyenletet (-1) -gyel és adjuk hozzá a harmadikhoz. Ekkor

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Az utolsó lépésben szoroztuk a második egyenletet (-1) -gyel és hozzáadtuk a harmadikhoz. A táblázatos felírásban van egy felesleges sor, tehát az egyenletrendszer határozatlan. A redukált egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ y + 2z &= 0, \end{aligned} \quad \text{illetve} \quad z = p \quad \text{esetén} \quad \begin{aligned} x + 2y &= -3p \\ y &= -2p, \end{aligned}$$

ahonnan a $z = p$ és $y = -2p$ alapján $x = p$ adódik, vagyis a megoldáshalmaz

$$M = \{(p, -2p, p), p \in \mathbf{R}\}.$$

Néhány konkrét megoldás például a $p = 0$, $p = 1$ és $p = -\frac{1}{2}$ paraméterértékekre a $(0; 0; 0)$, $(1; -2; 1)$, $\left(-\frac{1}{2}; 1; -\frac{1}{2}\right)$ rendezett hármasok.

7. Oldjuk meg a következő háromismeretlenes lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x - y + z &= 4 \\ 2x + 3z &= 5 \\ 4x + 8y + 10z &= -2 \\ -2y + 3z &= 7. \end{aligned}$$

Megoldás. Alkalmazzuk most is a Gauss-féle eliminációs módszert a táblázatos írásmóddal. Elimináljuk az x változót. Ezért szorozzuk az első egyenletet (-2) -vel

és adjuk hozzá a másodikhoz, majd szorozzuk az első egyenletet (-4) -gyel és adjuk hozzá a harmadikhoz. Ekkor

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 4 & 8 & 10 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 12 & 6 & -18 \\ 0 & -2 & 3 & 7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array} \right).$$

A második lépésben szoroztuk a második egyenletet (-6) -tal és hozzáadtuk a harmadikhoz, majd a második egyenletet hozzáadtuk a negyedikhez. A táblázatos felírásban van egy felesleges sor, de még így is három egyenletünk maradt. A redukált egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} x - y + z &= 4 \\ 2y + z &= -3 \\ 4z &= 4, \end{aligned}$$

ahonnan adódik, hogy $z = 1$, ezt az értéket a második egyenletbe helyettesítve következik, hogy $2y + 1 = -3$, illetve $y = -2$, mindkét kapott értéket pedig az első egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy $x - (-2) + 1 = 4$, azaz $x = 1$. A rendszer tehát határozott, egyetlen megoldása az $(1; -2; 1)$ rendezett hármas.

8. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x + 4y + 3z &= 0 \\ 3x + 7y + 5z &= 4 \\ 2x + 3y + 2z &= 4. \end{aligned}$$

Megoldás. Alkalmazzuk ismét a Gauss-féle eliminációs módszert a táblázatos írásmóddal. Elimináljuk az x változót. Ezért szorozzuk az első egyenletet (-3) -mal és adjuk hozzá a másodikhoz, majd szorozzuk az első egyenletet (-2) -vel és adjuk hozzá a harmadikhoz. Ekkor

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -4 & 4 \\ 0 & -5 & -4 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

A második lépésben szoroztuk a második egyenletet (-1) -gyel és hozzáadtuk a harmadikhoz. A táblázatos felírásban van egy felesleges sor, így most csak két egyenletünk maradt. A redukált egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} x + 4y + 3z &= 0 \\ -5y - 4z &= 4, \end{aligned} \quad \text{illetve} \quad z = p \quad \text{esetén} \quad \begin{aligned} x + 4y &= -3p \\ y &= -\frac{4 + 4p}{5}, \end{aligned}$$

ahonnan $y = -\frac{4 + 4p}{5}$ és $x = \frac{16 + p}{5}$, azaz a rendszernek végtelen sok megoldása van, tehát határozatlan, megoldáshalmaza pedig

$$M = \left\{ \left(\frac{16 + p}{5}; -\frac{4 + 4p}{5} \right) \mid p \in \mathbf{R} \right\}.$$

9. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}x + 2y + z &= 1 \\3x + y - z &= 0 \\x + y + z &= 2 \\4x + 7y + 2z &= -2.\end{aligned}$$

Megoldás. Alkalmazzuk a Gauss-féle eliminációs módszert a táblázatos írásmóddal. Elimináljuk az x változót. Ezért szorozzuk az első egyenletet (-3) -mal és adjuk hozzá a másodikhoz, szorozzuk az első egyenletet (-1) -gyel és adjuk hozzá a harmadikhoz, majd szorozzuk az első egyenletet (-4) -gyel és adjuk hozzá a negyedik egyenlethez. Ekkor

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 1 \\3 & 1 & -1 & 0 \\1 & 1 & 1 & 2 \\4 & 7 & 2 & -2\end{array}\right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 1 \\0 & -5 & -4 & -3 \\0 & -1 & 0 & 1 \\0 & -1 & -2 & -6\end{array}\right) \sim \\&\sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 1 \\0 & 1 & 0 & -1 \\0 & 0 & -4 & -8 \\0 & 0 & -2 & -7\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 1 \\0 & 1 & 0 & -1 \\0 & 0 & 2 & 4 \\0 & 0 & 0 & -3\end{array}\right).\end{aligned}$$

A második lépésben szoroztuk a harmadik egyenletet (-1) -gyel és felcseréltük a másodikkal, majd szoroztuk a második egyenletet 5-tel és hozzáadtuk a harmadikhoz, majd a második egyenletet hozzáadtuk a negyedikhez. A harmadik lépésben a harmadik egyenletet elosztottuk (-2) -vel, majd hozzáadtuk a negyedik egyenlethez, s ezzel ellentmondásos sort kaptunk. A redukált egyenletrendszer:

$$\begin{aligned}x + 2y + z &= 1 \\y &= -1 \\2z &= 4 \\0 \cdot z &= -3,\end{aligned}$$

ahol a negyedik egyenletnek nincs megoldása, tehát az egyenletrendszer ellentmondásos, megoldáshalmaza $M = \emptyset$.

10. Vizsgáljuk ki és oldjuk meg az

$$\begin{aligned}ax + y + z &= 1 \\x + ay + z &= 1 \\x + y + az &= 1\end{aligned}$$

egyenletrendszert az a valós paraméter értékeitől függően.

Megoldás. Alkalmazzuk a Gauss-féle eliminációs módszert a táblázatos írásmóddal. Cseréljük fel először az első és harmadik egyenletet, majd szorozzuk az első egyenletet (-1) -gyel és adjuk hozzá a másodikhoz, szorozzuk az első egyenletet $(-a)$ -val

és adjuk hozzá a harmadikhoz. Ekkor

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & a & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & a & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & | & 1 \\ 1 & a & 1 & | & 1 \\ a & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & | & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & | & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & | & 1-a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & | & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & | & 0 \\ 0 & 0 & (a+2)(1-a) & | & 1-a \end{pmatrix},$$

ahol az utolsó lépésben a második egyenletet hozzáadtuk a harmadik egyenlethez.

Az utolsó egyenletből azt kapjuk, hogy $z = \frac{1}{a+2}$, ha $a \neq 1$ és $a \neq -2$. Ekkor a második egyenletből $y = \frac{1}{a+2}$, az elsőből pedig $x = \frac{1}{a+2}$ következik. Mivel két paraméterértéket kizártunk, ezért szükség van az egyenletrendszer megoldásainak kivizsgálására.

Diszkússzió:

1° Ha $a \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 1\}$, akkor a rendszer határozott és megoldáshalmaza

$$M = \left\{ \left(\frac{1}{a+2}; \frac{1}{a+2}; \frac{1}{a+2} \right) \right\}.$$

2° Ha $a = -2$, akkor az egyenletrendszer táblázatos írásmóddal így írható fel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 1 \\ 0 & -3 & 3 & | & 0 \\ 0 & 3 & -3 & | & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 1 \\ 0 & -3 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 3 \end{pmatrix}$$

ahol a második egyenletet hozzáadtuk a harmadikhoz, s ezzel egy ellentmondásos sort kaptunk, amelyből megállapíthatjuk, hogy az egyenletrendszer most ellentmondásos.

3° Ha $a = 1$, akkor az egyenletrendszer táblázatos írásmóddal

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

módon írható fel, amelyből leolvashatjuk, hogy van két felesleges sor, tehát valójában a rendszer csak az $x + y + z = 0$ egyenletből áll. Mivel kettővel több ismeretlen van, mint egyenlet, ezért a rendszer határozatlan és 2 a szabadságfoka. Ez azt jelenti, hogy két ismeretlennek tetszőlegesen választhatjuk az értékeit. Legyen most $x = \alpha$ és $y = \beta$, ahol α és β tetszőlegesen választható valós számok. Ekkor $z = 1 - \alpha - \beta$, a rendszernek végtelen sok megoldás van, megoldáshalmaza pedig

$$M = \{(\alpha; \beta; 1 - \alpha - \beta), \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}.$$

4.4. Kétváltozós lineáris egyenlőtlenségrendszerek

Legyen adott az x, y ismeretlenes n lineáris egyenlőtlenségből álló

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &\leq b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &\leq b_2 \\ &\dots \\ a_{n1}x + a_{n2}y &\leq b_n \end{aligned} \tag{4.2}$$

egyenlőtlenségrendszer, ahol az a_{ij} együtthatók is és a b_j állandók is valós számok, minden $i = 1, 2$ és $j = 1, 2, \dots, n$ esetén. A fenti rendszer megoldása alatt azt a $(x_0; y_0)$ rendezett valós számpárt értjük, amely $x = x_0, y = y_0$ esetén a rendszer mindegyik egyenlőtlenségének eleget tesz. Ezek a megoldások egy halmazt alkotnak, amelyet az egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmazának nevezünk.

Azt a lineáris egyenlőtlenségrendszert, amelynek van legalább egy megoldása, *megoldhatónak* nevezzük. Amennyiben a lineáris egyenlőtlenségrendszernek nincs egyetlen megoldása sem, azt mondjuk rá, hogy *ellentmondásos*.

Két lineáris egyenlőtlenségrendszert akkor és csak akkor nevezünk ekvivalensnek, ha az első rendszer mindegyik megoldása megoldása a másikkal is, és fordítva, a másik rendszer mindegyik megoldása megoldása az első rendszernek is. Bármely két ellentmondásos lineáris egyenlőtlenségrendszer egymással ekvivalens.

Mindegyik kétismeretlenes lineáris egyenlőtlenségrendszer leírható a (4.2) alakban. Ha a rendszer tartalmaz $a_{i1}x + a_{i2}y \geq b_i$ alakú egyenlőtlenséget, akkor ezt -1 -gyel szorozva a (4.2) rendszerben adott alakra hozhatjuk.

Legyen adott az x és y ismeretlenes $a_1x + a_2y \leq b$ egyenlőtlenség. Ha az x, y változókat egy síkbeli pont koordinátáinak tekintjük, akkor az egyenlőtlenség megoldáshalmaza grafikusán ábrázolható a síkban. A valós számsík azon pontjainak halmazát, melyek kielégítik az $a_1x + a_2y \leq b$ vagy $a_1x + a_2y \geq b$ egyenlőtlenséget, *félsíknak* nevezzük, azon pontok halmazát pedig, melyek kielégítik az $a_1x + a_2y < b$ vagy $a_1x + a_2y > b$ egyenlőtlenséget, *nyitott félsíknak* nevezzük. Az $a_1x + a_2y = b$ egyenest az említett félsíkok *határegyenesének* mondjuk.

4.15. Definíció. Az S ponthalmazt akkor és csak akkor mondjuk konvexnek, ha bármely két pontjával meghatározott szakasz pontjai is az S halmazhoz tartoznak.

4.5. Tétel. Konvex halmazok metszete is konvex halmaz.

4.6. Tétel. Minden félsík konvex halmazt alkot.

4.1. Következmény. A félsíkok metszete konvex halmazt alkot.

4.16. Definíció. Azon pontok P halmazát melyek kielégítik a (4.2) lineáris kétismeretlenes egyenlőtlenségrendszert, konvex poligonhalmaznak mondjuk, azt a pontot pedig, amely eleme a P halmaznak és a (4.2) egyenlőtlenségrendszerre vonatkozó félsíkok határai metszetének, a P halmaz lehetséges optimális pontjának nevezzük.

4.17. Definíció. A konvex P poligonhalmazra akkor mondjuk, hogy korlátos, ha vannak olyan K_1, K_2 pozitív valós számok, hogy minden $(x; y) \in P$ pontra érvényes:

$$|x| \leq K_1, \quad |y| \leq K_2.$$

Ellenkező esetben a konvex P poligonhalmazra azt mondjuk, hogy nem korlátos.

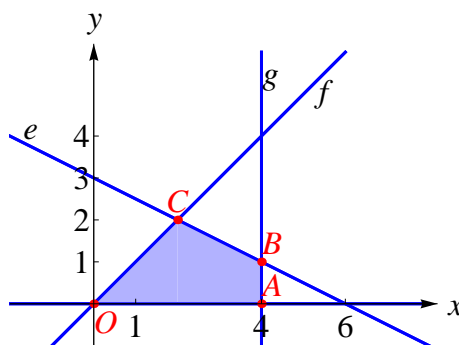
4.18. Definíció. A valós számpárok \mathbf{R}^2 halmazát a valós számok \mathbf{R} halmazába képező f függvényt, amelyre $f(x, y) = C_1x + C_2y$, $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$, lineáris függvénynek nevezzük.

4.29. Példa. Ábrázoljuk grafikusan az

$$x + 2y \leq 6, \quad x - y \geq 0, \quad x \leq 4, \quad y \geq 0$$

lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmazát! Korlátos-e a megoldáshalmaz? Írjuk fel a megoldáshalmazhoz tartozó lehetséges optimális pontok halmazát!

Az első egyenlőtlenséggel meghatározott félsík tartalmazza az $e : x + 2y = 6$ egyenest és az alatta elhelyezkedő pontokat. A második egyenlőtlenséggel meghatározott félsík tartalmazza az $f : x = y$ egyenest és az alatta elhelyezkedő pontokat. A harmadik egyenlőtlenséggel meghatározott félsíkhöz a $g : x = 4$ egyenes pontjai és a tőle balra eső pontok tartoznak. Végül az utolsó egyenlőtlenséggel meghatározott félsík az $y = 0$ egyenest és a felette elhelyezkedő pontokat tartalmazza.



Jelölje B az e és g egyenesek metszéspontját, amelynek koordinátái $(4, 1)$, C az e és f egyenesek metszéspontját, melynek koordinátái $(2, 2)$, A a g és $y = 0$ egyenesek metszéspontját, melynek koordinátái $(4, 0)$, O pedig az origót, amely az f és $y = 0$ egyenesek metszéspontja. Az $OABC$ négyszög pontjai és a belső tartományába tartozó pontok elemei az említett félsíkok mindegyikének és ezért az adott egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmazát alkotják. A megoldáshalmaz korlátos, hiszen az $OABC$ négyszög minden (x, y) pontjára igaz, hogy $|x| \leq 4$ és $|y| \leq 2$. A megoldáshalmaz lehetséges optimális pontjait az $OABC$ négyszög határegyenesének metszéspontjai, azaz az $\{O, A, B, C\}$ halmaz elemei alkotják.

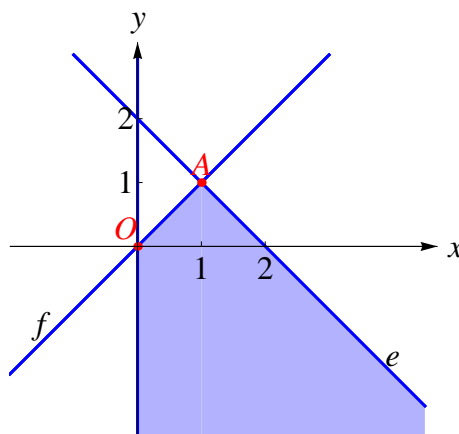
4.30. Példa. Ábrázoljuk grafikusan az

$$x + y \leq 2, \quad x - y \geq 0, \quad x \geq 0$$

lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmazát! Korlátos-e a megoldáshalmaz? Írjuk fel a megoldáshalmazhoz tartozó lehetséges optimális pontok halmazát!

Az első egyenlőtlenséggel meghatározott félsík tartalmazza az $e : x + y = 2$ egyenest és az alatta elhelyezkedő pontokat. A második egyenlőtlenséggel meghatározott félsík tartalmazza az $f : y = x$ egyenest és az alatta elhelyezkedő pontokat. Végül a harmadik egyenlőtlenséggel meghatározott félsík az $x = 0$ egyenest és a tőle jobbra elhelyezkedő pontokat tartalmazza.

Jelölje A az e és f egyenesek metszéspontját, amelynek koordinátái $(1, 1)$, O pedig az origót, amely az f és az $x = 0$ egyenesek metszéspontja.



A fenti egyenlőtlenséggel meghatározott konvex poligonhalmaz tehát nem korlátos, lehetséges optimális pontjai pedig $(1, 1)$ és $(0; 0)$.

FELADATOK

1. Ábrázoljuk grafikusan az

$$x + y \leq 1, \quad y - x \geq 1, \quad y - x \geq -1, \quad x \geq -1$$

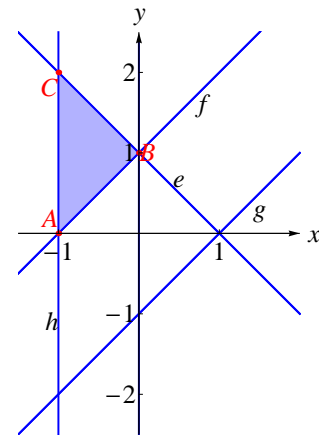
lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmazát. Írjuk fel a megoldáshalmazhoz tartozó lehetséges optimális pontok halmazát.

Megoldás. Ábrázoljuk a koordinátasíkon az $e: x + y = 1$, $f: y - x = 1$, $g: y - x = -1$ és $h: x = -1$ egyeneseket, valamint metszéspontjaikat, ahol

$$\{A\} = f \cap h, \quad \{B\} = e \cap f, \quad \{C\} = e \cap h, \quad \{D\} = e \cap g \quad \text{és} \quad \{E\} = g \cap h.$$

A megfelelő egyenletrendszerek megoldásával adódnak a pontok megfelelő koordinátái, azaz $A(-1; 0)$, $B(0; 1)$, $C(-1; 2)$, $D(1; 0)$ és $E(-1; -2)$. Ezekből a metszéspontokból azok a pontok lesznek a lehetséges optimális pontok, amelyek kielégítik a egyenlőtlenségrendszer minden egyenlőtlenségét. Ellenőrzéssel megkapjuk, hogy a lehetséges optimális pontok A , B és C , mivel a D és E pontok nem elégítik ki a második egyenlőtlenséget.

Az ábráról leolvashatjuk, hogy a megoldáshalmazt most az ABC háromszög pontjai határozzák meg, a lehetséges optimális pontok pedig az A , B és a C .



2. Ábrázoljuk grafikusan az

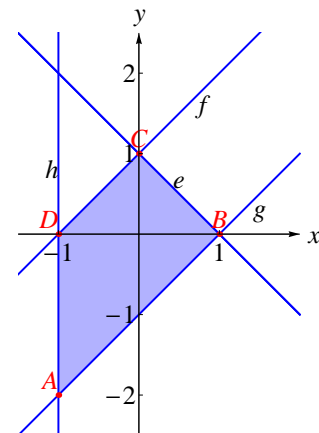
$$x + y \leq 1, \quad y - x \leq 1, \quad x - y \leq 1, \quad x \geq -1$$

lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmazát. Határozzuk meg a megoldáshalmazhoz tartozó lehetséges optimális pontok halmazát.

Megoldás. Ábrázoljuk a koordinátasíkon az $e: x + y = 1$, $f: y - x = 1$, $g: y - x = -1$ és $h: x = -1$ egyeneseket, valamint metszéspontjaikat, ahol

$$\{A\} = g \cap h, \quad \{B\} = e \cap g, \quad \{C\} = e \cap f, \quad \{D\} = f \cap h \quad \text{és} \quad \{E\} = e \cap h.$$

A megfelelő egyenletrendszerek megoldásával adódnak a pontok megfelelő koordinátái, azaz $A(-1; -2)$, $B(1; 0)$, $C(0; 1)$, $D(-1; 0)$ és $E(-1; 2)$. Ellenőrzéssel megkapjuk, hogy a lehetséges optimális pontok A , B , C és D , mivel az E pont nem elégíti ki a második egyenlőtlenséget. Az ábrán láthatjuk, hogy a megoldáshalmazt az $ABCD$ konvex négyszög pontjai alkotják, a lehetséges optimális pontok pedig a megoldást ábrázoló $ABCD$ konvex négyszög csúcspontjai.

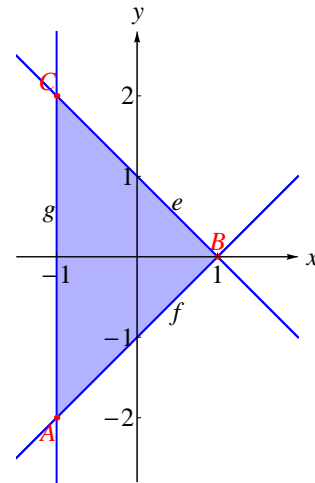


3. Ábrázoljuk grafikusan az

$$x + y \leq 1, \quad x - y \leq 1, \quad x \geq -1$$

lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmazát! Számítsuk ki a megoldáshalmazhoz tartozó lehetséges optimális pontok halmazát.

Megoldás. Legyenek $e : x + y = 1$, $f : x - y = 1$, $g : x = -1$ az adott egyenesek, metszéspontjaik pedig $\{A\} = f \cap g$, $\{B\} = e \cap f$ és $\{C\} = e \cap g$, melyek koordinátái $A(-1; -2)$, $B(1; 0)$ és $C(-1; 2)$. Ellenőrzéssel megkapjuk, hogy a lehetséges optimális pontok A , B és C . A lehetséges optimális pontok valójában a megoldást ábrázoló ABC háromszög csúcspontjai.

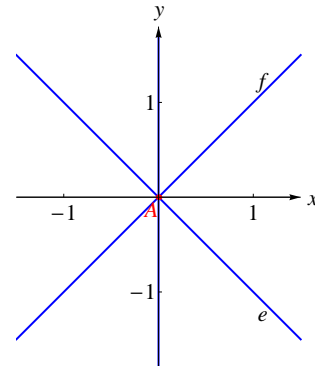


4. Ábrázoljuk grafikusan az

$$x + y \geq 0, \quad x - y \geq 0, \quad x \leq 0$$

lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmazát.

Megoldás. Jelölje $e : x + y = 0$ és $f : x - y = 0$ az adott határegyeneseket, a harmadik határegyenes pedig az x -tengely. Az e és f egyenesek által meghatározott félsíkok metszete az y -tengelytől jobbra van és ennek metszete az $x \leq 0$ félsíkkal csupán az origó, azaz az $A(0, 0)$ pont. A megoldáshalmaz tehát ebben az esetben egyetlen pont és ugyanaz az egy pont a lehetséges optimális pont is.



5. Ábrázoljuk grafikusan az

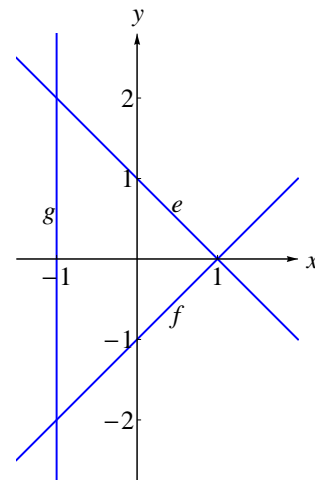
$$x + y \geq 1, \quad x - y \geq 1, \quad x \leq -1$$

lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmazát.

Megoldás. Legyenek

$$e : x + y = 1, \quad f : x - y = 1 \quad \text{és} \quad g : x = -1$$

az adott egyenlőtlenségeknek megfelelő félsíkok határegyenesei. Az első egyenlőtlenség megoldáshalmaza az e egyenestől jobbra felfelé eső pontok, a másodiké az f egyenestől jobbra lefelé eső pontok, a harmadiké pedig a g egyenestől balra eső pontok. Mivel az e és f határegyenesekkel meghatározott félsíkok metszete az $x \geq 1$ félsíkban van, ez azt jelenti, hogy az egyenlőtlenségrendszernek nincs megoldása, hiszen nincs egy olyan pont sem, amely mindhárom egyenlőtlenséget kielégítené. A megoldáshalmaz tehát az üres halmaz.

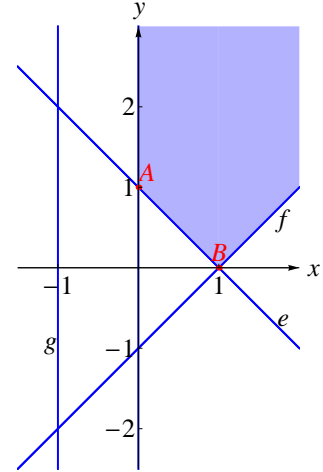


6. Ábrázoljuk grafikusan az

$$x + y \geq 1, \quad x - y \leq 1, \quad x \geq -1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmazát. Korlátos-e a megoldáshalmaz? Írjuk fel a megoldáshalmazhoz tartozó lehetséges optimális pontok halmazát.

Megoldás. Legyenek $e : x + y = 1$, $f : x - y = 1$ és $g : x = -1$, valamint az x -tengely és az y -tengely az egyenlőtlenségeknek megfelelő félsíkok határegyenesei. Az $x \geq -1$ és az $x \geq 0$ egyenlőtlenségeknek megfelelő félsíkok metszete az y -tengelytől jobbra levő pontok halmaza, tehát a g egyenes nem játszik szerepet a megoldáshalmazban. Legyenek a határegyenések metszéspontjai $\{A\} = e \cap y$ és $\{B\} = e \cap f \cap x$, koordinátáik pedig $A(0; 1)$ és $B(1; 0)$. A megoldáshalmaz az ábrán látható, s az is, hogy ebben az esetben nem korlátos halmazról van szó. A lehetséges optimális pontok A és B .



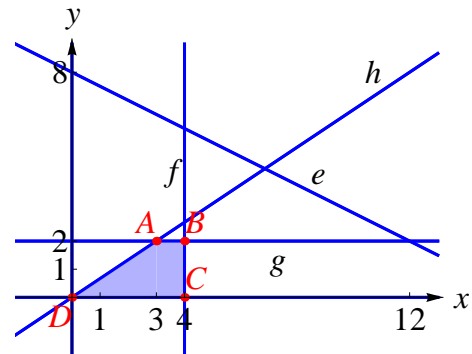
7. Ábrázoljuk grafikusan az

$$x + 2y \leq 16, \quad x \geq 0, \quad x \leq 4, \quad y \geq 0, \quad y \leq 2, \quad x \geq 1.5y$$

lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmazát. Mi lesz ebben az esetben a megoldáshalmazhoz tartozó lehetséges optimális pontok halmaza?

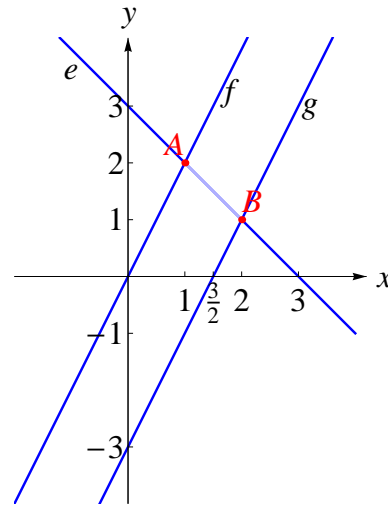
Megoldás. Az $0 \leq x \leq 4$ és $0 \leq y \leq 2$ egyenlőtlenségek meghatározzák a megoldáshalmaz alakját, mert egy téglalap belső pontjait adják meg. Az $x + 2y \leq 16$ egyenlőtlenséget meghatározó félsík metszete az előbbi téglalappal maga a téglalap, tehát nem változtat rajta.

Az $x \geq 1.5y$ egyenlőtlenségnek megfelelő félsík a téglalaptól lemett a $h : x = 1.5y$ határegyenes alatti részt, s a megfelelő metszéspontokat kiszámolva kapjuk, hogy ez nem más, mint az $ABCD$ konvex négyszög, amelynek csúcspontjai $A(3; 2)$, $B(4; 2)$, $C(4; 0)$ és $D(0; 0)$. Az egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmazának lehetséges optimális pontjai: A , B , C , D .



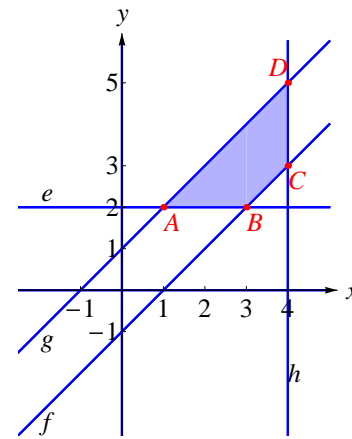
8. Ábrázoljuk grafikusan az $x + y \geq 3$, $2x - y \geq 0$, $2x - y \leq 3$, $x + y \leq 3$ lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmazát. Korlátos-e a megoldáshalmaz? Mi lesz ebben az esetben a megoldáshalmazhoz tartozó lehetséges optimális pontok halmaza?

Megoldás. Az $2x - y \geq 0$ és $2x - y \leq 3$ feltétel az $f: y = 2x$ és $g: y = 2x - 3$ párhuzamos egyenesek közötti síkrész pontjait adják meg, az $x + y \geq 3$ és $x + y \leq 3$ feltételek együttesen pedig ez esetben az $e: y = 3 - x$ határegyenes pontjain teljesülnek. Mivel az e egyenes metszéspontja az f egyenessel az $A(1; 2)$ pont, az e egyenes metszéspontja a g egyenessel pedig a $B(2; 1)$ pont, így a megoldáshalmazt az AB szakasz pontjai alkotják. Ez a megoldáshalmaz korlátos, mert $|x| \leq 2$ és $|y| \leq 2$ teljesül, lehetséges optimális pontjai pedig az A és B pontok. A megoldáshalmaz az AB szakasz.



9. Ábrázoljuk grafikusan az $y - 2 \geq 0$, $-x + y + 1 \geq 0$, $x - y + 1 \geq 0$, $-x + 4 \geq 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmazát. Mi lesz ebben az esetben a megoldáshalmazhoz tartozó lehetséges optimális pontok halmaza?

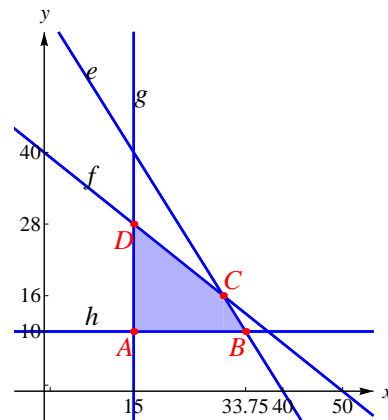
Megoldás. A megoldáshalmaz határegyenesei: $e: y = 2$, $f: y = x - 1$, $g: y = x + 1$ és $h: x = 4$. Az $x \geq 0$ és $y \geq 0$ feltételek feleslegek, mert nem hatnak ki a megoldáshalmazra. Az ábrán látható, hogy a megoldáshalmaz az $ABCD$ trapéz, a lehetséges optimális pontok pedig $A(1; 2)$, $B(3; 2)$, $C(4; 3)$ és $D(4; 5)$.



10. Ábrázoljuk grafikusan az $8x + 5y \leq 320$, $4x + 5y \leq 200$, $x \geq 15$, $y \geq 10$ lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmazát. Mi lesz ebben az esetben a megoldáshalmazhoz tartozó lehetséges optimális pontok halmaza?

Megoldás. A rendszer megoldáshalmaza az ábrán látható $ABCD$ konvex négyszög,

ahol A a $g: x = 15$ és $h: y = 10$ határegyenések metszéspontja, B az $e: 8x + 5y = 320$ és h egyenesek, C az e és $f: 4x + 5y = 200$ egyenesek, D pedig az g és f egyenesek metszéspontja. A megfelelő kétismeretlenes egyenletrendszerek megoldásával a metszéspontok koordinátái kiszámolhatók. A határegyenésekkel alkotott többi metszéspont nem elégíti ki az egyenlőtlenségrendszer valamelyik egyenlőtlenségét, ezért nem csúcspontjai a megoldáshalmaznak és nem is lehetséges optimális pontok. Lehetséges optimális pontok: $A(15; 10)$, $B(33,75; 10)$, $C(30; 16)$ és $D(15; 28)$.



4.5. Lineáris programozás

A lineáris programozás alapfeladatát a következőképpen fogalmazhatjuk meg.

Tekintsük az

$$f(x, y) = C_1x + C_2y$$

lineáris függvényt, ahol C_1 és C_2 valós számok, és nevezzük el *célfüggvénynek*.

Határozzuk meg a célfüggvény maximumát vagy minimumát, ha az ismeretlenek kielégítik az

$$a_{11}x + a_{12}y \leq b_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y \leq b_2$$

...

$$a_{n1}x + a_{n2}y \leq b_n$$

lineáris egyenlőtlenségrendszer. Más szóval, keressük meg a célfüggvény maximumát vagy minimumát az adott konvex poligonhalmazon.

4.7. Tétel. *Legyen az f célfüggvény értelmezett a P korlátos konvex poligonhalmazon. Ekkor az f függvény a P halmaz lehetséges optimális pontjaiban éri el maximumát vagy minimumát.*

4.8. Tétel. *Legyen P egy nem korlátos konvex poligonhalmaz, amely rendelkezik legalább egy lehetséges optimális ponttal. Ha az f célfüggvény a maximum- vagy minimumértékét a P halmazon éri el, akkor ezt a maximumot vagy minimumot a lehetséges optimális pontjaiban éri el.*

4.31. Példa. Határozzuk meg az $f(x, y) = 2x + 2y$ lineáris függvény maximumát és minimumát a

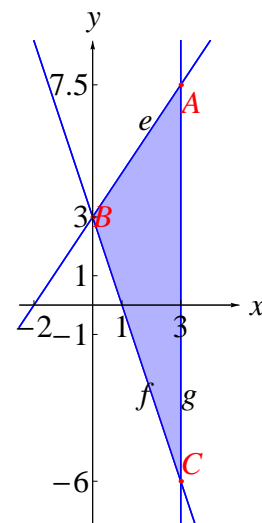
$$3x - 2y \geq -6, \quad 3x + y \geq 3, \quad x \leq 3$$

egyenlőtlenségrendszerrel értelmezett P konvex poligonhalmazon.

Az első egyenlőtlenséggel meghatározott félsík tartalmazza az $e : 3x - 2y = -6$ egyenest és az alatta elhelyezkedő pontokat. A második egyenlőtlenséggel meghatározott félsík tartalmazza az $f : 3x + y = 3$ egyenest és a felette elhelyezkedő pontokat. Végül a harmadik egyenlőtlenséggel meghatározott félsík a $g : x = 3$ egyenest és a tőle balra elhelyezkedő pontokat tartalmazza.

Jelölje A az e és g egyenesek metszéspontját, ennek koordinátái $\left(3, \frac{15}{2}\right)$, B az e és f egyenesek metszéspontját, melynek koordinátái $(0, 3)$, C pedig az f és g egyenesek metszéspontját, amelynek koordinátái $(3, -6)$. A fenti egyenlőtlenséggel meghatározott korlátos konvex poligonhalmaz lehetséges optimális pontjai tehát $\left(3, \frac{15}{2}\right)$, $(0, 3)$ és $(3, -6)$.

Tekintsük most a $2x + 2y = k$ egyeneseket, ahol a k paraméter különböző értékeire párhuzamos egyenesek seregét kapjuk. Az f függvény maximumának és minimumának meghatározása az ABC háromszög esetében most a következőkből áll: meghatározzuk k lehetséges legnagyobb és legkisebb értékét úgy, hogy a $2x + 2y = k$ egyenes messe az ABC háromszöget.



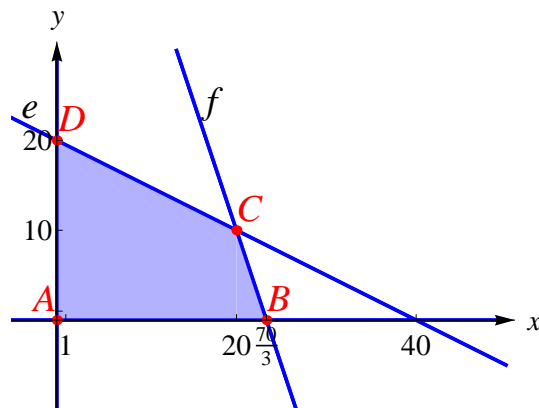
Azokból az egyenesekből kiindulva, amelyekre a k értékei eléggé nagyok, az egyenesek seregének ABC háromszöggel való első metszéspontja az $A\left(3; \frac{15}{2}\right)$ pont. Ebben a pontban a függvénynek maximuma van: $f_{\max}\left(3, \frac{15}{2}\right) = 21$. Hasonlóan, ha azokból az egyenesekből indulunk ki, amelyekre a k értékei kicsik, akkor az egyenesek seregének az ABC háromszöggel való első metszete a $C(3, -6)$ pont és ebben a pontban az f függvénynek minimuma van: $f_{\min}(3, -6) = -6$.

4.32. Példa. Kétféle szendvicset készítünk az osztály klubdélutánjára. Az I. típusú szendvicshöz 1 dkg vajat és 3 szelet gépsonkát, a II. típusúhoz pedig 2 dkg vajat és 1 szelet gépsonkát használunk fel szendvicsenként. Összesen 40 dkg vaj és 70 szelet gépsonka áll rendelkezésünkre. A kenyér korlátlanul áll rendelkezésünkre. Hány szendvicset készítsünk az egyes típusokból, hogy a rendelkezésre álló alapanyagokból a lehető legtöbb szendvicset készüljön el?

Jelölje x az I. típusú szendvicsek, y pedig a II. típusú szendvicsek számát. A feladatra ekkor a következő lineáris programozási modellt tudjuk felállítani:

$$\begin{aligned} x &\geq 0, y \geq 0 && \text{(a szendvicsek száma nem lehet negatív)} \\ x + 2y &\leq 40 && \text{(vajás feltétel)} \\ 3x + y &\leq 70 && \text{(sonkás feltétel)} \end{aligned}$$

ahol $f(x, y) = x + y$ a célfüggvény, amelynek a maximumát keressük. Ábrázoljuk a koordináta-rendszerben az $e: x + 2y = 40$ és $f: 3x + y = 70$ egyeneseket. Az e egyenes az x -tengelyt a $P(40; 0)$ pontban, az f egyenest a $C(20; 10)$ pontban, az y -tengelyt pedig a $D(0; 20)$ pontban metszi. Az f egyenes az x -tengelyt az $B\left(23\frac{1}{3}; 0\right)$ pontban, az y -tengelyt pedig az $Q(0; 70)$ pontban metszi. A tengelyek metszete természetesen az $A(0; 0)$ pontban van.

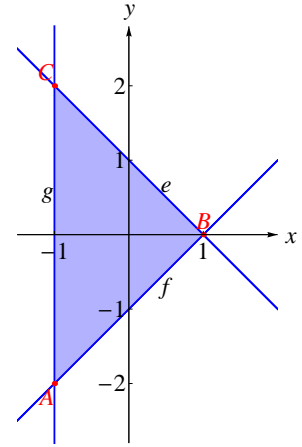


Az egyenlőtlenségrendszer megoldása az $ABCD$ négyszög, ennek csúcspontjai pedig a lehetséges optimális pontok. Mivel most $f(A) = 0 + 0 = 0$, $f(B) = 23\frac{1}{3} + 0 = 23\frac{1}{3}$, $f(C) = 20 + 10 = 30$ és $f(D) = 0 + 20 = 20$, ezért megállapíthatjuk, hogy a célfüggvény maximumát a C pontban éri el, vagyis az I. típusú szendviczből 20 darabot, II. típusú szendviczből pedig 10 darabot kell elkészíteni.

FELADATOK

1. Határozzuk meg az $f_1(x, y) = 2x - 5y$, $f_2(x, y) = -x + 3y$, $f_3(x, y) = x + y$ és $f_4(x, y) = -x + y$ célfüggvények maximumát és minimumát az $x + y \leq 1$, $x - y \leq 1$, $x \geq -1$ egyenlőtlenségrendszerrel értelmezett P konvex poligonhalmazon.

Megoldás. Már meghatároztuk az előbbieken, hogy a P megoldáshalmaz most az ABC háromszög, ahol $A(-1; -2)$, $B(1; 0)$ és $C(-1; 2)$, a lehetséges optimális pontok pedig az A , B és C pontok. Számoljuk ki most a célfüggvények értékeit ezekben a pontokban, hogy megállapíthassuk mely pontokban érik el a maximumot vagy a minimumot.



$f_1(A) = 2 \cdot (-1) - 5 \cdot (-2) = 8$, $f_1(B) = 2 \cdot 1 - 5 \cdot 0 = 2$, $f_1(C) = 2 \cdot (-1) - 5 \cdot 2 = -12$,
tehát $f_{1\max}(A) = 8$ és $f_{1\min}(C) = -12$.

$f_2(A) = -(-1) + 3 \cdot (-2) = -5$, $f_2(B) = -1 + 3 \cdot 0 = -1$, $f_2(C) = -(-1) + 3 \cdot 2 = 7$,
tehát $f_{2\max}(C) = 7$ és $f_{2\min}(A) = -5$.

$$f_3(A) = -1 - 2 = -3, \quad f_3(B) = 1 + 0 = 1, \quad f_3(C) = -1 + 2 = 1,$$

tehát $f_{3\max}(B) = f_{3\max}(C) = 1$ és $f_{3\min}(A) = -3$.

$$f_4(A) = -(-1) - 2 = -1, \quad f_4(B) = -1 + 0 = -1, \quad f_4(C) = -(-1) + 2 = 3,$$

tehát $f_{4\max}(C) = 3$ és $f_{4\min}(A) = f_{4\min}(B) = -1$.

2. Oldjuk meg a következő lineáris programozási feladatot az egész számok \mathbf{Z} halmazában: $y - 2 \geq 0$, $-x + y + 1 \geq 0$, $x - y + 1 \geq 0$, $-x + 4 \geq 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, ahol az $f(x, y) = 4x - y$ célfüggvény maximumát kell megkeresni.

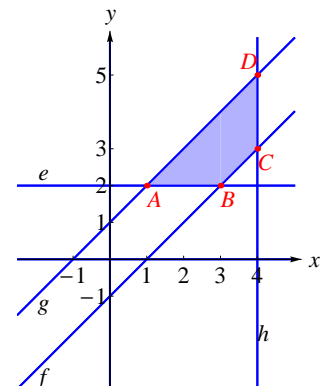
Megoldás. A megoldáshalmaz az $ABCD$ trapéz, amelynek belső tartományában és határegyenesein a következő egész koordinátájú pontok vannak: $A(1; 2)$, $B(3; 2)$, $C(4; 3)$, $D(4; 5)$, $E(2; 2)$, $F(4; 4)$, $G(2; 3)$, $H(3; 4)$ és $K(3; 3)$.

Ezek közül azonban csak a lehetséges optimális pontokban veszi fel a célfüggvény a maximumát vagy minimumát, tehát számoljuk ki a célfüggvény értékeit az A , B , C és D pontokban, mert ezek a feladat lehetséges optimális pontjai.

$$f(A) = 4 \cdot 1 - 2 = 2, \quad f(B) = 4 \cdot 3 - 2 = 10,$$

$$f(C) = 4 \cdot 4 - 3 = 13, \quad \text{és} \quad f(D) = 4 \cdot 4 - 5 = 11.$$

Megállapíthatjuk tehát, hogy a célfüggvény a $C(4, 3)$ pontban veszi fel a maximumát és $f_{\max}(C) = 13$.



3. Kata és Julcsi szendvicseket szeretne készíteni a házibulira. A hűtőszekrényben 120 dkg vaj, 100 dkg sonka 200 dkg sajt és 20 darab keményre főtt tojás áll a rendelkezésükre. Két féle szendvicset szeretnének készíteni. Az első típusú szendvicshöz 3 dkg vaj, 3 dkg sonka 2 dkg sajt és egy negyed keményre főtt tojás szükséges szendvicsenként, a második típushoz pedig 2 dkg vaj, 1 dkg sonka 5 dkg sajt és egy fél keményre főtt tojás szükséges szendvicsenként. Bármikor átugorhatnak a szomszédos pékségbe, így kenyér korlátlanul áll rendelkezésükre. Az a feladat, hogy hogyan lehetne a lehető legtöbb szendvicset elkészíteni a rendelkezésre álló alapanyagokból.

Megoldás. Jelölje x az első típusú szendvicsek, y pedig a második típusú szendvicsek számát. A feladatra ekkor a következő lineáris programozási modellt tudjuk felállítani:

$$\begin{aligned} x \geq 0, y \geq 0 & \quad (\text{a szendvicsek száma nem lehet negatív}) \\ 3x + 2y \leq 120 & \quad (\text{vajás feltétel}) \\ 3x + y \leq 100 & \quad (\text{sonkás feltétel}) \\ 2x + 5y \leq 200 & \quad (\text{sajtos feltétel}) \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y \leq 20 & \quad (\text{tojásos feltétel}) \end{aligned}$$

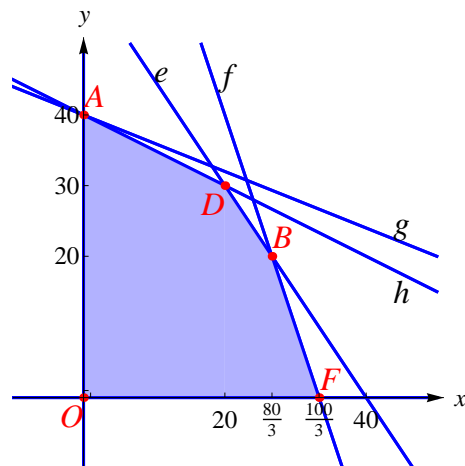
ahol $f(x, y) = x + y$ a célfüggvény, amelynek a maximumát keressük. Ábrázoljuk a koordináta-rendszerben az $e : 3x + 2y = 120$, $f : 3x + y = 100$, $g : 2x + 5y = 200$ és $h : x + 2y = 80$ egyeneseket. Az e egyenes az x -tengelyt az $A(0; 40)$ pontban, az f egyenest a $B\left(26\frac{2}{3}; 20\right)$ pontban, a g egyenest a $C\left(18\frac{2}{11}; 32\frac{8}{11}\right)$ pontban, a h egyenest a $D(20; 30)$ pontban, az y -tengelyt pedig a $E(0; 60)$ pontban metszi. Az f egyenes az x -tengelyt az $F\left(33\frac{1}{3}; 0\right)$ pontban, a g egyenest a $G\left(23\frac{1}{13}; 30\frac{10}{13}\right)$ pontban, a h egyenest a $H(24; 28)$ pontban, az y -tengelyt pedig a $K(0; 100)$ pontban metszi. A g egyenes az x -tengelyt az $L(100; 0)$ pontban, h egyenest és az y -tengelyt pedig az $A(0; 40)$ pontban metszi. A h egyenes az x -tengelyt az $M(80; 0)$ pontban, az y -tengelyt pedig az $A(0; 40)$ pontban metszi. A tengelyek metszete az $O(0; 0)$ pont. A lehetséges optimális pontok halmaza: $\{O, A, B, D, F\}$.

Mivel $f(O) = 0 + 0 = 0$,

$$f(A) = 0 + 40 = 40, \quad f(B) = 26\frac{2}{3} + 20 = 46\frac{2}{3},$$

$$f(D) = 20 + 30 = 50 \quad \text{és} \quad f(F) = 33\frac{1}{3} + 0 = 33\frac{1}{3},$$

ezért megállapíthatjuk, hogy a célfüggvény maximumát a D pontban veszi fel, ami azt jelenti, hogy 20 darab első típusú szendvicset és 30 darab második típusú szendvicset kell készíteni.



4. Egy építőipari vállalat kétféle lakóépület kivitelezésére szakosodott: az egyik hagyományos technológiával - téglafalak és vasbeton födémszerkezet építésével, a másik pedig az előregyártás technológiájával - előregyártott vasbeton fal- és födemelemek beépítésével készül. Korlátozó tényezőt jelent a rendelkezésre álló anyag mennyisége, valamint az egyes építkezési technológiák esetén felhasználható normatív anyagmennyiség. A különböző építkezési módszerek esetén felhasználható anyag mennyiségét a következő táblázatban találjuk, ahol T jelöli a tégláépülethez, M pedig a montázsépülethez szükséges anyagmennyiséget, R pedig a rendelkezésre álló anyagmennyiség.

Anyagfajta	T	M	R
betonacél	1 t	2 t	400 t
cement	5 t	8 t	1800 t
faáru	$6 m^2$	$2 m^2$	$1100 m^2$

Hogyan lehet a rendelkezésre álló anyagmennyiséget úgy felhasználni, hogy abból a lehető legtöbb lakóépületet lehessen felépíteni?

Megoldás. Jelöljük a téglából épített épületek számát x -szel, az előregyártott elemekből gyártott épületek számát pedig y -nal. A feladat lineáris programozási modellje a következő:

$$\begin{aligned} x + 2y &\leq 400 \\ 5x + 8y &\leq 1800 \\ 6x + 2y &\leq 1100 \\ x &\geq 0, \quad y \geq 0 \end{aligned}$$

a célfüggvény pedig $f(x, y) = x + y$.

A lehetséges optimális pontok:

$$A(0; 200), \quad B(183,3; 0) \quad \text{és} \quad C(140; 130),$$

amelyeket a megfelelő határegyenesek által alkotott kétismeretlenes egyenletrendszerek megoldásával kapunk meg, mint a határegyenesek metszeteit. Helyettesítsük be a lehetséges optimális pontok koordinátáit a célfüggvénybe. Ekkor

$$f(A) = 0 + 200 = 200, \quad f(B) = 183,3 + 0 = 183,3, \quad f(C) = 140 + 130 = 270.$$

A célfüggvény tehát a C pontban veszi fel legnagyobb értékét, $f_{\max}(140, 130) = 270$. Ez azt jelenti, hogy 140 téglából épült lakóházat és 130 készlemből épített lakóházat tudnak a meglévő anyagmennyiségből építeni, vagyis összesen 270-et.

5. Egy készruhágyár egyik részlegében férfi és női ingeket varrnak. Egy női ing megvarrásához 8 óra szükséges, a férfi ing megvarrásához pedig 5 óra. Egy női inghez felhasznált anyagmennyiség ára 400 dinár, egy férfi inghez felhasznált anyagmennyiség ára pedig 500 dinár. Egy női ing megvarrása 175 dinár tiszta hasznót jelent a gyárnak, egy férfi ing megvarrása pedig 150 dinárt. Az ingek utáni heti kereket legalább 15 női ing és 10 férfi ing megvarrását jelenti. Ebben a gyárrészlegben hetente 320 munkaórát tudnak ingek varrására fordítani. Készítsünk optimális termelési programot a gyárrészleg számára, ha felhasznált anyag nem kerülhet többé 20000 dinárnál.

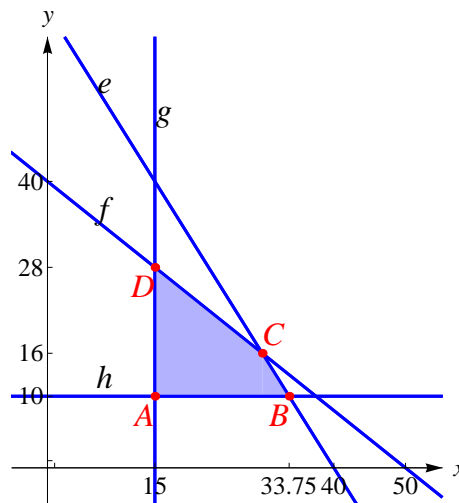
Megoldás. Az optimális termelési program azt jelenti, hogy a megadott feltételek és korlátok mellett a lehető legnagyobb jövedelmet kell megvalósítani. A jövedelmet a célfüggvény fejezi ki. Ha x darab női inget és y darab férfi inget varrnak hetente, akkor a célfüggvény $f(x, y) = 175x + 150y$. Foglalkozunk táblázatba a többi feltételt:

	női ing	férfi ing	anyagmennyiség
munkaóra	8	5	320
anyag ára	400	500	20000
kereset	175	150	

A feladatban megfogalmazott feltételeket a következő egyenlőtlenségrendszerrel tudjuk modellezni:

$$8x + 5y \leq 320, \quad 4x + 5y \leq 200, \quad x \geq 15, \quad y \geq 10,$$

ahol az $f(x, y) = 175x + 150y$ célfüggvény maximumát keressük.



Már korábban kiszámítottuk az egyenlőtlenségrendszer lehetséges optimális pontjait. Ezek a pontok $A(15; 10)$, $B(33, 75; 10)$, $C(30; 16)$ és $D(15; 28)$. Számoljuk ki ezekben a pontokban a célfüggvény értékeit.

$$f(A) = 175 \cdot 15 + 150 \cdot 10 = 4125, \quad f(B) = 175 \cdot 33, 75 + 150 \cdot 10 = 7406, 25,$$

$$f(C) = 175 \cdot 30 + 150 \cdot 16 = 7650, \quad f(D) = 175 \cdot 15 + 150 \cdot 28 = 6825.$$

Mivel a célfüggvény legnagyobb értéke a C pontban veszi fel, ezért megállapíthatjuk, hogy a gyár akkor valósít meg legnagyobb jövedelmet, ha hetente 30 női inget és 16 férfi inget varrnak meg. Ekkor a heti jövedelem 7650 dinár lesz.

5. Hatványozás és gyökvonás

5.1. Természetes és egész kitevőjű hatványok

Korábbi ismert mindannyiunk számára a valós a szám n természetes hatványának definíciója n darab a tényező szorzataként, vagyis minden valós a számra:

$$a \cdot a = a^2, \quad a \cdot a \cdot a = a^3, \quad \dots \quad \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{n\text{-szer}} = a^n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

A valós a szám n természetes hatványának egy precízebb definíciója a következő:

5.1. Definíció. Legyen $a \in \mathbf{R}$. Ekkor minden $n \in \mathbf{N}$ szám esetén:

$$a^1 = a, \quad a^{n+1} = a^n \cdot a.$$

A fenti definíció alapján könnyen bizonyíthatók a következő tételben kimondott hatványozási szabályok.

5.1. Tétel. Legyenek a és b valós, m és n pedig természetes számok. Ekkor érvényesek a következő tulajdonságok:

- 1° $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
- 2° $a^m : a^n = a^{m-n}$, ha $m > n$ és $a \neq 0$;
- 3° $(a^m)^n = a^{mn}$;
- 4° $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$;
- 5° $(a : b)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} = a^m : b^m$, $b \neq 0$;
- 6° $1^m = 1$; $0^m = 0$; $|a^m| = |a|^m$;
- 7° ha $0 \leq a < b$, akkor $a^m < b^m$;
- 8° ha $a > 1$ és $m > n$, akkor $a^m > a^n$;
- 9° ha $0 < a < 1$ és $m > n$, akkor $a^m < a^n$;
- 10° ha $a < 0$, akkor $a^m > 0$ akkor és csak akkor, ha m páros szám.

Bizonyítás. Bemutatjuk az 1° és 7° tulajdonságok bizonyítását. A többi bizonyítás analóg módon történik.

1° Az $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ képletet konkrét m természetes szám esetén $n \in \mathbf{N}$ -re nézve matematikai indukcióval bizonyítjuk.

1. $n = 1$ esetén $a^m \cdot a^1 = a^m \cdot a = a^{m+1}$ következik az 5.1. Definíció definíció alapján.
2. Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$ esetén, vagyis, hogy teljesül, hogy $a^m \cdot a^k = a^{m+k}$.
3. Bizonyítjuk az állítást $n = k + 1$ -re, vagyis azt, hogy teljesül az $a^m \cdot a^{k+1} = a^{m+k+1}$ egyenlőség is. Valóban, $a^{m+k+1} = a^{m+k} \cdot a^1 = (a^m \cdot a^k) \cdot a^1 = a^m \cdot (a^k \cdot a^1) = a^m \cdot a^{k+1}$.
- 7° Ha $0 \leq a < b$, akkor $b - a > 0$ és

$$b^m - a^m = (b - a)(b^{m-1} + b^{m-2}a + \dots + ba^{m-2} + a^{m-1}) > 0,$$

mert $a \geq 0$, $b > 0$ és $b - a > 0$.

Ha viszont $b^m - a^m > 0$, akkor $a^m < b^m$, amit bizonyítanunk kellett. \diamond

A számhalmazokról elmondottak esetében hangsúlyoztuk, hogy a halmazok bővítését mindig úgy végezzük, hogy az előző halmaz esetében kimondott tulajdonságok és szabályok továbbra is érvényben maradjanak. Az 5.1. Tétel tétel 2^o tulajdonságában az $m > n$ feltételt elhagyva, $m = n \in \mathbf{N}$ esetében

$$a^m : a^m = a^{m-m} = a^0, \quad \text{illetve} \quad a^m : a^m = \frac{a^m}{a^m} = 1, \quad a \in \mathbf{R} \setminus \{0\},$$

az eredmény. Ebből a két eredményből következtetünk arra, hogy

$$a^0 = 1, \quad a \neq 0 \quad \text{kell legyen.}$$

Ha most szintén a 2^o tulajdonságban $m = 0$, $n \in \mathbf{N}$ és $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, akkor egyfelől

$$a^0 : a^m = a^{0-m} = a^{-m}, \quad \text{másfelől pedig} \quad a^0 : a^n = 1 : a^n = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

az eredmény. Ebből a két eredményből következtetünk arra, hogy

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n.$$

Ez azt jelenti, hogy ha a természetes kitevők esetében kimondott tulajdonságokat megőrizve ki akarjuk bővíteni a hatványkitevők halmazát negatív egész számokra és a nullára is, akkor ezt a következő két definícióval adhatjuk meg pontosan:

5.2. Definíció. Ha $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, akkor $a^0 = 1$.

5.3. Definíció. Ha $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ és $n \in \mathbf{N}$, akkor $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Az 5.1. Tétel-ben foglalt tulajdonságok érvényesek a nulla és negatív egész kitevők esetében is. Néhány esetben a bizonyítást is bemutatjuk.

Ha például $m = 0$ és $n \in \mathbf{N}$, akkor:

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= a^0 \cdot a^n = 1 \cdot a^n = a^n = a^{0+n} = a^{m+n}, \\ a^m a^n &= a^0 : a^n = 1 : a^n = \frac{1}{a^n} = a^{-n} = a^{0-n} = a^{m-n}, \\ (a^m)^n &= (a^0)^n = 1^n = 1 = a^0 = a^{0 \cdot n} = a^{mn}, \\ (a \cdot b)^m &= (a \cdot b)^0 = 1 = 1 \cdot 1 = a^0 \cdot b^0 = a^m \cdot b^m, \\ \left(\frac{a}{b}\right)^m &= \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1 = \frac{1}{1} = \frac{a^0}{b^0} = \frac{a^m}{b^m}. \end{aligned}$$

Ha pedig $m = -k$, $k \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}$ és például $n > k$, akkor:

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= a^{-k} \cdot a^n = \frac{1}{a^k} \cdot a^n = \frac{a^n}{a^k} = a^{n-k} = a^{-k+n} = a^{m+n}, \\ a^m : a^n &= a^{-k} : a^n = \frac{1}{a^k} : a^n = \frac{1}{a^k} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^k \cdot a^n} = \frac{1}{a^{k+n}} = a^{-k-n} = a^{m-n}, \\ (a^m)^n &= (a^{-k})^n = \left(\frac{1}{a^k}\right)^n = \frac{1^n}{(a^k)^n} = \frac{1}{a^{kn}} = a^{-kn} = a^{mn}, \\ (a \cdot b)^m &= (a \cdot b)^{-k} = \frac{1}{(a \cdot b)^k} = \frac{1}{a^k \cdot b^k} = \frac{1}{a^k} \cdot \frac{1}{b^k} = a^{-k} \cdot b^{-k} = a^m \cdot b^m, \\ \left(\frac{a}{b}\right)^m &= \left(\frac{a}{b}\right)^{-k} = \left(\frac{b}{a}\right)^k = \frac{b^k}{a^k} = \left(\frac{1}{a}\right)^k \cdot b^k = a^{-k} \cdot \frac{1}{b^{-k}} = \frac{a^{-k}}{b^{-k}} = \frac{a^m}{b^m}. \end{aligned}$$

5.1. Példa. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő negatív kitevőjű hatványokat az 5.1. Definíció és az 5.1. Tétel segítségével.

- a) $(5^{-3}) \cdot (5^{-1})^{-3} \cdot 5^0 = 5^{-3} \cdot 5^3 \cdot 5^0 = 5^{-3+3+0} = 5^0 = 1;$
b) $a^{2m} \cdot a^{-n} \cdot a^{n-2m} \cdot a^0 = a^{2m-n+n-2m+0} = a^0 = 1, m, n \in \mathbf{N};$
c) $(b^{-4} \cdot b^3)^{-1} : (b^{-5} : b^{-4})^{-1} = (b^{-4+3})^{-1} : (b^{-5+4})^{-1} = (b^{-1})^{-1} : (b^{-1})^{-1} = b : b = 1;$
d) $\left(\frac{a^{-3} \cdot b^3}{9}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{3}{a^{-2} \cdot b^2}\right)^{-3} = \frac{a^6 \cdot b^{-6}}{3^{-4}} \cdot \frac{3^{-3}}{a^6 \cdot b^{-6}} = \frac{3^4}{3^3} = 3^{4-3} = 3.$

5.2. Példa. Hozzuk egyszerűbb alakra a $(-1)^{2n} + (-1)^{2n+1} - (-1)^{2n+2} + (-1)^{2n+3}$ hatványkifejezést, ha $n \in \mathbf{Z}$. Mivel tudjuk, hogy

$$(-1)^k = \begin{cases} 1, & \text{ha } k \text{ páros egész szám;} \\ -1, & \text{ha } k \text{ páratlan egész szám,} \end{cases}$$

ezért $(-1)^{2n} = 1$, mivel $2n$ páros szám. Ekkor

$$\begin{aligned} & (-1)^{2n} + (-1)^{2n+1} - (-1)^{2n+2} + (-1)^{2n+3} = \\ & = (-1)^{2n} + (-1)^{2n} \cdot (-1) - (-1)^{2n} \cdot (-1)^2 + (-1)^{2n} \cdot (-1)^3 = \\ & = 1 + 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 1 - 1 - 1 - 1 = -2. \end{aligned}$$

5.3. Példa. Hozzuk a legegyszerűbb alakra az $A = \left[\left(\frac{4x^{-3}}{2y^{-2}} \right)^{-3} : \left(\frac{16x^{-1}}{2y^{-3}} \right)^{-2} \right] \cdot \frac{x^{-6}y}{8}$ kifejezést, ha $x \neq 0$ és $y \neq 0$.

$$\begin{aligned} A &= \left[\left(\frac{4x^{-3}}{2y^{-2}} \right)^{-3} : \left(\frac{16x^{-1}}{2y^{-3}} \right)^{-2} \right] \cdot \frac{x^{-6}y}{8} = \left(\frac{4^{-3}x^9}{2^{-3}y^6} : \frac{16^{-2}x^2}{2^{-2}y^6} \right) \cdot \frac{y}{8x^6} = \\ &= \left(\frac{2^3x^9}{4^3y^6} : \frac{2^2x^2}{16^2y^6} \right) \cdot \frac{y}{8x^6} = \frac{x^9 \cdot y^7}{x^8 \cdot y^6} = xy. \end{aligned}$$

5.4. Példa. Hozzuk a legegyszerűbb alakra a $\left(\frac{\sqrt{2}}{(1-x^2)^{-1}} + \frac{2\sqrt{2}}{x^{-2}} \right) : \left(\frac{x^{-2}}{1+x^{-2}} \right)^{-1}$ kifejezést, ha $x \neq 0$ és $x \neq \pm 1$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{2}}{(1-x^2)^{-1}} + \frac{2\sqrt{2}}{x^{-2}} \right) : \left(\frac{x^{-2}}{1+x^{-2}} \right)^{-1} &= \left(\sqrt{2}(1-x^2) + 2\sqrt{2}x^2 \right) : \frac{1+x^{-2}}{x^{-2}} \\ &= \left(\sqrt{2} - \sqrt{2}x^2 + 2\sqrt{2}x^2 \right) \cdot \frac{x^{-2}}{1+x^{-2}} \\ &= \left(\sqrt{2} + \sqrt{2}x^2 \right) \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} \\ &= \sqrt{2}(1+x^2) \cdot \frac{1}{1+x^2} \\ &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

5.5. Példa. Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra az

$$A = \left(\frac{b^{-1} + a^{-1}}{ab^{-1} + ba^{-1}} \right)^{-1} + \left(\frac{a^{-1} + b^{-1}}{2} \right)^{-1} - \frac{b^{-1} - a^{-1}}{a^{-1} \cdot b^{-1}}$$

kifejezést, ha $a \neq 0$, $b \neq 0$ és $a + b \neq 0$.

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{b^{-1} + a^{-1}}{ab^{-1} + ba^{-1}} \right)^{-1} + \left(\frac{a^{-1} + b^{-1}}{2} \right)^{-1} - \frac{b^{-1} - a^{-1}}{a^{-1} \cdot b^{-1}} \\ &= \frac{ab^{-1} + ba^{-1}}{b^{-1} + a^{-1}} + \frac{2}{a^{-1} + b^{-1}} - \frac{b^{-1} - a^{-1}}{a^{-1} \cdot b^{-1}} \\ &= \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{\frac{1}{b} + \frac{1}{a}} + \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} - \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} = \frac{\frac{a^2 + b^2}{ab}}{\frac{a + b}{ab}} + \frac{2}{\frac{a + b}{ab}} - \frac{\frac{a - b}{ab}}{\frac{1}{ab}} \\ &= \frac{a^2 + b^2}{a + b} + \frac{2ab}{a + b} - (a - b) = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a + b} - a + b \\ &= \frac{(a + b)^2}{a + b} - a + b = a + b - a + b = 2b. \end{aligned}$$

5.6. Példa. Hozzuk a legegyszerűbb alakra az $\frac{a^n + a^{-n} - 1}{a^n + a^{-2n}} - \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n} + 2}$ kifejezést, ha $a \neq 0$ és $a \neq -1$ pozitív valós szám, valamint $n \in \mathbf{Z}$.

$$\begin{aligned} \frac{a^n + a^{-n} - 1}{a^n + a^{-2n}} - \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n} + 2} &= \frac{a^n + \frac{1}{a^n} - 1}{a^n + \frac{1}{a^{2n}}} - \frac{a^n - \frac{1}{a^n}}{a^n + \frac{1}{a^n} + 2} \\ &= \frac{\frac{a^{2n} - a^n + 1}{a^{2n}}}{\frac{a^{3n} + 1}{a^{2n}}} - \frac{\frac{a^{2n} - 1}{a^{2n}}}{\frac{a^{2n} + 2a^n + 1}{a^n}} \\ &= \frac{a^n (a^{2n} - a^n + 1)}{(a^n + 1)(a^{2n} - a^n + 1)} - \frac{(a^n - 1)(a^n + 1)}{(a^n + 1)^2} \\ &= \frac{a^n}{a^n + 1} - \frac{a^n - 1}{a^n + 1} \\ &= \frac{a^n - a^n + 1}{a^n + 1} = \frac{1}{a^n + 1}. \end{aligned}$$

5.2. A gyökvonás fogalma és műveleti szabályai

5.2.1. A gyök fogalma és jelentése

A matematikában a problémák megoldásakor gyakran kerülünk olyan helyzetbe, hogy egy összefüggésből, mint például a derékszögű háromszög a és b befogóira és c átfogójára vonatkozó $a^2 + b^2 = c^2$ összefüggésből, ki kell fejezni valamelyik oldalt. Ezt az átfogó esetén a $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ gyökös kifejezéssel tehetjük meg. A következőkben az a valós szám „ n -edik” gyökének ($n \in \mathbf{N}$) fogalmával ismerkedünk meg.

Figyeljük meg az

$$x^n = a, \quad n \in \mathbf{N}, \quad a \in \mathbf{R}$$

egyenletet, és vizsgáljuk meg a megoldások száma szempontjából. Például az $x^2 = 9$ egyenletnek két megoldása van, $x_1 = 3$ és $x_2 = -3$. Az $x^3 = -27$ egyenletnek csak egy megoldása van, az $x_1 = -3$. Az $x^5 = 0$ egyenletnek is csak egy megoldása van, az $x_1 = 0$, míg az $x^{2k} = -1$ egyenletnek nincs egy megoldása sem, mert $x^{2k} \geq 0$ minden $x \in \mathbf{R}$ szám esetén, s így nem lehet -1 -gyel egyenlő.

A gyök fogalmának definiálása szempontjából nagyon fontos tisztázni a következőket:

1° Az $x^n = a$ egyenletnek $a > 0$ valós szám és $n = 2k \in \mathbf{N}$, azaz páros természetes kitevő esetén pontosan két különböző valós megoldása van, $a \geq 0$ valós szám és $n = 2k + 1 \in \mathbf{N}$, vagyis páratlan természetes kitevő esetén pedig pontosan egy valós megoldása van.

2° Az $x^n = a$ egyenletnek $a = 0$ esetén pontosan egy valós megoldása van és ez az $x = 0$.

3° Az $x^n = a$ egyenletnek $a < 0$ valós szám és $n = 2k \in \mathbf{N}$, azaz páros természetes kitevő esetén nincs valós megoldása, $a < 0$ valós szám és $n = 2k + 1 \in \mathbf{N}$, vagyis páratlan természetes kitevő esetén viszont pontosan egy valós megoldása van.

5.7. Példa. Mutassuk meg, hogy az $x^3 = a$ egyenletnek pontosan egy valós megoldása van. Tegyük fel, hogy van két különböző x és y valós megoldás. Ekkor $x^3 = a$ és $y^3 = a$, s ezért $x^3 = y^3$, illetve $x^3 - y^3 = 0$. Bontsuk fel a kapott egyenlet bal oldalát, mint köbök különbségét. Ekkor $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 0$, amely csak $x - y = 0$ vagy $x^2 + xy + y^2 = 0$ esetén lehetséges. Mivel $x^2 + xy + y^2 = \left(x^2 + xy + \frac{y^2}{4}\right) + \frac{3}{4}y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0$, kivéve az $x = y = 0$ esetet, így szükségszerűen $x - y = 0$, ahonnan $x = y$ (ebbe a megoldásba az $x = y = 0$ is beletartozhat), vagyis az egyenletnek valóban egy megoldása van.

Az $x^n = a$ egyenlet megoldásainak jelölésére a „gyök” szimbólumot használjuk. Mivel minden szimbólummal egy meghatározott értéket kell jelölnünk, így a gyök definíciójában is ügyelnünk kell erre, s ennek a követelménynek megfelelően vezetjük be az új fogalmat.

5.4. Definíció. Legyen $n \in \mathbf{N}$ és $a \in \mathbf{R}$. Az $\sqrt[n]{a}$ (olvasd: „ n -edik gyök a ”) szimbólum a következőket jelöli:

1° az $x^n = a$ egyenlet egyértelmű megoldását, ha n páratlan szám;

2° az $x^n = a$ egyenlet pozitív megoldását, ha n páros szám;

3° $\sqrt[n]{0} = 0$.

Megegyezés szerint a $\sqrt[n]{}$ jel helyett a $\sqrt{}$ szimbólumot használjuk.

5.8. Példa. A definíció értelmében:

$$\sqrt[3]{27} = 3, \quad \text{mert} \quad 3^3 = 27, \quad \sqrt[3]{-27} = -3, \quad \text{mert} \quad (-3)^3 = -27,$$

$$\sqrt[4]{16} = 2, \quad \text{mert} \quad 2^4 = 16 \quad \text{és a} \quad \sqrt[4]{16} \quad \text{a pozitív megoldást jelöli,}$$

$$\sqrt[5]{-\frac{1}{32}} = -\frac{1}{2}, \quad \text{mert} \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{32}, \quad \sqrt[12]{0} = 0, \quad \text{mert} \quad 0^{12} = 0,$$

$$\sqrt{25} = 5 \quad \text{és} \quad -\sqrt{25} = -5, \quad \text{mert} \quad 5^2 = 25.$$

Jegyezzük meg, hogy a definícióra való tekintettel, helytelen a $\sqrt{25} = \pm 5$ írása, mert a $\sqrt{25}$ csak a pozitív gyököt jelöli.

5.9. Példa. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $x \in \mathbf{R}$ esetén

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Először megállapíthatjuk, hogy $(|x|)^2 = x^2$ és ugyanúgy $(-|x|)^2 = x^2$. Mivel a definíció szerint $\sqrt{x^2}$ az x^2 szám pozitív gyökét jelöli, így $x < 0$ esetén nem lenne helyes a $\sqrt{x^2} = x$ írása, viszont $\sqrt{x^2} = |x|$ mindenféleképpen a pozitív gyököt jelenti.

Általában is érvényes, hogy tetszőleges $x \in \mathbf{R}$ esetén

$$\sqrt[n]{x^{2n}} = |x|, \quad n \in \mathbf{N}.$$

5.10. Példa. Számítsuk ki mennyi a $\sqrt{2\frac{1}{4}} + \sqrt[3]{-125} - \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^4} + \sqrt[5]{32}$ gyökös kifejezés számértéke.

$$\sqrt{2\frac{1}{4}} + \sqrt[3]{-125} - \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^4} + \sqrt[5]{32} = \sqrt{\frac{9}{4}} + (-5) - \sqrt[4]{\frac{1}{16}} + 2 = \frac{3}{2} - 5 - \frac{1}{2} + 2 = -2.$$

5.11. Példa. Hozzuk a legegyszerűbb alakra a következő kifejezéseket a megadott feltételek mellett.

a) $a \neq -1$, $\sqrt{\frac{(-3)^2}{(a+1)^4}} = \sqrt{\left(\frac{-3}{(a+1)^2}\right)^2} = \left|\frac{-3}{(a+1)^2}\right| = \frac{3}{(a+1)^2}.$

b) $y \leq 0$, $\sqrt{81x^4y^2} = \sqrt{(9x^2y)^2} = |9x^2y| = 9x^2|y| = -9x^2y.$

c) $y \geq 0$, $\sqrt{64x^8y^6} = \sqrt{(8x^4y^3)^2} = |8x^4y^3| = 8x^4y^2|y| = -8x^4y^2y = -8x^4y^3.$

5.2.2. Műveletek a gyökökkel

Mivel a definíció szerint $\sqrt[n]{a}$ egy olyan szám, amelynek n -edik hatványa a -val egyenlő, így magából a definícióból közvetlenül következik, hogy érvényes a következő tétel.

5.2. Tétel. Ha $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$ és $\sqrt[n]{a}$ létezik, akkor

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

5.3. Tétel. Ha $a \in \mathbf{R}$ és $n \in \mathbf{N}$, akkor

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ |a|, & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases}$$

Bizonyítás. Ha n páratlan szám, akkor az $\sqrt[n]{a^n} = a$ közvetlenül a definícióból származik. Ha n páros szám, akkor a^n mindenképpen pozitív szám ($n = 2k$ esetén $a^n = a^{2k} > 0$), s ennek pozitív gyöke vagy a vagy $-a$, s ez csakis az a szám előjelétől függ, méghozzá a következőképpen:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{ha } a \geq 0, \\ -a, & \text{ha } a < 0, \end{cases}$$

vagyis írhatjuk, hogy $\sqrt[n]{a^n} = |a|$. \diamond

5.12. Példa. Számoljuk ki a következő számkifejezések értékét.

a) $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$ vagy $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$.

b) $\sqrt[3]{(-3)^6} = \sqrt[3]{((-3)^2)^3} = (-3)^2 = 9$.

c) $(\sqrt[3]{-3})^6 = \left((\sqrt[3]{-3})^3\right)^2 = (-3)^2 = 9$.

5.13. Példa. Az x változó mely értékeire igazak a következő egyenlőségek?

a) $\sqrt{x^2} = x$ akkor és csakis akkor, ha $|x| = x$, vagyis az egyenlőség minden nemnegatív valós számra érvényes, a megoldás tehát $x \geq 0$.

b) $\sqrt{x^2} = -x$ akkor és csakis akkor, ha $|x| = -x$, vagyis az egyenlőség minden nempozitív valós számra érvényes, a megoldás tehát $x \leq 0$.

c) $\sqrt{x^4} = -x^2$ akkor és csakis akkor, ha $\sqrt{(x^2)^2} = -x^2$ akkor és csakis akkor, ha $x^2 = -x^2$, vagyis az egyenlőség csak $x = 0$ esetén érvényes.

5.4. Tétel. Ha $a \geq 0$, $b \geq 0$ és $n \in \mathbf{N}$, akkor érvényes, hogy

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

Bizonyítás. A bizonyításban felhasználjuk azt a tényt, hogy nemnegatív valós a és b számok esetén

$$a^n = b^n \quad \text{akkor és csakis akkor, ha} \quad a = b. \quad (5.1)$$

Egyrészt igaz, hogy

$$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = a \cdot b,$$

másrészt pedig

$$\left(\sqrt[n]{a \cdot b}\right)^n = a \cdot b,$$

ami azt jelenti, hogy

$$\left(\sqrt[n]{a \cdot b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n,$$

illetve az említett ekvivalencia alapján $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$. \diamond

5.14. Példa. Számítsuk ki mennyivel egyenlő a $\sqrt{1,44 \cdot 0,0016 \cdot 900}$ számkifejezés értéke. Az előző képlet alapján

$$\sqrt{1,44 \cdot 0,0016 \cdot 900} = \sqrt{1,44} \cdot \sqrt{0,0016} \cdot \sqrt{900} = 1,2 \cdot 0,04 \cdot 30 = 1,44.$$

5.5. Tétel. Ha $a \geq 0$, $b > 0$ és $n \in \mathbf{N}$, akkor érvényes, hogy

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Bizonyítás. Mivel

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}, \quad \text{és ugyanakkor} \quad \left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n = \frac{a}{b},$$

így az 5.1 ekvivalencia alapján következik, hogy

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n, \quad \text{illetve} \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

\diamond

5.15. Példa. Számítsuk ki mennyivel egyenlő a $\sqrt{2 + \frac{7}{81}}$ és $\frac{\sqrt[3]{-56}}{\sqrt[3]{7}}$ számkifejezések értéke.

$$\sqrt{2 + \frac{7}{81}} = \sqrt{\frac{169}{81}} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{81}} = \frac{13}{9} \quad \text{és} \quad \frac{\sqrt[3]{-56}}{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[3]{\frac{-56}{7}} = \sqrt[3]{-8} = -2.$$

5.6. Tétel. Ha $a \geq 0$, $b > 0$ és $n \in \mathbf{N}$, akkor érvényes, hogy

$$1^o \quad (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}; \quad 2^o \quad \sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m}; \quad 3^o \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}.$$

Bizonyítás.

1^o Mivel $[(\sqrt[n]{a})^m]^n = (\sqrt[n]{a})^{mn} = [(\sqrt[n]{a})^n]^m = a^m$ és $(\sqrt[n]{a^m})^n = a^m$, így az

$$[(\sqrt[n]{a})^m]^n = (\sqrt[n]{a^m})^n \quad \text{összefüggésből következik, hogy} \quad (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

2^o Mivel $[\sqrt[n]{a}]^n = a$ és $(\sqrt[nm]{a^m})^n = \sqrt[nm]{(a^m)^n} = \sqrt[nm]{a^{mn}} = a$, így az

$$[\sqrt[n]{a}]^n = (\sqrt[nm]{a^m})^n \quad \text{összefüggésből következik, hogy} \quad \sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m}.$$

3^o Mivel $\left[\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right]^n = \sqrt[n]{(\sqrt[m]{a})^n} = \sqrt[n]{a}^m$ és $(\sqrt[nm]{a})^n = \sqrt[nm]{a^n} = \sqrt[n]{a}^m$, így az

$$\left[\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right]^n = (\sqrt[nm]{a})^n \quad \text{összefüggésből következik, hogy} \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}.$$

◇

5.16. Példa. Számoljuk ki az $A = \sqrt[3]{\sqrt[4]{5}} : \sqrt[6]{\sqrt[4]{5}}$ gyökös számkifejezés értékét. Alkalmazzuk az előző tétel szabályait. Ekkor

$$A = \sqrt[3]{\sqrt[4]{5}} : \sqrt[6]{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[3 \cdot 2]{\sqrt[4]{5}} : \sqrt[6 \cdot 4]{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[6]{\sqrt[4]{5}} : \sqrt[24]{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[24]{5} : \sqrt[24]{5} = 1.$$

5.7. Tétel. Ha $a \geq 0$, $b > 0$ és $n \in \mathbf{N}$, akkor érvényes, hogy

$$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}.$$

Bizonyítás. Az eddig bebizonyított állítások alapján felírható, hogy

$$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}.$$

◇

Megjegyezzük, hogy ha n páratlan szám, akkor a tétel állítása érvényes minden $a, b \in \mathbf{R}$ szám esetén.

5.17. Példa. Az előző tétel alapján például felírható, hogy

$$\sqrt{28} = \sqrt{4 \cdot 7} = \sqrt{2^2 \cdot 7} = 2\sqrt{7}, \quad \sqrt[3]{-40} = \sqrt[3]{-8 \cdot 5} = \sqrt[3]{(-2)^3 \cdot 5} = -2\sqrt[3]{5},$$

$$\text{illetve, hogy } \sqrt[3]{16x^3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2x^3} = 2x\sqrt[3]{2}.$$

5.8. Tétel. Ha $A \geq 0$, $B \geq 0$ és $A^2 \geq B$, akkor érvényes a

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$$

képlet, melyet „Lagrange-azonosságnak” szokás nevezni.

Bizonyítás. Vezessük be az $x = \sqrt{A + \sqrt{B}} + \sqrt{A - \sqrt{B}}$ jelölést. Megállapíthatjuk, hogy $x \geq 0$. Ekkor

$$x^2 = A + \sqrt{B} + A - \sqrt{B} + 2\sqrt{(A + \sqrt{B})(A - \sqrt{B})},$$

illetve

$$x^2 = 2A + 2\sqrt{A^2 - B} = 2 \left(A + \sqrt{A^2 - B} \right) = 4 \cdot \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2},$$

innen pedig

$$x = 2\sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}}, \quad \text{ezért} \quad \sqrt{A + \sqrt{B}} + \sqrt{A - \sqrt{B}} = 2\sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

Hasonló módon kapjuk meg, hogy

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} - \sqrt{A - \sqrt{B}} = 2\sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

Az utolsó két azonosság összeadásával és kivonásával adódnak a

$$2\sqrt{A + \sqrt{B}} = 2 \left(\sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}} \right),$$

illetve

$$2\sqrt{A - \sqrt{B}} = 2 \left(\sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} - \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}} \right)$$

képletek, amelyeket 2-vel elosztva megkapjuk a kívánt Lagrange-azonosságokat, melyek szerint

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}} \quad \text{és}$$

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} - \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

◇

5.18. Példa. Számítsuk ki a Lagrange-azonosságok alkalmazásával, hogy mivel egyenlő $\sqrt{6 + \sqrt{11}} - \sqrt{6 - \sqrt{11}}$. Ekkor

$$\sqrt{6 + \sqrt{11}} = \sqrt{\frac{6 + \sqrt{36 - 11}}{2}} + \sqrt{\frac{6 - \sqrt{36 - 11}}{2}} = \sqrt{\frac{6 + 5}{2}} + \sqrt{\frac{6 - 5}{2}} = \sqrt{\frac{11}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$\sqrt{6 - \sqrt{11}} = \sqrt{\frac{6 + \sqrt{36 - 11}}{2}} - \sqrt{\frac{6 - \sqrt{36 - 11}}{2}} = \sqrt{\frac{6 + 5}{2}} - \sqrt{\frac{6 - 5}{2}} = \sqrt{\frac{11}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}},$$

s így kivonva egymásból a két kifejezést következik, hogy

$$\sqrt{6 + \sqrt{11}} - \sqrt{6 - \sqrt{11}} = \sqrt{\frac{11}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{11}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

5.2.3. Gyöktelenítés

A gyökös kifejezésekkel való számítások megkönnyítése céljából sok esetben törekszünk arra, hogy egy tört számlálójából vagy nevezőjéből eltüntessük vagy áthelyezzük a gyököket. Az átalakítások ilyen folyamatát nevezzük *gyöktelenítésnek*. A gyöktelenítés vonatkozhat a számlálóra vagy a nevezőre, vagy akár egy nem tört kifejezésre is.

A nevező gyöktelenítésének három legegyszerűbb esetét a következő példákon keresztül mutatjuk meg:

$$1^\circ \frac{1}{\sqrt{a}}, \quad a > 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}.$$

$$2^\circ \frac{1}{\sqrt[3]{a}}, \quad a \neq 0$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}} \cdot \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}}{a}.$$

$$3^\circ \frac{1}{\sqrt[n]{a}}, \quad a > 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \cdot \frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{a^{n-1}}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a}.$$

Valamivel összetettebb az eljárás akkor, ha a nevezőben irracionális számok összege vagy különbsége szerepel. Ekkor arra törekszünk, hogy négyzetek különbségére bővítsük a nevezőt vagy a számlálót. Ezt az esetet mutatja be a következő két példa.

$$4^\circ \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad a \neq b.$$

$$\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}.$$

$$5^\circ \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0.$$

$$\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} \cdot \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{a - b}{2(\sqrt{a} - \sqrt{b})}.$$

Az előző két példát az $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ négyzetek különbsége képletnek megfelelő

$$a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

azonosság alapján gyöktelenítettük.

Hasonlóan felírható az $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ köbök különbsége képletnek megfelelő

$$a - b = (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})$$

azonosság. Ekkor már újabb négy típusú gyökös kifejezést tudunk gyökteleníteni.

$$6^\circ \frac{1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}, \quad a \neq b.$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} \cdot \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{a - b}.$$

$$7^\circ \frac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}, \quad a \neq -b.$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} \cdot \frac{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{a + b}.$$

$$8^\circ \frac{1}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}, \quad ab \neq b.$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}{a - b}.$$

$$9^\circ \frac{1}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}, \quad ab \neq b.$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}{a + b}.$$

Végül fennáll a gyöktelenítés lehetősége a következő általános esetben is:

$$10^\circ \frac{1}{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}}, \quad a \neq b.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}} &= \frac{1}{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}} \cdot \frac{\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \sqrt[n]{a^{n-3}b^2} + \dots + \sqrt[n]{ab^{n-2}} + \sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{a^{n-3}b^2} + \dots + \sqrt[n]{ab^{n-2}} + \sqrt[n]{b^{n-1}}} \\ &= \frac{\sqrt[n]{a^{n-3}b^2} + \dots + \sqrt[n]{ab^{n-2}} + \sqrt[n]{b^{n-1}}}{a - b}. \end{aligned}$$

5.19. Példa. Végezzük el a következő irracionális nevezők vagy számlálók gyöktelenítését.

$$\text{a) } \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}; \quad \text{b) } \frac{1}{\sqrt[3]{7}} = \frac{1}{\sqrt[3]{7}} \cdot \frac{\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7^2}} = \frac{\sqrt[3]{49}}{7};$$

$$\text{c) } \frac{\sqrt[3]{4}}{2} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{2} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2}{2\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}};$$

$$\text{d) } \frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} = \frac{4(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{7-3} = \sqrt{7}+\sqrt{3};$$

$$\text{e) } \frac{\sqrt{13}-1}{4} = \frac{\sqrt{13}-1}{4} \cdot \frac{\sqrt{13}+1}{\sqrt{13}+1} = \frac{13-1}{4(\sqrt{13}+1)} = \frac{3}{\sqrt{13}+1};$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \frac{18}{\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{4}} &= \frac{18}{\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{\sqrt[3]{10^2}+\sqrt[3]{10 \cdot 4}+\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{10^2}+\sqrt[3]{10 \cdot 4}+\sqrt[3]{4^2}} = \\ &= \frac{18(\sqrt[3]{10^2}+\sqrt[3]{10 \cdot 4}+\sqrt[3]{4^2})}{10-4} = 3(\sqrt[3]{100}+\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{16}); \end{aligned}$$

$$\text{g) } \frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}{5} = \frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}{5} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}} = \frac{2+3}{5(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3})} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}};$$

$$\begin{aligned} \text{h) } \frac{2\sqrt{30}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}} &= \frac{2\sqrt{30}}{(\sqrt{5}+\sqrt{6})+\sqrt{7}} \cdot \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{6})-\sqrt{7}}{(\sqrt{5}+\sqrt{6})-\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{30}(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7})}{5+2\sqrt{30}+6-7} \\ &= \frac{\sqrt{30}(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7})}{2+\sqrt{30}} \cdot \frac{2-\sqrt{30}}{2-\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}(2-\sqrt{30})(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7})}{4-30} = \\ &= \frac{(2\sqrt{30}-30)(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7})}{-26} = \frac{(15-\sqrt{30})(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7})}{13}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i) } \frac{1}{2+\sqrt{5}+2\sqrt{2}+\sqrt{10}} &= \frac{1}{(2+\sqrt{5})+\sqrt{2}(2+\sqrt{5})} = \frac{1}{(2+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})} = \\ &= \frac{1}{(2+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})} \cdot \frac{2-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{(2-\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}{(4-5)(1-2)} = (2-\sqrt{5})(1-\sqrt{5}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{j) } \frac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3-\sqrt{2}-\sqrt{3}} &= \frac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(3-\sqrt{2})-\sqrt{3}} \cdot \frac{(3-\sqrt{2})+\sqrt{3}}{(3-\sqrt{2})+\sqrt{3}} = \frac{(3+\sqrt{2}+\sqrt{3})(3-\sqrt{2}+\sqrt{3})}{9-6\sqrt{2}+2-3} = \\ &= \frac{(3+\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}{8-6\sqrt{2}} = \frac{10+6\sqrt{3}}{2(4-3\sqrt{2})} = \frac{5+3\sqrt{3}}{4-3\sqrt{2}} \cdot \frac{4+3\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}} = \frac{(5+3\sqrt{3})(4-3\sqrt{2})}{-2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{k) } \frac{1}{2+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}} &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2 \cdot 1}+\sqrt[3]{1^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2 \cdot 1}+\sqrt[3]{1^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{1}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}-1}{2-1} = \frac{2-\sqrt[3]{4}}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{l) } \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}} &= \frac{1}{\sqrt[6]{2^3}+\sqrt[6]{3^2}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2^3}+\sqrt[6]{3^2}} \cdot \frac{\sqrt[6]{2^3}-\sqrt[6]{3^2}}{\sqrt[6]{2^3}-\sqrt[6]{3^2}} = \frac{\sqrt[6]{8}-\sqrt[6]{9}}{\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{9}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{9}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{9}} \cdot \frac{\sqrt[3]{8^2}+\sqrt[3]{8 \cdot 9}+\sqrt[3]{9^2}}{\sqrt[3]{8^2}+\sqrt[3]{8 \cdot 9}+\sqrt[3]{9^2}} = (\sqrt[3]{3}-\sqrt{2})(4+2\sqrt[3]{9}+3\sqrt[3]{3}). \end{aligned}$$

5.2.4. Racionális kitevőjű hatványok

A racionális kitevőjű vagy törtkitevőjű hatványok esetében a hatványkitevő halmazát az egész számokról bővítjük a törtszámokra is. A törtkitevőjű hatványok értelmezésénél ugyanúgy arra törekszünk, mint az egész kitevőjű hatványok bevezetésénél, hogy a már eddig bebizonyított műveleti szabályok továbbra is érvényben maradjanak.

Ez például azt jelenti, hogy az $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ szabály miatt

$$\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3^{\frac{1}{2} \cdot 2} = 3^1 = 3 \quad \text{és} \quad \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 2^{\frac{1}{3} \cdot 3} = 2^1 = 2,$$

$$\text{vagy például} \quad \left(27^{-\frac{1}{3}}\right)^3 = 2^{-\frac{1}{3} \cdot 3} = 27^{-1} = \frac{1}{27} \quad \text{kell legyen.}$$

Először azt fogjuk megmutatni, hogy egy a valós szám tetszőleges $\frac{m}{n}$ racionális hatványa csak akkor értelmezett, ha $a > 0$. Ekkor $a^{\frac{m}{n}}$ szintén pozitív szám. Ha $\frac{m}{n}$ nullától különböző racionális szám, akkor $\frac{1}{2}$, $-\frac{m}{n}$ és $\frac{m}{2n}$ is racionális számok és $a > 0$ esetén igaz, hogy

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{2n} \cdot 2} = \left(a^{\frac{m}{2n}}\right)^2 \geq 0,$$

s mivel $a^{\frac{m}{n}} \neq 0$, így $a^{\frac{m}{n}} > 0$. Továbbá

$$a = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m}} = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{n}{m}} > 0.$$

Most azt a szükséges feltételt fogjuk megvizsgálni, amelyet az $a^{\frac{m}{n}}$ hatványnak ki kell elégítenie ahhoz, hogy a hatványozási szabályok $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$ racionális hatvány esetén is megőrződjenek. Mivel egyrészt

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n} = a^m, \quad \text{másképp pedig} \quad \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n = a^m,$$

így kimondható a következő definíció:

5.5. Definíció. Ha $a > 0$, $m \in \mathbf{Z}$ és $n \in \mathbf{N}$, akkor $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

5.20. Példa. Számítsuk ki a következő törtkitevőjű hatványok értékeit.

a) $4^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{\frac{1}{2}} = 2^{2 \cdot \frac{1}{2}} = 2^1 = 2$ vagy $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$.

b) $\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\left(\frac{1}{4}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{3 \cdot \frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{1}{4}$ vagy $\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{4}$.

c) $(-0,001)^{-\frac{1}{3}} = ((-0,1)^3)^{-\frac{1}{3}} = (-0,1)^{-1} = \left(-\frac{1}{10}\right)^{-1} = -10$

vagy $(-0,001)^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{-1}{1000}\right)^{-1}} = \sqrt[3]{-1000} = -10$.

5.21. Példa. Ha $x > 0$ és $y > 0$, akkor írjuk fel gyökök segítségével a következő racionális kitevőjű hatványokat.

$$\text{a) } 3^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}}.$$

$$\text{b) } x^{-\frac{3}{4}} \cdot y^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x^{-3}} \cdot \sqrt[4]{y} = \sqrt[4]{x^{-3}y} = \sqrt[4]{\frac{y}{x^3}}.$$

$$\text{c) } \frac{(-1)^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}}}{3^{-\frac{4}{3}} \cdot y^{\frac{2}{7}}} = \frac{\sqrt[3]{-1} \cdot \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{3^{-4}} \cdot \sqrt[7]{y^2}} = \frac{-1 \cdot \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{\frac{1}{3^3}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt[7]{y^2}} = \frac{-3\sqrt[3]{3x^2}}{\sqrt[7]{y^2}}.$$

5.22. Példa. Számítsuk ki mennyivel egyenlő az $A = \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}} + 0,25^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{1024}\right)^{-\frac{2}{5}}$ számkifejezés értéke.

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}} + 0,25^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{1024}\right)^{-\frac{2}{5}} \\ &= \left(\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-4} + \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} + \left(\left(\left(\frac{1}{4}\right)^5\right)^{\frac{1}{5}}\right)^{-2} \\ &= \left(\sqrt[3]{\frac{1}{27}}\right)^{-4} + \left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + 4^2 \\ &= 3^4 + 2^1 + 4^2 \\ &= 81 + 2 + 16 \\ &= 99. \end{aligned}$$

5.23. Példa. Számítsuk ki mennyivel egyenlő az

$$x^4 - a^{-\frac{3}{2}}b^{-1}(a^3 + b^3)x^2 + 1$$

kifejezés, ha $x = a^{\frac{3}{4}}b^{-\frac{1}{2}}$. Helyettesítsük x helyére a megadott hatványkifejezést. Ekkor

$$\begin{aligned} x^4 - a^{-\frac{3}{2}}b^{-1}(a^3 + b^3)x^2 + 1 &= \left(a^{\frac{3}{4}}b^{-\frac{1}{2}}\right)^4 - a^{-\frac{3}{2}}b^{-1}(a^3 + b^3)\left(a^{\frac{3}{4}}b^{-\frac{1}{2}}\right)^2 + 1 \\ &= \left(a^{\frac{3}{4}}\right)^4 \left(b^{-\frac{1}{2}}\right)^4 - a^{-\frac{3}{2}}b^{-1}\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^2 \left(b^{-\frac{1}{2}}\right)^2 (a^3 + b^3) + 1 \\ &= a^3 \cdot b^{-2} - a^{-\frac{3}{2}} \cdot b^{-1} \cdot a^{\frac{3}{2}} \cdot b^{-1}(a^3 + b^3) + 1 \\ &= a^3 \cdot b^{-2} - b^{-2}(a^3 + b^3) + 1 \\ &= a^3 \cdot b^{-2} - a^3 \cdot b^{-2} - b + 1 \\ &= 1 - b. \end{aligned}$$

Végül mutassuk meg, hogy a racionális kitevőjű hatványozás ilyen definíciója mellett érvényesek maradnak a hatványozás eddig ismert szabályai, vagyis a törtkitevőjű hatványokkal ugyanolyan módon végezhetünk műveleteket, mint az egész kitevőjű hatványokkal.

5.9. Tétel. Legyenek $a > 0$ és $b > 0$ valós, $\frac{m}{n}$ és $\frac{p}{q}$ pedig tetszőleges racionális számok. Ekkor érvényesek a következő műveleti szabályok:

$$\begin{aligned} 1^\circ a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} &= a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}; & 2^\circ a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} &= a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}; & 3^\circ \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} &= a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}}; \\ 4^\circ (a \cdot b)^{\frac{m}{n}} &= a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}; & 5^\circ (a : b)^{\frac{m}{n}} &= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} = a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}}. \end{aligned}$$

Bizonyítás. Megmutatjuk az 1^o, a 3^o és a 4^o tulajdonságok bizonyítását.

1^o Legyen

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = x \quad \text{és} \quad a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = y.$$

Ekkor $x^n = a^m$ és $y^q = a^p$, illetve $x^{nq} = a^{mq}$ és $y^{nq} = a^{np}$. A kapott egyenlőségek bal és jobb oldalait összeszorozva kapjuk, hogy

$$x^{nq} \cdot y^{nq} = a^{mq} \cdot a^{np},$$

illetve hogy

$$(xy)^{nq} = a^{mq+np}, \quad \text{innen pedig} \quad xy = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}.$$

Ugyanakkor

$$x \cdot y = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}}, \quad \text{s így} \quad a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}.$$

3^o Először azt mutatjuk meg, hogy

$$\left[\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}\right]^{nq} = \left[a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}}\right]^{nq},$$

ahonnan az 5.1 ekvivalencia miatt következik az állítás. Egyrészt

$$\left[\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}\right]^{nq} = \left[\sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p}\right]^{nq} = \left[\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p\right]^n = \left(\sqrt[n]{a^{mp}}\right)^n = a^{mp},$$

másrészt pedig

$$\left[a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}}\right]^{nq} = \left[a^{\frac{mp}{nq}}\right]^{nq} = \left[\sqrt[nq]{a^{mp}}\right]^{nq} = a^{mp}.$$

Mivel mindkét kifejezés a^{mp} -vel egyenlő, így egymással is egyenlők, vagyis

$$\left[\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}\right]^{nq} = \left[a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}}\right]^{nq}$$

valóban teljesül, tehát az

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}}$$

egyenlőség is teljesül, amit bizonyítani akartunk.

4^o Ezt a tulajdonságot a következő módon igazoljuk:

$$(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}.$$

◇

FELADATOK

1. Számítsuk ki mennyivel egyenlő a következő számkifejezés értéke:

$$A = \frac{3^{-2} + 5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0}{3 - \left(\frac{4}{5}\right)^{-2}} + \left(\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} - 3 \cdot 2^{-4}\right)^{-2}.$$

Megoldás. Végezzük el a műveleteket.

$$\begin{aligned} A &= \frac{3^{-2} + 5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0}{3 - \left(\frac{4}{5}\right)^{-2}} + \left(\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} - 3 \cdot 2^{-4}\right)^{-2} \\ &= \frac{\frac{1}{9} + 5 \cdot 1}{3 - \frac{25}{16}} + \left(\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{16}\right)^{-2} = \frac{\frac{46}{9}}{\frac{23}{16}} + \left(\frac{9}{4} - \frac{3}{16}\right)^{-2} \\ &= \frac{32}{9} + \left(\frac{33}{16}\right)^{-2} = \frac{32}{9} + \frac{256}{9 \cdot 121} \\ &= \frac{3872 + 256}{9 \cdot 121} = \frac{1376}{363}. \end{aligned}$$

2. Számítsuk ki többféle módon, hogy mennyivel egyenlő az

$$A = \sqrt[4]{32 \cdot \sqrt[3]{4}} + \sqrt[4]{64 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}}} - 3 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[4]{2}} \quad \text{számkifejezés értéke.}$$

I. Megoldás. Végezzük el a gyökök szétbontását.

$$\begin{aligned} A &= \sqrt[4]{32 \cdot \sqrt[3]{4}} + \sqrt[4]{64 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}}} - 3 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[4]{2}} \\ &= \sqrt[4]{32} \cdot \sqrt[12]{4} + \sqrt[4]{64} \cdot \sqrt[12]{\frac{1}{2}} - 3 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[12]{2} \\ &= \sqrt[4]{16 \cdot 2} \cdot \sqrt[12]{2^2} + \sqrt[4]{16 \cdot 4} \cdot \sqrt[12]{\frac{1}{2}} - 3 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[12]{2} \\ &= 2 \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[12]{2^2} + 2 \cdot \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[12]{\frac{1}{2}} - 3 \cdot \sqrt[12]{2^4} \cdot \sqrt[12]{2} \\ &= 2 \cdot \sqrt[12]{2^3 \cdot 2^2} + 2 \cdot \sqrt[12]{2^6 \cdot \frac{1}{2}} - 3 \cdot \sqrt[12]{2^4 \cdot 2} \\ &= 2 \cdot \sqrt[12]{2^5} + 2 \cdot \sqrt[12]{2^5} - 3 \cdot \sqrt[12]{2^5} = \sqrt[12]{2^5}. \end{aligned}$$

II. Megoldás. Vigyük be a tényezőket a gyök alá.

$$\begin{aligned}
 A &= \sqrt[4]{32 \cdot \sqrt[3]{4}} + \sqrt[4]{64 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}}} - 3 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[4]{2}} \\
 &= \sqrt[4]{\sqrt[3]{32^3 \cdot 4}} + \sqrt[4]{\sqrt[3]{64^3 \cdot \frac{1}{2}}} - 3 \cdot \sqrt[3]{\sqrt[4]{2^4 \cdot 2}} \\
 &= \sqrt[12]{2^{15} \cdot 2^2} + \sqrt[12]{2^{18} \cdot \frac{1}{2}} - 3 \cdot \sqrt[12]{2^5} = \sqrt[12]{2^{17}} + \sqrt[12]{2^{17}} - 3 \cdot \sqrt[12]{2^5} \\
 &= 2 \cdot \sqrt[12]{2^{12} \cdot 2^5} - 3 \cdot \sqrt[12]{2^5} = 4 \cdot \sqrt[12]{2^5} - 3 \cdot \sqrt[12]{2^5} = \sqrt[12]{2^5}.
 \end{aligned}$$

III. Megoldás. Térjünk át törtkitevőjű hatványokra.

$$\begin{aligned}
 A &= \sqrt[4]{32 \cdot \sqrt[3]{4}} + \sqrt[4]{64 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}}} - 3 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[4]{2}} \\
 &= \left(32 \cdot 4^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} + \left(64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} - 3 \left(2 \cdot 2^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} \\
 &= \left(2^5 \cdot 2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} + \left(2^6 \cdot 2^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} - 3 \left(2^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} \\
 &= \left(2^{\frac{17}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} + \left(2^{\frac{17}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} - 3 \cdot 2^{\frac{5}{12}} \\
 &= 2^{\frac{17}{12}} + 2^{\frac{17}{12}} - 3 \cdot 2^{\frac{5}{12}} \\
 &= 2 \cdot 2^{1+\frac{5}{12}} - 3 \cdot 2^{\frac{5}{12}} \\
 &= 4 \cdot 2^{\frac{5}{12}} - 3 \cdot 2^{\frac{5}{12}} \\
 &= 2^{\frac{5}{12}} = \sqrt[12]{2^5}.
 \end{aligned}$$

3. Hozzuk egyszerűbb alakra az

$$A = \frac{2 \cdot 7^{-x}}{7^{-x} - 1} - \frac{3 \cdot 7^{-2x} + 2 \cdot 7^{-x} + 1}{7^{-3x} - 1} + \frac{7^{-x} + 1}{7^{-2x} + 7^{-x} + 1} \quad \text{számkifejezést.}$$

Megoldás. Végezzük el a kijelölt műveleteket.

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{2 \cdot 7^{-x}}{7^{-x} - 1} - \frac{3 \cdot 7^{-2x} + 2 \cdot 7^{-x} + 1}{7^{-3x} - 1} + \frac{7^{-x} + 1}{7^{-2x} + 7^{-x} + 1} \\
 &= \frac{2 \cdot 7^{-x}}{7^{-x} - 1} - \frac{3 \cdot 7^{-2x} + 2 \cdot 7^{-x} + 1}{(7^{-x} - 1)(7^{-2x} + 7^{-x} + 1)} + \frac{7^{-x} + 1}{7^{-2x} + 7^{-x} + 1} \\
 &= \frac{2 \cdot 7^{-x}(7^{-2x} + 7^{-x} + 1) - 3 \cdot 7^{-2x} - 2 \cdot 7^{-x} - 1 + (7^{-x} + 1)(7^{-x} - 1)}{(7^{-x} - 1)(7^{-2x} + 7^{-x} + 1)} \\
 &= \frac{2 \cdot 7^{-3x} + 2 \cdot 7^{-2x} + 2 \cdot 7^{-x} - 3 \cdot 7^{-2x} - 2 \cdot 7^{-x} - 1 + 7^{-2x} - 1}{(7^{-x} - 1)(7^{-2x} + 7^{-x} + 1)} \\
 &= \frac{2 \cdot 7^{-3x} - 2}{7^{-3x} - 1} \\
 &= \frac{2 \cdot (7^{-3x} - 1)}{7^{-3x} - 1} = 2.
 \end{aligned}$$

4. Hozzuk minél egyszerűbb alakra a $\frac{a^{-2x} - a^{-x} - 6}{a^{-2x} - 4} - \frac{a^{-x} - 1}{2 - a^{-x}} - 2$ számkifejezést.

Megoldás. Bontsuk fel tényezőkre az első tört nevezőjét, mint négyzetek különbségét. Ekkor

$$\begin{aligned} \frac{a^{-2x} - a^{-x} - 6}{a^{-2x} - 4} - \frac{a^{-x} - 1}{2 - a^{-x}} - 2 &= \frac{a^{-2x} - a^{-x} - 6}{(a^{-x} - 2)(a^{-x} - 2)} - \frac{a^{-x} - 1}{2 - a^{-x}} - 2 = \\ &= \frac{a^{-2x} - a^{-x} - 6 + (a^{-x} - 1)(a^{-x} + 2) - 2(a^{-2x} - 4)}{(a^{-x} - 2)(a^{-x} - 2)} = \\ &= \frac{a^{-2x} - a^{-x} - 6 + a^{-2x} - a^{-x} + 2a^{-x} - 2 - 2a^{-2x} + 8}{a^{-2x} - 4} = 0. \end{aligned}$$

5. Mutassuk meg, hogy az $A = \frac{a^x + b^{-x}}{a^x + c^x (b^x c^x + 1)^{-1}} - \frac{b^{-x}}{a^x b^x c^x + a^x + c^x}$ kifejezés értéke nem függ az a , b , c és x változók értékétől.

Megoldás.

$$\begin{aligned} A &= \frac{a^x + b^{-x}}{a^x + c^x (b^x c^x + 1)^{-1}} - \frac{b^{-x}}{a^x b^x c^x + a^x + c^x} \\ &= \frac{a^x + \frac{1}{b^x}}{a^x + \frac{1}{c^x (b^x c^x + 1)}} - \frac{\frac{1}{b^x}}{a^x b^x c^x + a^x + c^x} \\ &= \frac{\frac{a^x b^x + 1}{b^x}}{\frac{a^x b^x + 1}{b^x c^x + 1}} - \frac{1}{b^x (a^x b^x c^x + a^x + c^x)} \\ &= \frac{(a^x b^x + 1)(b^x c^x + 1) - 1}{b^x (a^x b^x c^x + a^x + c^x)} = \frac{a^x b^x c^x + a^x b^x + b^x c^x + 1 - 1}{b^x (a^x b^x c^x + a^x + c^x)} \\ &= \frac{b^x (a^x b^x c^x + a^x + c^x)}{b^x (a^x b^x c^x + a^x + c^x)} = 1. \end{aligned}$$

6. Hozzuk a legegyszerűbb alakra az

$$A = \frac{x}{a} \sqrt{\frac{a^2}{x}} - 2x \sqrt{\frac{1}{x}} - 3a \sqrt{\frac{x}{a^2}}$$

irracionális kifejezést, ha $x > 0$ és $a \neq 0$.

Megoldás. Vigyünk be minden tényezőt a gyökök alá. Ekkor $a > 0$ feltétel mellett a következő kifejezést kapjuk:

$$A = \sqrt{\frac{x^2 a^2}{a^2 x}} - 2\sqrt{\frac{x^2}{x}} - 3\sqrt{\frac{a^2 x}{a^2}} = \sqrt{x} - 2\sqrt{x} - 3\sqrt{x} = -4\sqrt{x}.$$

Ha viszont $a < 0$, akkor a következőképpen alakul a kifejezés:

$$A = -\sqrt{\frac{x^2 a^2}{a^2 x}} - 2\sqrt{\frac{x^2}{x}} + 3\sqrt{\frac{a^2 x}{a^2}} = -\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 3\sqrt{x} = 0.$$

Eszerint

$$A = \begin{cases} -4\sqrt{x}, & \text{ha } a > 0, \\ 0, & \text{ha } a < 0. \end{cases}$$

7. Bontsuk tényezőkre az $(x-1)\sqrt{x} - (y-1)\sqrt{y}$ kifejezést, ha tudjuk, hogy $x \geq 0$ és $y \geq 0$.

Megoldás. Végezzük el a következő ekvivalens átalakításokat:

$$\begin{aligned} (x-1)\sqrt{x} - (y-1)\sqrt{y} &= x\sqrt{x} - \sqrt{x} - y\sqrt{y} + \sqrt{y} \\ &= (\sqrt{x^3} - \sqrt{y^3}) - (\sqrt{x} - \sqrt{y}) \\ &= (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x^2} + \sqrt{xy} + \sqrt{y^2}) - (\sqrt{x} - \sqrt{y}) \\ &= (\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + y + \sqrt{xy} - 1). \end{aligned}$$

8. Hozzuk a legegyszerűbb alakra az $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}$ kifejezést, ha $x > 0$.

Megoldás. Hozzuk közös nevezőre a törtet. Ekkor

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} &= \frac{-(\sqrt{x} - \sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x+1} + \sqrt{x})^2}{(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})} = \\ &= \frac{-(x - 2\sqrt{x(x+1)} + x + 1) - (x + 1 + 2\sqrt{x(x+1)} + x)}{x + 1 - x} = -4x - 2. \end{aligned}$$

9. Számítsuk ki mennyi a $\sqrt{8 + 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{8 - 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$ számkifejezés értéke.

Megoldás. Állapítsuk meg, hogy az adott számkifejezés pozitív. Egyenlítsük ki ezt a keresett számot egy x változóval ($x > 0$), majd emeljük négyzetre az így kapott egyenlőséget.

$$\begin{aligned} \sqrt{8 + 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{8 - 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} &= x \\ 8 + 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + 8 - 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + 2\sqrt{8 + 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \cdot \sqrt{8 - 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} &= x^2 \\ 16 + 2\sqrt{64 - 4(10 + 2\sqrt{5})} &= x^2 \\ 16 + 2\sqrt{24 - 8\sqrt{5}} &= x^2 \\ 16 + 2\sqrt{(2 - 2\sqrt{5})^2} &= x^2 \\ 16 + 2|2 - 2\sqrt{5}| &= x^2 \\ 16 + 2(2\sqrt{5} - 2) &= x^2, \quad \text{ahonnan } x^2 = 4(3 + \sqrt{5}). \end{aligned}$$

Mivel $x > 0$, így ennek az egyenletnek a pozitív gyöke :

$$x = 2\sqrt{3 + \sqrt{5}}.$$

A Lagrange-képlet alapján:

$$\sqrt{3 + \sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{9-5}}{2}} + \sqrt{\frac{3 - \sqrt{9-5}}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{2}},$$

s így $x = 2 \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}(\sqrt{5} + 1).$

10. Gyöktelenítsük a következő törtek nevezőit:

$$a) \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + 4}; \quad b) \frac{1}{\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{4} + \sqrt[4]{8} + 2}.$$

Megoldás. a)

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + 4} &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + 2 + 2 + \sqrt{6} + \sqrt{8}} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{4} + \sqrt{6} + \sqrt{8}} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}) + \sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4})} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4})(1 + \sqrt{2})} \\ &= \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \cdot \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} \\ &= \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - 2} = \sqrt{2} - 1. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{4} + \sqrt[4]{8} + 2} &= \frac{1}{(\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{4}) + \sqrt[4]{4}(\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{4})} \\ &= \frac{1}{(\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{4})(1 + \sqrt[4]{4})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{2}} - \sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}} - \sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \cdot \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{\sqrt{2}} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 2} \cdot \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - 2} \\ &= \frac{\sqrt[4]{2} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}(1 - \sqrt{2})} \cdot \frac{1 - \sqrt{2}}{-1} \\ &= \frac{\sqrt{2} - \sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}} \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \\ &= \frac{2 - \sqrt[4]{8}}{2}. \end{aligned}$$

11. Számítsuk ki mennyi az $A = \left(\frac{(a + \sqrt[3]{a^2x}) : (x + \sqrt[3]{ax^2}) - 1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^6$ számkifejezés értéke, ha $x \neq 0$ és $a \neq x$.

Megoldás.

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\frac{(a + \sqrt[3]{a^2x}) : (x + \sqrt[3]{ax^2}) - 1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^6 \\
 &= \left(\frac{\frac{\sqrt[3]{a^2}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{x})} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}}{\frac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{x}}{1}} \right)^6 \\
 &= \left(\frac{\frac{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}}{1} \right)^6 \\
 &= \left(\frac{(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{x})} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^6 \\
 &= \left(\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} \right)^6 \\
 &= \left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{x^2}} \right)^6 = \frac{a^2}{x^4}.
 \end{aligned}$$

12. Számítsuk ki mennyi az $A = \left(\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^3 + 2\sqrt{a^3} + b\sqrt{b}}{3(a\sqrt{a} + b\sqrt{b})} + \frac{\sqrt{ab} - b}{a - b} \right)^{2011}$ számkifejezés értéke, ha $a \neq 0$, $b > 0$ és $a \neq \pm b$.

Megoldás.

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^3 + 2\sqrt{a^3} + b\sqrt{b}}{3(a\sqrt{a} + b\sqrt{b})} + \frac{\sqrt{ab} - b}{a - b} \right)^{2011} \\
 &= \left(\frac{a\sqrt{a} - 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{3(\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3})} + \frac{\sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} \right)^{2011} \\
 &= \left(\frac{3(a\sqrt{a} - a\sqrt{b} + b\sqrt{a})}{3(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right)^{2011} \\
 &= \left(\frac{\sqrt{a}(a - \sqrt{ab} + b)}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right)^{2011} \\
 &= \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right)^{2011} = 1^{2011} = 1.
 \end{aligned}$$

13. Számold ki mennyi A^{2012} , ha $a \neq 0$, $x + a > 0$, $x - a > 0$ és

$$A = \left(\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}} + \frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2} - x+a} \right) : \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}.$$

Megoldás. Végezzük el a kijelölt műveleteket és rendezzük a kifejezést a következő módon:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}} + \frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2} - x+a} \right) : \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \\ &= \left(\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}} + \frac{\sqrt{(x-a)(x-a)}}{\sqrt{(x-a)(x+a)} - \sqrt{(x-a)(x-a)}} \right) : \sqrt{\frac{x^2-a^2}{a^2}} \\ &= \left(\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}} + \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a}} \right) \cdot \sqrt{\frac{a^2}{x^2-a^2}} \\ &= \frac{\sqrt{x-a}(\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a}) + \sqrt{x-a}(\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a})}{(x+a) - (x-a)} \cdot \frac{a}{\sqrt{(x-a)(x+a)}} \\ &= \frac{\sqrt{x-a}(\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a} + \sqrt{x+a} + \sqrt{x-a})}{(x+a) - (x-a)} \cdot \frac{a}{\sqrt{(x-a)(x+a)}} \\ &= \frac{2\sqrt{x+a}}{2a} \cdot \frac{a}{\sqrt{x+a}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ebből adódik, hogy $A^{2012} = 1^{2012} = 1$.

14. Számold ki mennyi ${}^{2011}\sqrt{A}$, ha $x > 0$ és $\sqrt{x} \neq \sqrt{5} - 1$ esetén

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}+1}{1+\sqrt{5}+\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{5}-1}{1-\sqrt{5}+\sqrt{x}} \right) \cdot \left(x^{\frac{1}{2}} - 4x^{-\frac{1}{2}} + 2 \right) \cdot \sqrt{0,2}.$$

Megoldás. Végezzük el a kijelölt műveleteket és rendezzük a kifejezést a következő módon:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}+1}{1+\sqrt{5}+\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{5}-1}{1-\sqrt{5}+\sqrt{x}} \right) \cdot \left(x^{\frac{1}{2}} - 4x^{-\frac{1}{2}} + 2 \right) \cdot \sqrt{0,2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(\sqrt{5}+1)(1-\sqrt{5}+\sqrt{x}) + (\sqrt{5}-1)(1+\sqrt{5}+\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})^2 - (\sqrt{5})^2} \cdot \left(\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} + 2 \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-5+\sqrt{5x}+1-\sqrt{5}+\sqrt{x}+\sqrt{5}+5+\sqrt{5x}-1-\sqrt{5}-\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}+x-5} \cdot \frac{x-4+2\sqrt{x}}{\sqrt{5}\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{2\sqrt{5x}}{x+2\sqrt{x}-4} \cdot \frac{x+2\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}} = 1. \end{aligned}$$

Ekkor ${}^{2011}\sqrt{A} = {}^{2011}\sqrt{1} = 1$.

15. Számítsuk ki az

$$A = \frac{\frac{\sqrt[3]{a-1}}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} + 1}}{\sqrt[3]{\frac{a}{(a-1)^2}} - \sqrt[3]{\frac{a}{a-1} - \frac{a^2 - a - 1}{(a-1)^2}}}$$

kifejezés értékét, ha $a \neq 1$.

Megoldás.

$$\begin{aligned} A &= \frac{\frac{\sqrt[3]{a-1}}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} + 1}}{\sqrt[3]{\frac{a}{(a-1)^2}} - \sqrt[3]{\frac{a}{a-1} - \frac{a^2 - a - 1}{(a-1)^2}}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt[3]{a-1}}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} + 1}}{\sqrt[3]{\frac{a}{(a-1)^2}} - \sqrt[3]{\frac{a^2 - a - a^2 + a + 1}{(a-1)^2}}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt[3]{a-1}}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} + 1}}{\frac{\sqrt[3]{a-1}}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} + 1}} = \frac{\sqrt[3]{(a-1)^3}}{(\sqrt[3]{a} - 1)(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} + 1)} = \frac{a-1}{a-1} = 1. \end{aligned}$$

16. Egyszerűsítsd a következő kifejezést:

$$\frac{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} - \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}} - \frac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} - \frac{(ab)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}} + \left(\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} \right)^{-1}, \quad a, b > 0.$$

Megoldás.

$$\begin{aligned} A &= \frac{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} - \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}} - \frac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} - \frac{(ab)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}} + \left(\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} \right)^{-1} \\ &= \frac{(\sqrt{a})^3 - (\sqrt{b})^3}{\frac{a+b+\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}} - \frac{(\sqrt{a})^3 + (\sqrt{b})^3}{\frac{a+b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}} + \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a-b} \\ &= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a+b+\sqrt{ab})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a+b+\sqrt{ab}} - \\ &\quad - \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a+b-\sqrt{ab})(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a+b-\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} \\ &= (a-b) - (a-b) + \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a-b}. \end{aligned}$$

17. Legyen $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2 - (x-1)\sqrt{x^2-4}}{x^2 + 3x + 2 - (x+1)\sqrt{x^2-4}} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{x-2}}$, $x \in (2, \infty)$.

Hozzuk a legegyszerűbb alakra az f függvény megadási képletét.

Megoldás. Mivel $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ és $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$, így

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{x^2 - 3x + 2 - (x-1)\sqrt{x^2-4}}{x^2 + 3x + 2 - (x+1)\sqrt{x^2-4}} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{x-2}} \\
 &= \frac{(x-1)(x-2) - (x-1)\sqrt{x^2-4}}{(x+1)(x+2) - (x+1)\sqrt{x^2-4}} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{x-2}} \\
 &= \frac{(x-1) \left[(x-2) - \sqrt{(x-2)(x+2)} \right]}{(x+1) \left[(x+2) - \sqrt{(x-2)(x+2)} \right]} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{x-2}} \\
 &= \frac{(x-1)\sqrt{x-2} \left[\sqrt{x-2} - \sqrt{x+2} \right]}{(x+1)\sqrt{x+2} \left[\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2} \right]} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{x-2}} \\
 &= \frac{x-1}{x+1} \cdot \left(-\frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}} \right) \\
 &= \frac{x-1}{x+1} \cdot (-1) = \frac{1-x}{1+x}.
 \end{aligned}$$

18. Legyen $a, b \in \mathbf{R}$, $b \neq 0$ és $|a| > |b|$. Határozzuk meg az

$$A = \left(\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{a + \sqrt{a^2 - b^2}} - \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}} \right) : \frac{4\sqrt{a^4 - a^2b^2}}{(5b)^2}$$

kifejezés legegyszerűbb alakját.

Megoldás. Végezzük el a kijelölt műveleteket.

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{a + \sqrt{a^2 - b^2}} - \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}} \right) : \frac{4\sqrt{a^4 - a^2b^2}}{(5b)^2} \\
 &= \frac{(a - \sqrt{a^2 - b^2})^2 - (a + \sqrt{a^2 - b^2})^2}{a^2 - (a^2 - b^2)} \cdot \frac{25b^2}{4\sqrt{a^2(a^2 - b^2)}} \\
 &= \frac{(a^2 - 2a\sqrt{a^2 - b^2} + a^2 - b^2) - (a^2 + 2a\sqrt{a^2 - b^2} + a^2 - b^2)}{b^2} \cdot \frac{25b^2}{4|a|\sqrt{a^2 - b^2}} \\
 &= \frac{-4a\sqrt{a^2 - b^2}}{b^2} \cdot \frac{25b^2}{4|a|\sqrt{a^2 - b^2}} \\
 &= -\frac{25a}{|a|} \\
 &= \begin{cases} -\frac{25a}{a}, & \text{ha } a < 0, \\ -\frac{25a}{a}, & \text{ha } a > 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 25, & \text{ha } a < 0, \\ -25, & \text{ha } a > 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

19. Adott az $A = \left(\frac{x-9}{x+3\sqrt{x}+9} : \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x^3-27}} \right)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{x}$ kifejezés.

- a) Milyen x valós értékekre értelmezett az adott kifejezés?
 b) Hozzuk egyszerűbb alakra a fenti kifejezést.
 c) Milyen x valós értékek esetén nem függ a kifejezés értéke x -től?

Megoldás. a) A kifejezés értelmezett, ha

$$\frac{x-9}{x+3\sqrt{x}+9} : \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x^3-27}} \geq 0, \quad x \neq 3 \quad \text{és} \quad x \geq 0.$$

Mivel

$$\begin{aligned} \frac{x-9}{x+3\sqrt{x}+9} : \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x^3-27}} &= \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{x+3\sqrt{x}+9} \cdot \frac{(\sqrt{x}-3)(x+3\sqrt{x}+9)}{\sqrt{x}+3} \\ &= (\sqrt{x}-3)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

minden $x \in \mathbf{R}$ esetén, az adott kifejezés értelmezési tartománya a

$$D = [0, 3) \cup (3, \infty).$$

.

b) Mivel

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{x-9}{x+3\sqrt{x}+9} : \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x^3-27}} \right)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{x} \\ &= \sqrt{\frac{x-9}{x+3\sqrt{x}+9} : \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x^3-27}}} - \sqrt{x} \\ &= \sqrt{\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{x+3\sqrt{x}+9} \cdot \frac{(\sqrt{x}-3)(x+3\sqrt{x}+9)}{\sqrt{x}+3}} - \sqrt{x} \\ &= \sqrt{(\sqrt{x}-3)^2} - \sqrt{x} \\ &= |\sqrt{x}-3| - \sqrt{x} \\ &= \begin{cases} \sqrt{x}-3-\sqrt{x}, & \sqrt{x}-3 \geq 0 \\ 3-\sqrt{x}-\sqrt{x}, & \sqrt{x}-3 < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -3, & \sqrt{x} \geq 3 \\ 3-2\sqrt{x}, & \sqrt{x} < 3 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -3, & x \geq 9 \\ 3-2\sqrt{x}, & 0 \leq x < 3 \text{ vagy } x < 9 \end{cases} \end{aligned}$$

c) Az adott kifejezés $x \geq 9$ esetén nem függ x -től.

20. Egyszerűsítsük a következő kifejezést $x > 1$, illetve $0 < x < 1$ esetén:

$$A = \sqrt{\frac{x^{\frac{3}{4}} + 1}{x^{\frac{1}{4}} + 1}} - x^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{x^{\frac{3}{4}} - 1}{x^{\frac{1}{4}} - 1} - \sqrt{x} \right) : (\sqrt{x^3} - x).$$

Megoldás. Végezzük el a kijelölt műveleteket.

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{x^{\frac{3}{4}} + 1}{x^{\frac{1}{4}} + 1}} - x^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{x^{\frac{3}{4}} - 1}{x^{\frac{1}{4}} - 1} - \sqrt{x} \right) : (\sqrt{x^3} - x) \\ &= \sqrt{\frac{(x^{\frac{1}{4}} + 1)(x^{\frac{2}{4}} - x^{\frac{1}{4}} + 1)}{x^{\frac{1}{4}} + 1}} - x^{\frac{1}{4}} \times \\ &\quad \times \left(\frac{(x^{\frac{1}{4}} - 1)(x^{\frac{2}{4}} + x^{\frac{1}{4}} + 1)}{x^{\frac{1}{4}} - 1} - \sqrt{x} \right) : (x\sqrt{x} - x) \\ &= \sqrt{x^{\frac{2}{4}} - x^{\frac{1}{4}} + 1} \cdot (x^{\frac{2}{4}} - x^{\frac{1}{4}} + 1 - \sqrt{x}) : (\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)) \\ &= \sqrt{(\sqrt[4]{x} - 1)^2} \cdot (\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} + 1 - \sqrt{x}) : (\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)) \\ &= |\sqrt[4]{x} - 1| \cdot (\sqrt[4]{x} + 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} \\ &= \frac{|\sqrt[4]{x} - 1| \cdot (\sqrt[4]{x} + 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} \\ &= \begin{cases} \frac{(\sqrt[4]{x} - 1) \cdot (\sqrt[4]{x} + 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}, & x > 1, \\ -\frac{(\sqrt[4]{x} - 1) \cdot (\sqrt[4]{x} + 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}, & 0 < x < 1, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}, & x > 1, \\ -\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}, & 0 < x < 1, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x > 1, \\ -\frac{1}{\sqrt{x}}, & 0 < x < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

6. Komplex számok

A *komplex számokat* a történelem folyamán nem a másod-, hanem a harmadfokú egyenletek megoldása tette szükségessé. Cardano, aki először hozta nyilvánosságra a harmadfokú egyenlet megoldóképletét, tehetetlenül állt azzal az esettel szemben, amelynél az egyenlet valós gyöke két komplex szám összegeként jelentkezik. Ebben az esetben a megoldóképlet felmondta a szolgálatot. Bombelli (1530?-1572) volt az első, aki sikerrel küzdött meg ezzel a nehézséggel, hiszen az 1572-ben megjelent "Algebra", majd az 1550 körül írt "Geometria" című munkájában megalapozta a *képzetes számok* elméletét. Ez azonban még távol volt a komplex számok fogalmának megnyugtató tisztázásától. Még 1702-ben is, nem kisebb matematikus mint Leibniz (1646-1716) így írt: "A képzetes számok - az isteni szellem e gyönyörű és csodálatos hordozói - már majdnem a lét és nemlét megtestesítői." Gauss (1777-1855) volt az, aki a képzetes számok körüli titokzatosságot megszüntette, rendszeresen tárgyalta a komplex számok algebráját és aritmetikáját. Az ő ötlete volt az is, hogy a komplex számokat a sík pontjaiként lehet ábrázolni és a komplex szám elnevezés is tőle származik. Tudjuk azt is, hogy Bolyai Farkas (1775-1856) és fia Bolyai János (1802-1860) is foglalkozott a komplex számokkal. 1837-ben a lipcsei Jablonovszki Társaság pályázatára Bolyai János beadta "Responsio" című munkáját, amelyben a komplex számok geometriában való alkalmazásának lényegességét fejtette ki. Mivel a "Responsioban" az "Appendixben" leírtakra hivatkozott, ezért művét nem értékelték, mert meg sem értették a bizottság tagjai.

6.1. Komplex számok algebrai alakja

Tudjuk, hogy az egész, a racionális, illetve irracionális számok halmazának bevezetését az $a + x = b$, $ax = b$, illetve $x^2 = a$ típusú egyenletek megoldhatósága tette szükségessé. Vegyük észre, hogy az $x^2 + 1 = 0$, $y^2 + 2 = 0$ vagy $z^2 + 4 = 0$ egyenleteknek viszont nincs megoldása a valós számok halmazában, mivel minden valós szám négyzete nemnegatív szám, így nem tudunk olyan valós számot találni, amelynek a négyzete negatív szám. Feltehetjük a kérdést, hogy lehetne-e úgy bővíteni a valós számok halmazát, hogy a kibővített halmazban az említett egyenleteknek is legyen megoldása. Hogy pótoljuk a valós számok halmazának ezt a hiányosságát, vezessünk be egy olyan elképzelt számot, amelynek a négyzete -1 . Jelöljük ezt az új számot $\sqrt{-1}$ -gyel. Ekkor az $x^2 = -1$, $y^2 = -1 \cdot 2$ vagy $z^2 = -1 \cdot 4$ egyenletek megoldhatóvá válnának, megoldásaik pedig sorban az $x_{1/2} = \pm\sqrt{-1}$, $y_{1/2} = \pm\sqrt{2} \cdot \sqrt{-1}$, $z_{1/2} = \pm 2\sqrt{-1}$, új típusú számok lennének, ahol a gyökjel használata nem műveletet jelöl. Mivel a valós számok körében a $\sqrt{-1}$ nem létezik, ezért ezt a számot úgy vezetjük be, mint egy "elképzelt", azaz *képzetes* vagy *imaginárius* számot, amelynek jelölésére az i betűt használjuk. Azt mondjuk, hogy az i szám, ahol $i^2 = -1$, az *imaginárius* vagy *képzetes egység*. Ennek megfelelően az előbbi egyenletek megoldásai sorban az $x_{1/2} = \pm i$, $y_{1/2} = \pm i\sqrt{2}$, $z_{1/2} = \pm 2i$, számok lesznek. Ezeket a számokat *imaginárius* vagy *képzetes számoknak* nevezzük, az *imaginárius* vagy *képzetes számok* halmazát pedig így írhatjuk fel: $\{ai \mid a \in \mathbf{R}, i^2 = -1\}$.

6.1. Példa. Két képzetes szám összege és különbsége is képzetes szám, mert például $2i + 5i = 7i$ és $2i - 5i = -3i$, szorzatuk és hányadosuk viszont valós szám, hiszen a műveleteket elvégezve azt kapjuk, hogy $2i \cdot 5i = 10i^2 = -10$ és $\frac{2i}{5i} = \frac{2}{5}$.

6.1. Definíció. Az $x + iy$ szerkezetű kifejezést, amelyben x és y valós számok, valamint $i^2 = -1$, *komplex számnak*, pontosabban a *komplex szám algebrai alakjának* nevezzük.

A komplex számok $\{x + yi \mid x, y \in \mathbf{R}, i^2 = -1\}$ halmazát \mathbf{C} -vel jelöljük, az $x + yi$ komplex számokat pedig leginkább z -vel vagy w -vel.

6.2. Definíció. Az x valós számot a $z = x + iy$ komplex szám valós részének nevezzük és $\operatorname{Re} z = x$ módon jelöljük, míg az y valós szám a $z = x + iy$ komplex szám képzetes része, jelölése pedig $\operatorname{Im} z = y$.

Mivel a $z = x + 0 \cdot i = x$ valós szám, a $z = 0 + yi = yi$ pedig képzetes szám, így megállapíthatjuk, hogy a valós számok \mathbf{R} halmaza, valamint a képzetes számok halmaza is részhalmaza a komplex számok \mathbf{C} halmazának. A valós számok olyan komplex számok, melyeknek a képzetes része nulla, a képzetes számok pedig olyan komplex számok, melyeknek a valós része nulla.

6.3. Definíció. Két komplex szám $z_1 = x_1 + iy_1$ és $z_2 = x_2 + iy_2$ akkor és csak akkor egyenlő, ha $x_1 = x_2$ és $y_1 = y_2$, azaz ha mind valós, mind képzetes részeik külön-külön egyenlők.

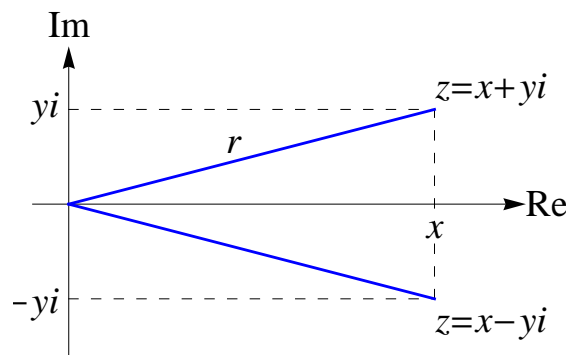
A komplex számok közötti egyenlőség tehát két valós számok közötti egyenlőséggel egyenértékű.

6.2. Példa. A $z_1 = 2 + yi$ komplex szám egyenlő a $z_2 = x - 3i$ komplex számmal, ha $x = 2$ és $y = -3$.

6.4. Definíció. A $\bar{z} = x - yi$ komplex számot a $z = x + yi$ komplex szám *konjugált komplex párjának* vagy *konjugáltjának* nevezzük.

A komplex számok szemléletes megértéséhez gyakorlatilag nélkülözhetetlen ezeknek a számoknak az ábrázolása az úgynevezett komplex számsíkon vagy Gauss-féle számsíkon. A Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben a $z = x + yi$ komplex számhoz hozzárendeljük a $P(x, y)$ pontot. A koordináta-rendszer x -tengelyét valós tengelynek, y -tengelyét pedig imaginárius vagy képzetes tengelynek nevezzük, hiszen a komplex szám valós részét a valós tengelyen, imaginárius vagy képzetes részét pedig az imaginárius vagy képzetes tengelyen ábrázoljuk. A z komplex szám és \bar{z} konjugáltja a valós tengelyre szimmetrikusak.

6.5. Definíció. A $z = x + yi$ komplex szám origótól, illetve a komplex számsík középpontjától való távolságát a $z = x + yi$ komplex szám abszolút értékének vagy modulusának nevezzük, jelölése pedig $r = |z|$.



A $z = x + yi$ komplex szám modulusa nem más, mint a $P(x, y)$ pont helyvektorának hossza, ezért a

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

képlettel kiszámítható. A $P(x, y)$ pont helyvektora és az x -tengely pozitív iránya közötti szöget φ szöget a $z = x + yi$ komplex szám argumentumának vagy arkuszának nevezzük, jelölése pedig $\varphi = \arg z$.

6.3. Példa. A $z = 4 + 3i$ komplex szám konjugált komplex párja a $\bar{z} = 4 - 3i$ komplex szám, modulusa pedig

$$|z| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$$

6.2. Műveletek komplex számokkal

6.6. Definíció. A $z_1 = x_1 + y_1i$ és $z_2 = x_2 + y_2i$ komplex számok összegén, illetve különbségén a

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$

illetve

$$z_1 - z_2 = (x_1 + y_1i) - (x_2 + y_2i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

komplex számokat értjük, azaz az algebrai alakban adott komplex számok összeadását, illetve kivonását a valós és képzetes részeknek külön-külön való összeadásával, illetve kivonásával végezzük el.

Vegyük észre, hogy a $z = x + yi$ komplex számnak és $\bar{z} = x - yi$ konjugált komplex párjának összege mindig valós szám.

$$z + \bar{z} = x + yi + x - yi = 2x \in \mathbf{R}.$$

6.7. Definíció. A $z = x + yi$ komplex számot a c valós számmal úgy szorozzuk, hogy mind a valós, mind a képzetes részt megszorozzuk c -vel:

$$cz = c(x + yi) = cx + cyi.$$

6.8. Definíció. A $z_1 = x_1 + y_1i$ és $z_2 = x_2 + y_2i$ komplex számok szorzatán a

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1i)(x_2 + y_2i) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i$$

komplex számot értjük, amelyet a $x_1 + y_1i$ és $x_2 + y_2i$ számok tagonkénti beszorzásával, majd rendezésével kapunk, miközben azt is figyelembe vesszük, hogy $i^2 = -1$.

Vegyük észre, hogy a $z = x + yi$ komplex számnak és $\bar{z} = x - yi$ konjugált komplex párjának szorzata mindig valós szám.

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - xyi + xyi - y^2i^2 = x^2 + y^2 \in \mathbf{R}.$$

A fenti gondolatmenetből azt megkaptuk, hogy tetszőleges z komplex szám esetén

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2.$$

6.4. Példa. A $z_1 = 2 - 3i$ és $z_2 = -5 + 6i$ komplex számok összege a

$$z_1 + z_2 = (2 - 3i) + (-5 + 6i) = 2 - 3i - 5 + 6i = -3 + 3i,$$

különbsége a

$$z_1 - z_2 = (2 - 3i) - (-5 + 6i) = 2 - 3i + 5 - 6i = 7 - 9i,$$

szorzata pedig a

$$z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i)(-5 + 6i) = -10 + 12i + 15i - 18i^2 = -10 + 18 + 27i = 8 + 27i$$

komplex szám.

A komplex számok komplex számmal való osztása esetén, a nevező gyöktelenítéséhez hasonlóan, a nevező konjugált komplex párja segítségével a nevezőt valósra változtatjuk, lehetővé téve ezzel a hányados valós részének és képzetes részének szétválasztását, illetve algebrai alakban való felírását. Ezt az eljárást a következő példában illusztráljuk.

6.5. Példa. Írjuk fel a $z_1 = 2 - 3i$ és $z_2 = -5 + 6i$ komplex számok $\frac{z_1}{z_2}$ hányadosát algebrai alakban. Bővítsük a törtet a nevezőben szereplő komplex szám konjugált komplex párjával, azaz $(-5 - 6i)$ -vel.

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2 - 3i}{-5 + 6i} = \frac{2 - 3i}{-5 + 6i} \cdot \frac{-5 - 6i}{-5 - 6i} = \frac{-10 - 12i + 15i + 18i^2}{25 - 36i^2} = \\ &= \frac{-10 - 12i + 15i - 18}{25 + 36} = \frac{-28 + 3i}{61} = -\frac{28}{61} + \frac{3}{61}i, \end{aligned}$$

a $\frac{z_2}{z_1}$ hányadosa algebrai alakban pedig

$$\begin{aligned} \frac{z_2}{z_1} &= \frac{-5 + 6i}{2 - 3i} = \frac{-5 + 6i}{2 - 3i} \cdot \frac{2 + 3i}{2 + 3i} = \frac{-10 - 15i + 12i + 18i^2}{4 - 9i^2} = \\ &= \frac{-10 - 15i + 12i - 18}{4 + 9} = \frac{-28 - 3i}{13} = -\frac{28}{13} - \frac{3}{13}i. \end{aligned}$$

A komplex számok hatványozása algebrai alakban valójában a binom hatványozásának problémájával egyezik meg, azzal a megjegyzéssel, hogy ebben az esetben megjelennek az i képzetes egység i^2 -nél magasabb hatványai is. Tekintsük ezért a képzetes egység hatványait.

$$\begin{array}{lll} i^1 = i, & i^5 = i, & i^9 = i, \\ i^2 = -1, & i^6 = -1, & i^{10} = -1, \\ i^3 = -i, & i^7 = -i, & i^{11} = -i, \\ i^4 = 1, & i^8 = 1, & i^{12} = 1, \quad \dots \end{array}$$

Megállapíthatjuk, hogy i természetes kitevőjű hatványai csak a ± 1 és $\pm i$ számok lehetnek, mégpedig

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i, \quad \text{ha } k \in \mathbf{N}.$$

6.6. Példa. Számoljuk ki a fenti megállapítást alkalmazva az $i^{32} + i^{55} + i^{402}$ komplex szám kifejezés értékét. Ekkor

$$i^{32} + i^{55} + i^{402} = i^{4 \cdot 8} + i^{4 \cdot 13 + 3} + i^{4 \cdot 100 + 2} = 1 - i - 1 = -i.$$

6.7. Példa. Számoljuk ki az $1 - 2i$ komplex szám második, harmadik és negyedik hatványát. Ekkor a binomiális képlet alapján

$$(1 - 2i)^2 = 1 - 2 \cdot 2i + 4i^2 = 1 - 4i - 4 = -3 - 4i,$$

$$(1 - 2i)^3 = 1 - 3 \cdot 2i + 3 \cdot 4i^2 - 8i^3 = 1 - 6i - 12 + 8i = -11 + 2i,$$

$$(1 - 2i)^4 = 1 - 4 \cdot 2i + 6 \cdot 4i^2 - 4 \cdot 8i^3 + 16i^4 = 1 - 8i - 24 + 32i + 16 = -7 + 24i.$$

A komplex számok gyökvonásával kapcsolatban a következő definíciót mondjuk ki.

6.9. Definíció. Ha $n \in \mathbf{N}$ és $z \in \mathbf{C}$, akkor a z komplex szám n -edik gyöke alatt azt a w komplex számot értjük, amelynek n -edik hatványa z szám, azaz amelyre $w^n = z$ érvényes.

6.8. Példa. Vegyük észre, hogy

$$(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i \quad \text{és} \quad (-1 - i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i.$$

Ekkor $\sqrt{2i} = 1 + i$ vagy $\sqrt{2i} = -1 - i$. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a $2i$ komplex szám négyzetgyökei az $1 + i$ és $-1 - i$ komplex számok.

6.9. Példa. Mivel

$$(-i)^3 = -i^3 = i,$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8} + 3 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}i + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{4}i^2 + \frac{1}{8}i^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{9}{8}i - \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}i = i,$$

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^3 = -\frac{3\sqrt{3}}{8} + 3 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}i - 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{4}i^2 + \frac{1}{8}i^3 = -\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{9}{8}i + \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}i = i,$$

ezért az i komplex szám harmadik gyökei a $-i$, $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ és $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ komplex számok.

6.10. Példa. Határozzuk meg elemi módszerrel a $3 - 4i$ komplex szám négyzetgyökét. Ekkor

$$\sqrt{3 - 4i} = \sqrt{4 - 4i + i^2} = \sqrt{(2 - i)^2} = 2 - i,$$

illetve hogy

$$\sqrt{3 - 4i} = \sqrt{i^2 - 4i + 4} = \sqrt{(i - 2)^2} = i - 2,$$

amelyből az következik, hogy a $3 - 4i$ komplex szám négyzetgyökei a $2 - i$ és $i - 2$ komplex számok.

Megmutatható, hogy a $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ komplex számnak pontosan n különböző n -edik gyöke van, és hogy a $z = 0$ komplex szám n -edik gyökei magával a $z = 0$ komplex számmal egyenlőek. Nem foglalkozunk ennek az állításnak a bizonyításával és ebben a fejezetben nem foglalkozunk a komplex számok n -edik gyökeinek előállításával sem.

FELADATOK

1. Határozzuk meg a $z = \frac{3+4i}{2-4i} + \frac{1}{2}i^{40}$ komplex szám valós és képzetes részét, konjugált komplex párját és modulusát.

Megoldás. Rendezzük az adott komplex számot. Ekkor

$$z = \frac{3+4i}{2-4i} + \frac{1}{2}i^{40} = \frac{3+4i}{2-4i} \cdot \frac{2+4i}{2+4i} + \frac{1}{2}i^{4 \cdot 10} = \frac{6+12i+8i-16}{4+16} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + i + \frac{1}{2} = i,$$

$$\operatorname{Re} z = 0, \quad \operatorname{Im} z = 1, \quad \bar{z} = -i \quad \text{és} \quad |z| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1.$$

2. Határozzuk meg az $z = (1+i)^8$ komplex szám valós és képzetes részét, konjugált komplex párját és modulusát.

Megoldás. Számoljuk ki először az $1+i$ komplex szám négyzetét. Ekkor

$$(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 1+2i-1 = 2i.$$

Ezt az eredményt figyelembe véve számoljunk tovább.

$$z = (1+i)^8 = ((1+i)^2)^4 = (2i)^4 = 2^4 \cdot i^4 = 16 \cdot 1 = 16,$$

$$\operatorname{Re} z = 16, \quad \operatorname{Im} z = 0, \quad \bar{z} = 16 \quad \text{és} \quad |z| = \sqrt{16^2 + 0^2} = 16.$$

3. Mutassuk meg, hogy $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ és $|z^2| = |z|^2$ bármely z , z_1 és z_2 komplex szám esetén.

Megoldás. Legyenek $z_1 = a+bi$ és $z_2 = c+di$ adott komplex számok. Ekkor

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2| &= |(a+bi)(c+di)| = |(ac-bd) + (ad+bc)i| = \\ &= \sqrt{(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2} = \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2} = \\ &= \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2} = |z_1| \cdot |z_2|. \end{aligned}$$

Legyen most $z = x+yi$ adott komplex szám. Ekkor

$$\begin{aligned} |z^2| &= |(x+yi)^2| = |(x^2-y^2) + 2xyi| = \sqrt{(x^2-y^2)^2 + (2xy)^2} = \\ &= \sqrt{x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2} = \sqrt{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} = \\ &= \sqrt{(x^2+y^2)^2} = x^2+y^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = |z|^2. \end{aligned}$$

4. Bizonyítsuk be, hogy $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, ha $z_2 \neq 0$.

Megoldás. Legyenek $z_1 = a+bi$ és $z_2 = c+di$ adott komplex számok, ahol c és d nem lehet egyszerre 0, azaz $c^2+d^2 \neq 0$. Ekkor

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{a+bi}{c+di}\right| = \left|\frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di}\right| = \left|\frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}\right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i \right| = \sqrt{\left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right)^2 + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)^2} = \\
&= \sqrt{\frac{a^2c^2 + b^2d^2 + b^2c^2 + a^2d^2}{(c^2 + d^2)^2}} = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}{(c^2 + d^2)^2}} = \\
&= \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|},
\end{aligned}$$

amit bizonyítanunk kellett.

5. Legyenek a , b és c adott valós számok. Bizonyítsuk be, hogy ha $az^2 + bz + c = 0$ teljesül a $z = x + yi$ komplex számra, akkor $a\bar{z}^2 + b\bar{z} + c = 0$ is teljesül.

Megoldás. Ha $az^2 + bz + c = 0$, akkor

$$az^2 + bz + c = a(x + yi)^2 + b(x + yi) + c = ax^2 - ay^2 + bx + c + (2axy + by)i$$

miatt

$$ax^2 - ay^2 + bx + c = 0 \quad \text{és} \quad 2axy + by = 0 \quad (6.1)$$

kell, hogy teljesüljön. Mivel $\bar{z} = x - yi$, ezért (10.1) miatt

$$a\bar{z}^2 + b\bar{z} + c = a(x - yi)^2 + b(x - yi) + c = ax^2 - ay^2 + bx + c - (2axy + by)i = 0.$$

6. Igazoljuk, hogy $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ és $|\bar{z}_1| = |z_1|$, valamint

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \quad \text{ha} \quad z_2 \neq 0.$$

Megoldás. Legyenek $z_1 = a + bi$ és $z_2 = c + di$ adott komplex számok, ahol $c^2 + d^2 \neq 0$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 + z_2} &= \overline{(a + bi) + (c + di)} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = \\
&= (a + c) - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(a + bi)(c + di)} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = \\
&= (ac - bd) - (ad + bc)i = (a - bi)(c - di) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2,
\end{aligned}$$

$$|\bar{z}_1| = |\overline{a + bi}| = |a - bi| = \sqrt{a^2 + b^2} = |a + bi| = |z_1|,$$

$$\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \overline{\left(\frac{a + bi}{c + di}\right)} = \overline{\left(\frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di}\right)} = \overline{\left(\frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}\right)} = \\
&= \overline{\left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i\right)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} - \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i = \\
&= \frac{(ac + bd) + (ad - bc)i}{c^2 + d^2} = \frac{a - bi}{c - di} \cdot \frac{c + di}{c + di} = \frac{a - bi}{c - di} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.
\end{aligned}$$

7. Számítsuk ki a $z = \frac{(1+i)^3(\sqrt{3}+i)}{(1-i\sqrt{3})^2}$ komplex szám abszolút értékét.

Megoldás. Végezzük el a szükséges átalakításokat.

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{(1+3i+3i^2+i^3)(\sqrt{3}+i)}{1-2i\sqrt{3}+3i^2} = \frac{(1+3i-3-i)(\sqrt{3}+i)}{1-2i\sqrt{3}-3} \\
 z &= \frac{(-2+2i)(\sqrt{3}+i)}{-2-2i\sqrt{3}} = \frac{-2\sqrt{3}-2+(2\sqrt{3}-2)i}{-2(1+i\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}+1-(1-\sqrt{3})i}{1+i\sqrt{3}} \\
 z &= \frac{1+\sqrt{3}-(1-\sqrt{3})i}{1+i\sqrt{3}} \cdot \frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \\
 z &= \frac{1+\sqrt{3}-i\sqrt{3}-3i-(1-i\sqrt{3}-\sqrt{3}+3i)i}{1+3} \\
 z &= \frac{1+\sqrt{3}-i\sqrt{3}-3i-i-\sqrt{3}+i\sqrt{3}+3}{1+3} \\
 z &= \frac{4-4i}{4} = 1-i, \quad \text{ahonnan} \\
 |z| &= |1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

8. Számítsuk mennyivel egyenlő $z = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2011} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2011}$.

Megoldás. Elvégezzük a szükséges számításokat és átalakításokat.

$$\begin{aligned}
 z &= \left(\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{1005} \cdot \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) + \left(\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{1005} \cdot \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \\
 z &= \left(\frac{1+2i+i^2}{2}\right)^{1005} \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1-2i+i^2}{2}\right)^{1005} \cdot \frac{1-i}{\sqrt{2}} \\
 z &= i^{1005} \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}} + (-i)^{1005} \cdot \frac{1-i}{\sqrt{2}} \\
 z &= i^{4 \cdot 251 + 1} \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} + \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \\
 z &= i \cdot \frac{2i}{\sqrt{2}} = i^2 \sqrt{2} = -\sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

9. Határozzuk meg azt a $z = x + yi$ komplex számot, amelyre teljesül, hogy

$$\left|\frac{z-3}{2-\bar{z}}\right| = 1 \quad \text{és} \quad \operatorname{Re}\left(\frac{z}{2+i}\right) = 2.$$

Megoldás. Helyettesítsük be a megadott feltételekbe a $z = x + yi$ komplex számot és végezzük el a megfelelő átalakításokat. Ekkor

$$\begin{aligned}
 \left|\frac{z-3}{2-\bar{z}}\right| = 1 &\iff \left|\frac{x-3+yi}{2-(x-yi)}\right| = 1 \iff \left|\frac{(x-3)+yi}{(2-x)+yi}\right| = 1 \iff \\
 \iff |(x-3)+yi| &= |(2-x)+yi| \iff \sqrt{(x-3)^2+y^2} = \sqrt{(2-x)^2+y^2} \iff \\
 \iff x^2-6x+9+y^2 &= 4-4x+x^2+y^2 \iff 2x=5 \iff x = \frac{5}{2}.
 \end{aligned}$$

Mivel

$$\frac{z}{2+i} = \frac{\frac{5}{2} + yi}{2+i} = \frac{\frac{5}{2} + yi}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{5 - \frac{5}{2}i + 2iy + y}{5} = \frac{5+y}{5} + \frac{\frac{5}{2} + 2y}{5}i,$$

ezért

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z}{2+i}\right) = 2 \iff \operatorname{Re}\left(\frac{5+y}{5} + \frac{\frac{5}{2} + 2y}{5}i\right) = 2 \iff \frac{5+y}{5} = 2 \iff y = 5.$$

A keresett komplex szám tehát $z = \frac{5}{2} + 5i$.

10. Határozzuk meg azt a z komplex számot, amelyre teljesül, hogy

$$|z-2| = |z+2i| \quad \text{és} \quad |z-i| = |z+2|.$$

Megoldás. Legyen $z = x + yi$. Ekkor a feltételek alapján felírhatók a következő ekvivalens átalakítások.

$$\begin{aligned} |z-2| = |z+2i| &\iff |x+yi-2| = |x+yi+2i| \\ &\iff |(x-2)+yi| = |x+(y+2)i| \\ &\iff \sqrt{(x-2)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y+2)^2} \\ &\iff x^2-4x+4+y^2 = x^2+y^2+4y+4 \\ &\iff y = -x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |z-i| = |z+2| &\iff |x+yi-i| = |x+yi+2| \\ &\iff |x+(y-1)i| = |(x+2)+yi| \\ &\iff \sqrt{x^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x+2)^2+y^2} \\ &\iff x^2+y^2-2y+1 = x^2+4x+4+y^2 \\ &\iff 4x+2y = -3. \end{aligned}$$

A kapott egyenlet $y = -x$ miatt felírható $4x - 2x = -3$, illetve $2x = -3$ alakban, ahonnan a keresett számok

$$x = -\frac{3}{2}, \quad y = \frac{3}{2}, \quad \text{illetve} \quad z = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i.$$

11. Számítsuk ki az i komplex szám négyzetgyökeit.

Megoldás. Az i komplex szám négyzetgyökei azok a $z = x + yi$ komplex számok, amelyek négyzetei i -vel egyenlők, vagyis amelyekre érvényes, hogy

$$(x+yi)^2 = i, \quad \text{illetve} \quad x^2 + 2xyi - y^2 = i.$$

A komplex számok egyenlőségének definíciója alapján adódik, hogy $x^2 - y^2 = 0$ és $2xy = 1$, azaz

$$(x-y)(x+y) = 0 \quad \text{és} \quad y = \frac{1}{2x}.$$

Egy szorzat akkor 0, ha egyik tényező 0 vagy a másik tényező 0, ezért felírható a következő ekvivalens egyenletrendszer:

$$x - y = 0 \quad \text{vagy} \quad x + y = 0.$$

Figyelembe véve most az $y = \frac{1}{2x}$ feltételt azt kapjuk, hogy

$$x - \frac{1}{2x} = 0 \quad \text{vagy} \quad x + \frac{1}{2x} = 0,$$

ahonnan a $2x^2 = 1$ vagy $2x^2 = -1$ egyenlet következik. Mivel a $2x^2 = -1$ egyenlet egyetlen valós számra sem teljesül, így csak a $2x^2 = 1$ egyenletnek van megoldása, mégpedig $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ és $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ezeket az értékeket behelyettesítve az $y = \frac{1}{2x}$

összefüggésbe kapjuk, hogy $y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ és $y_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Az i komplex szám négyzetgyökei tehát a következő komplex számok:

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad \text{és} \quad z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

12. Számítsuk ki az $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ komplex szám négyzetgyökeit.

Megoldás. Írjuk fel az $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ komplex számot teljes négyzetként. Mivel

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{2+2i\sqrt{3}}{4} = \frac{3+2i\sqrt{3}+i^2}{2} = \frac{(\sqrt{3}+i)^2}{4} = \frac{(-\sqrt{3}-i)^2}{4},$$

ezért

$$\sqrt{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3}+i)^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

és

$$\sqrt{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{(-\sqrt{3}-i)^2}{4}} = \frac{-\sqrt{3}-i}{2},$$

ami annyit jelent, hogy az $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ komplex szám négyzetgyökei

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{2} \quad \text{és} \quad z_2 = \frac{-\sqrt{3}-i}{2}.$$

13. Írjuk fel lineáris tényezők szorzataként az $x^2 + 4$, $9y^2 + 25$, $3a^2 + 2$, $x^2 + 2x + 5$, $x^2 + xy + y^2$ és $a^2 - 8ab + 20b^2$ kifejezéseket.

Megoldás. Végezzük el a szükséges átalakításokat.

$$\begin{aligned} x^2 + 4 &= (x - 2i)(x + 2i), \\ 9y^2 + 25 &= (3y - 5i)(3y + 5i), \\ 3a^2 + 2 &= (a\sqrt{3} - i\sqrt{2})(a\sqrt{3} + i\sqrt{2}), \\ x^2 + 2x + 5 &= (x^2 + 2x + 1) + 4 = (x + 1)^2 + 4 = (x + 1 - 2i)(x + 1 + 2i), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^2 + xy + y^2 &= \left(x^2 + xy + \frac{y^2}{4}\right) + \frac{3y^2}{4} = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} = \\
&= \left(x + \frac{y}{2} - \frac{y\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot \left(x + \frac{y}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2}i\right) \\
a^2 - 8ab + 20b^2 &= a^2 - 8ab + 16b^2 + 4b^2 = (a - 4b)^2 + 4b^2 = \\
&= (a - 4b - 2bi)(a - 4b + 2bi).
\end{aligned}$$

14. Oldjuk meg a $z^2 - z + 1 = 0$ másodfokú egyenletet a komplex számok halmazában.

Megoldás. Bontsuk lineáris tényezők szorzatára az adott másodfokú trinomot a következőképpen:

$$\begin{aligned}
z^2 - z + 1 = 0 &\iff \left(z^2 - z + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4} = 0 \iff \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0 \\
&\iff \left(z - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \left(z - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 0 \\
&\iff z - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0 \quad \text{vagy} \quad z - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0 \\
&\iff z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Az adott másodfokú egyenletet megoldáshalmaza

$$M = \left\{ \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

15. Oldjuk meg a komplex számok halmazában a $z^2 + 2iz + 1 = 0$ komplex együtthatós másodfokú egyenletet.

Megoldás. Az előző feladathoz hasonlóan bontsuk lineáris tényezők szorzatára az egyenlet bal oldalát. Ekkor

$$\begin{aligned}
z^2 + 2iz + 1 = 0 &\iff (z^2 + 2iz + i^2) - i^2 + 1 = 0 \\
&\iff (z + i)^2 - 2i^2 = 0 \\
&\iff (z + i - i\sqrt{2})(z + i + i\sqrt{2}) = 0 \\
&\iff z + i - i\sqrt{2} = 0 \quad \text{vagy} \quad z + i + i\sqrt{2} = 0 \\
&\iff z_1 = (\sqrt{2} - 1)i, \quad z_2 = (-\sqrt{2} - 1)i
\end{aligned}$$

A másodfokú egyenletet megoldáshalmaza tehát ebben az esetben

$$M = \left\{ (\sqrt{2} - 1)i, (-\sqrt{2} - 1)i \right\}.$$

7. Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek és egyenletrendszerek

Az alkalmazott matematikában sokszor találkozunk olyan problémákkal, melyek modellezése és megoldása során egyenleteket, egyenlőtlenségeket vagy egyenletrendszereket kell felírni, és ezek megoldásait keresni. problémától függően, ezek nem minden esetben elsőfokúak (lineárisak). Ebben a fejezetben a másodfokú egyenletekkel, másodfokú egyenlőtlenségekkel és egyenletrendszerekkel valamint az ezekre visszavezethető irracionális egyenletekkel és egyenlőtlenségekkel foglalkozunk.

7.1. Másodfokú egyenletek

7.1.1. Alapfogalmak

7.1. Definíció. Az

$$ax^2 + bx + c = 0$$

alakú egyenletet, ahol $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, x pedig az ismeretlen, x -ismeretlenű másodfokú egyenletnek nevezzük. a , b és c a másodfokú egyenlet együtthatói. A másodfokú egyenlet megoldásának vagy gyökének nevezünk minden olyan valós vagy komplex számot, amely az x ismeretlenbe helyettesítve igaz egyenlőséget ad.

7.1. Példa. Az $x^2 - 4 = 0$ egyenlet teljesül $x = -2$ és $x = 2$ esetén is. Az $x^2 - 2x + 1 = 0$ egyenlet csak $x = 1$ esetén teljesül. Az $x^2 + 1 = 0$ egyenlet az $x = i$ és $x = -i$ komplex számokra teljesül.

Megoldani egy másodfokú egyenletet annyit jelent, mint meghatározni minden valós vagy komplex megoldását. Később látni fogjuk, hogy a másodfokú egyenletnek legfeljebb két megoldása lehet, és ezek szokásos jelölése x_1 és x_2 .

7.2. Definíció. A másodfokú egyenletet teljesnek nevezzük, ha $a \neq 0$ mellett $b \neq 0$ és $c \neq 0$ is teljesül. Ha $b = 0$ vagy $c = 0$, akkor hiányos másodfokú egyenletről beszélünk.

A hiányos másodfokú egyenletek ezek szerint vagy $ax^2 + bx = 0$ vagy $ax^2 + c = 0$ vagy $ax^2 = 0$ alakúak lehetnek és egyszerűbben megoldhatók, mint a teljes másodfokú egyenlet, mert ezekben az esetekben a bal oldali kifejezés könnyen tényezőkre bontható.

Vegyük sorba a hiányos alakokra vonatkozó eseteket.

- 1° Az $ax^2 = 0$, $a \neq 0$, másodfokú egyenlet esetében a bal oldalon álló szorzat nullával egyenlő, ami $a \neq 0$ miatt csak $x^2 = 0$, illetve $x \cdot x = 0$ esetben teljesül. Ezért az egyenlet megoldása $x_1 = 0$ és $x_2 = 0$.
- 2° Az $ax^2 + bx = 0$, $a \neq 0$, másodfokú egyenlet bal oldala felbontható szorzat alakba, maga az egyenlet pedig az $x(ax+b) = 0$ alakban, ahonnan $x = 0$ vagy $ax+b = 0$ kell, hogy teljesüljön. Ezek lineáris egyenletek, megoldásaik pedig $x_1 = 0$ és $x_2 = -\frac{b}{a}$.

3° Az $ax^2 + c = 0$, $a \neq 0$, másodfokú egyenlet bal oldalán levő kifejezés is tényezőkre bontható $ax^2 + c = a \left(x^2 + \frac{c}{a}\right) = a \left(x^2 - \left(-\frac{c}{a}\right)\right) = a \left(x - \sqrt{-\frac{c}{a}}\right) \left(x + \sqrt{-\frac{c}{a}}\right)$ módon, a kapott szorzat pedig csak akkor nulla, ha valamelyik tényező nulla, azaz ha az $x - \sqrt{-\frac{c}{a}} = 0$ vagy $x + \sqrt{-\frac{c}{a}} = 0$ egyenletek valamelyike teljesül, így a megoldások $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ és $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$. Az a és c együtthatók előjelétől függően a megoldások lehetnek valós vagy komplex számok.

7.2. Példa. Az $5x^2 = 0$ egyenletnek a megoldásai $x_1 = 0$ és $x_2 = 0$, megoldáshalmaza pedig $M = \{0\}$.

7.3. Példa. A $4x^2 - 3x = 0$ másodfokú egyenlet tényezőkre bontás után $x(4x - 3) = 0$ alakú, ahonnan $x = 0$ vagy $4x - 3 = 0$. Ezeknek a lineáris egyenleteknek és az eredeti másodfokú egyenletnek a megoldásai $x_1 = 0$ és $x_2 = \frac{3}{4}$, a megoldáshalmaz $M = \left\{0, \frac{3}{4}\right\}$.

7.4. Példa. Az $5x^2 - 30 = 0$ másodfokú egyenletet eloszthatjuk 5-tel, majd az $x^2 - 6 = 0$ egyenlet bal oldala tényezőkre bontható, s ekkor $(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6}) = 0$. Innen $x - \sqrt{6} = 0$ vagy $x + \sqrt{6} = 0$, melyek megoldásai az $x_1 = \sqrt{6}$ és $x_2 = -\sqrt{6}$ valós számok. Az eredeti egyenlet megoldáshalmaza most $M = \{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}$.

7.5. Példa. Az $x^2 + 4 = 0$ másodfokú egyenlet $x^2 - 4i^2 = 0$ alakban is felírható, Az előző példához hasonlóan a bal oldal tényezőkre bontható, s ekkor az $(x - 2i)(x + 2i) = 0$ alakból azt kapjuk, hogy $x - 2i = 0$ vagy $x + 2i = 0$, ahonnan megkapjuk az $x_1 = 2i$ és $x_2 = -2i$ komplex megoldásokat, a megoldáshalmaz pedig $M = \{-2i, 2i\}$.

7.1.2. A teljes másodfokú egyenlet megoldóképlete

A teljes másodfokú egyenlet két megoldása kiszámítható egy képlettel, amelyet a másodfokú egyenlet megoldóképletének, vagy röviden csak „gyökképletnek” nevezünk.

7.1. Tétel. Az $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, teljes másodfokú egyenlet megoldóképlete az

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{formulapár,}$$

melyeket a rövidebb felírás miatt így szoktunk írni: $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Bizonyítás. Mivel $a \neq 0$, az egyenlet bal oldala a megfelelő alakra transzformálható:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\iff a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0 \\ &\iff a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = 0 \\ &\iff a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0 \\ &\iff a \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0. \end{aligned}$$

Innen

$$x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0 \quad \text{vagy} \quad x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0,$$

ezek megoldásával pedig

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

◇

7.3. Definíció. A másodfokú egyenlet megoldóképletében a négyzetgyök alatti $b^2 - 4ac$ kifejezést diszkriminánsnak nevezzük és D -vel jelöljük.

7.6. Példa. A $3x^2 - 7x - 6 = 0$ másodfokú egyenletben minden együttható nullától különböző, ezért a megoldásokat a gyökképlettel keressük. Mivel $a = 3$, $b = -7$ és $c = -6$, így a gyökképlet szerint

$$x_{1/2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 3(-6)}}{6} = \frac{7 \pm \sqrt{121}}{6} = \frac{7 \pm 11}{6},$$

illetve a megoldások $x_1 = 3$ és $x_2 = -\frac{2}{3}$.

7.7. Példa. Az $x^2 - 14x + 49 = 0$ másodfokú egyenlet megoldásai a képlet szerint

$$x_{1/2} = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 4 \cdot 49}}{2} = \frac{14 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{14 \pm 0}{2},$$

vagyis a megoldások $x_1 = x_2 = 7$.

7.8. Példa. Az $x^2 + x + 1 = 0$ teljes másodfokú egyenletben $a = b = c = 1$, így a gyökképlet szerint $x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, vagyis ebben az esetben a megoldások az $x_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ és az $x_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ konjugált komplex számok.

A megoldáshalmaz: $M = \left\{ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$.

Amint azt az előbbi példákban láthattuk, a diszkrimináns értékétől és előjelétől függően, a másodfokú egyenlet megoldásai lehetnek különböző vagy egyenlő valós számok, illetve konjugált komplex számok. A három esetet a következő tételben foglaljuk össze.

7.2. Tétel. Legyen D az $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, másodfokú egyenlet diszkriminánsa, x_1 és x_2 pedig az egyenlet megoldásai (vagy gyökei).

1° Ha $D > 0$, akkor x_1 és x_2 különböző valós gyökök, azaz $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ és $x_1 \neq x_2$.

2° Ha $D = 0$, akkor x_1 és x_2 egyenlő valós gyökök, azaz $x_1 = x_2 \in \mathbf{R}$.

3° Ha $D < 0$, akkor x_1 és x_2 konjugált komplex gyökök, azaz $x_1, x_2 \in \mathbf{C}$ és $x_1 = \overline{x_2}$.

7.4. Definíció. Legyen D az $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, másodfokú egyenlet diszkriminánsa, x_1 és x_2 pedig az egyenlet megoldásai (vagy gyökei). Ha $D = 0$, akkor az $x_1 = x_2 \in \mathbf{R}$ miatt gyakorlatilag egyetlen x_1 valós gyököt kétszeres gyöknek vagy kettős gyöknek nevezzük.

7.9. Példa. Határozzuk meg az $mx^2 + (3m-2)x + 2 = 0$ egyenletben az m valós paraméter értékét úgy, hogy az egyenletnek egyenlő valós megoldásai legyenek, azaz $x_1 = x_2 \in \mathbf{R}$. A feltétel szerint ez akkor teljesül, ha $D = 0$, tehát m értékét úgy kell megválasztani, hogy a diszkrimináns nullával legyen egyenlő. Mivel

$$D = b^2 - 4ac = (3m - 2)^2 - 4m \cdot 2 = 9m^2 - 20m + 4, \quad \text{ezért} \quad 9m^2 - 20m + 4 = 0$$

kell, hogy teljesüljön. Innen

$$m_{1/2} = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 144}}{18} = \frac{20 \pm \sqrt{256}}{18} = \frac{20 \pm 16}{18},$$

vagyis a megfelelő m paraméterek $m_1 = 2$ és $m_2 = \frac{2}{9}$. Valóban, ha $m = 2$, akkor $2x^2 + 4x + 2 = 0$, illetve $x^2 + 2x + 1 = 0$, ahonnan $(x + 1)^2 = 0$ miatt $x_1 = x_2 = -1$.

Ha viszont $m = \frac{2}{9}$, akkor az egyenlet $\frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 2 = 0$, illetve $\frac{9}{2}$ -del való beszorzás után $x^2 - 6x + 9 = 0$, illetve $(x - 3)^2 = 0$, ahonnan $x_1 = x_2 = 3$.

7.10. Példa. Vizsgáljuk ki, hogy milyen n valós paraméterértékek mellett lesznek az

$$(n + 3)x^2 - 2(n + 1)x + n - 5 = 0$$

egyenlet megoldásai valós, illetve komplex számok. Most a diszkrimináns előjelét kell kivizsgálni, vagyis hogy mikor pozitív vagy nulla, és mikor negatív. Mivel

$$D = b^2 - 4ac = 4(n + 1)^2 - 4(n + 3)(n - 5) = 4[n^2 + 2n + 1 - n^2 + 2n + 15] = 16(n + 4),$$

ezért

$$D \geq 0 \iff 16(n + 4) \geq 0 \iff n + 4 \geq 0 \iff n \geq -4,$$

$$D < 0 \iff 16(n + 4) < 0 \iff n + 4 < 0 \iff n < -4.$$

Ez azt jelenti, hogy az adott egyenlet megoldásai valós számok, ha az n paraméter értékei nem kisebbek -4 -nél, viszont az adott egyenlet megoldásai konjugált komplex számok, ha az n paraméter értékei -4 -nél kisebbek számok.

Megjegyezzük, hogy a másodfokú egyenlet együtthatóit választhatjuk a komplex számok halmazából is (pl. $z^2 + (1 - i)z - i = 0$), a megoldóképlet akkor is érvényes, csak helyesen kell értelmezni benne a komplex szám négyzetgyökét. Ebben az esetben azonban a gyökök valós vagy komplex számhalmazhoz való tartozása nem függ a diszkrimináns előjelétől.

7.11. Példa. A $z^2 + (1 - i)z - i = 0$ egyenlet megoldásaihoz egyszerűbb módon is eljuthatunk. Végezzük el a következő ekvivalens átalakításokat:

$$\begin{aligned} z^2 + (1 - i)z - i = 0 &\iff z^2 + z - iz - i = 0 \\ &\iff z(z + 1) - i(z + 1) = 0 \\ &\iff (z + 1)(z - i) = 0 \\ &\iff z + 1 = 0 \quad \text{vagy} \quad z - i = 0 \\ &\iff z_1 = -1 \quad \text{és} \quad z_2 = i. \end{aligned}$$

A megoldáshalmaz tehát $M = \{-1, i\}$, amely ebben az esetben egy valós és egy komplex gyököt tartalmaz.

7.1.3. Viéte képletek

Az előbbieken láttuk, hogy a másodfokú egyenlet megoldásait az együtthatókkal fejezzük ki. A megoldóképleten kívül más összefüggések is léteznek a másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói között. Ezek a képletek a francia matematikus François Viète (1540-1603) nevéhez fűződnek és ezért Viéte képleteknek hívjuk őket.

7.3. Tétel. *Legyenek a , b és c olyan tetszőleges valós számok, hogy $a \neq 0$.*

x_1 és x_2 az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet megoldásai akkor és csak akkor, ha érvényesek a Viéte képletek:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{és} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Bizonyítás. (\Rightarrow) Bizonyítsuk be először azt az implikációt, hogy ha x_1 és x_2 az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet megoldásai akkor érvényesek a Viéte képletek. Legyen

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ekkor a gyökök összege

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a},$$

szorzatuk pedig

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a},$$

és ezzel az adott implikációt beláttuk.

(\Leftarrow) Bizonyítsuk most be a másik irányú implikációt: ha az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet esetén érvényesek az

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{és} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

összefüggések, akkor a képletekben szereplő x_1 és x_2 az egyenlet gyökei. A Viéte képletekből felírható, hogy $b = -a(x_1 + x_2)$ és $c = ax_1 \cdot x_2$. Helyettesítsük be ezeket az összefüggéseket az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenletbe a b és c együtthatók helyére. Ekkor az $ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1 \cdot x_2 = 0$ egyenletet kapjuk, ahonnan kiemelve az a együtthatót megkapjuk, hogy $a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2) = 0$. További rendezés után az egyenlet az $a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1 \cdot x_2) = 0$, illetve az $a(x(x - x_1) - x_2(x - x_1) \cdot x_2) = 0$, végül pedig az $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ alakra hozható, amelyből $a \neq 0$ miatt vagy $x - x_1 = 0$ vagy pedig $x - x_2 = 0$. Innen $x = x_1$ vagy $x = x_2$ következik, tehát x_1 és x_2 valóban az adott másodfokú egyenlet gyökei. \diamond

A második rész bizonyításában azt is beláttuk, hogy mindig felírható egy olyan másodfokú egyenlet, amelynek megoldásai adott x_1 és x_2 számok. Ennek alakja:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0.$$

7.12. Példa. Ha fel szeretnénk írni azt a másodfokú egyenletet, amelynek gyökei az $x_1 = -\frac{2}{3}$ és $x_2 = \frac{4}{5}$ számok, akkor legegyszerűbb, ha kiszámítjuk a gyökök összegét és szorzatát, ezek

$$x_1 + x_2 = -\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{-10 + 12}{15} = \frac{2}{15} \quad \text{és} \quad x_1 \cdot x_2 = -\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{8}{15},$$

majd behelyettesítjük a kapott eredményeket az $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$ egyenletbe. Ekkor az

$$x^2 - \frac{2}{15}x - \frac{8}{15} = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk, amelyet 15-tel való beszorzás után írhatunk fel a legegyszerűbb alakban, ez pedig

$$15x^2 - 2x - 8 = 0.$$

7.13. Példa. Írjuk fel azt a másodfokú egyenletet, amelynek gyökei $x_1 = -6 + 2\sqrt{2}$ és $x_2 = -6 - 2\sqrt{2}$. Mivel most a gyökök összege $x_1 + x_2 = -6 + 2\sqrt{2} - 6 - 2\sqrt{2} = -12$, szorzatuk pedig $x_1 \cdot x_2 = (-6 + 2\sqrt{2})(-6 - 2\sqrt{2}) = 36 - 8 = 28$, így a keresett egyenlet

$$x^2 + 12x + 28 = 0.$$

7.14. Példa. Írjuk most fel azt a másodfokú egyenletet, amelynek egyik gyöke az $x_1 = 1 - 5i$ komplex szám. Mivel tudjuk, hogy a valós együtthatós másodfokú egyenlet gyökei konjugált komplex párok formájában jelentkeznek, ezért a másik gyök csak $x_2 = 1 + 5i$ lehet. Ekkor $x_1 + x_2 = 2$, $x_1 \cdot x_2 = 1 + 25 = 26$, a keresett másodfokú egyenlet pedig

$$x^2 - 2x + 26 = 0.$$

A Viéte képletek segítségével megoldható minden olyan feladat is, amelyben a másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói közötti valamilyen összefüggés adott.

7.15. Példa. Határozzuk meg az $kx^2 + (k+2)x + 3 = 0$ másodfokú egyenletben a k valós paraméter értékét úgy, hogy az egyenlet gyökei ellentett számok legyenek. Ha x_1 és x_2 az egyenlet gyökei, akkor $x_2 = -x_1$ kell, hogy teljesüljön. Mivel az egyik Viéte képlet alapján $x_1 + x_2 = -\frac{k+2}{k}$, ezért az $x_2 = -x_1$ feltétel alapján $-\frac{k+2}{k} = 0$, ahonnan $k = -2$. Valóban, ha $k = -2$, akkor az egyenlet a $-2x^2 + 3 = 0$ alakot veszi fel, ahonnan $x^2 = \frac{3}{2}$, a gyökök pedig az $x_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}$ és $x_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ ellentett számok.

7.16. Példa. Határozzuk meg az $mx^2 - 3mx + 2 = 0$ egyenletben az m valós paraméter értékét úgy, hogy a gyökök négyzeteinek összege 5 legyen, azaz $x_1^2 + x_2^2 = 5$ teljesüljön. A Viéte képletekből tudjuk, hogy $m \neq 0$ esetén $x_1 + x_2 = -\frac{-3m}{m} = 3$ és $x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{m}$. Mivel

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 9 - \frac{4}{m}, \quad \text{ezért} \quad 9 - \frac{4}{m} = 5, \quad \text{illetve} \quad m = 1$$

kell, hogy teljesüljön. A keresett másodfokú egyenlet tehát $x^2 - 3x + 2 = 0$ alakú, gyökei az $x_1 = 1$ és $x_2 = 2$ számok, amelyek négyzetösszege valóban 5, hiszen $1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$.

A Viéte képletek felhasználásával lehetőségünk nyílik arra, hogy a másodfokú egyenlet megoldása nélkül kiszámítsuk egy gyökökkel kapcsolatos kifejezés értékét.

7.17. Példa. Legyenek x_1 és x_2 az $x^2 - 7x + 10 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei. Számoljuk ki a gyökök kiszámolása nélkül a $3x_1^2 + 7x_1x_2 + 3x_2^2$ kifejezés értékét. Mivel most a Viéte képletek alapján $x_1 + x_2 = -\frac{-7}{1} = 7$ és $x_1 \cdot x_2 = \frac{10}{1} = 10$, ezért

$$3x_1^2 + 7x_1x_2 + 3x_2^2 = 3[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2] + 7x_1x_2 = 3(x_1 + x_2)^2 + x_1x_2 = 3 \cdot 7^2 + 10 = 157.$$

7.1.4. A másodfokú trinom tényezőkre bontása

7.4. Tétel. Legyenek a , b és c tetszőleges valós számok és $a \neq 0$. Ha x_1 és x_2 az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet megoldásai akkor érvényes, hogy

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Bizonyítás. Bizonyítsuk az állítást a Viéte képletek segítségével.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2) \\ &= a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) \\ &= a(x(x - x_1) - x_2(x - x_1)) \\ &= a(x - x_1)(x - x_2). \end{aligned}$$

◇

7.18. Példa. Ily módon a $12x^2 - 5x - 3$ másodfokú trinom könnyen tényezőkre bontható. Az $12x^2 - 5x - 3 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei most $x_1 = -\frac{1}{3}$ és $x_2 = \frac{3}{4}$, ezért

$$12x^2 - 5x - 3 = 12\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right) = 3 \cdot 4\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right) = (3x + 1)(4x - 3).$$

7.19. Példa. A $\frac{2x^2 - 5x + 3}{4x^2 - 4x - 3}$ törtkifejezés egyszerűsítésénél is jól alkalmazható a másodfokú trinomok tényezőkre bontása. A számláló gyökei $x_1 = \frac{3}{2}$ és $x_2 = 1$, a nevező gyökei pedig $x_3 = \frac{3}{2}$ és $x_4 = -\frac{1}{2}$. Ekkor

$$\frac{2x^2 - 5x + 3}{4x^2 - 4x - 3} = \frac{2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x - 1)}{4\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)} = \frac{x - 1}{2x + 1}, \quad \text{ahol } x \neq \frac{3}{2} \text{ és } x \neq -\frac{1}{2}.$$

7.1.5. A másodfokú egyenlet valós gyökeinek előjele

A Viéte képletek az eddig bemutatott alkalmazások mellett felhasználhatók még a másodfokú egyenlet gyökeinek előjelvizsgálatában is.

7.5. Tétel. *Legyenek x_1 és x_2 a valós együtthatós $ax^2 + bx + x = 0$ ($a \neq 0$) másodfokú egyenlet gyökei. Az x_1 és x_2 gyökök pozitív valós számok akkor és csak akkor, ha*

$$b^2 - 4ac \geq 0 \quad \text{és} \quad \frac{b}{a} < 0 \quad \text{és} \quad \frac{c}{a} > 0.$$

Bizonyítás. (\implies) Legyenek x_1 és x_2 az $ax^2 + bx + x = 0$ ($a \neq 0$) másodfokú egyenlet pozitív gyökei. A gyökök most valósak, ezért a diszkrimináns nemnegatív, tehát $b^2 - 4ac \geq 0$ teljesül. Mivel mindkét gyök pozitív, ezért az összegük és szorzatuk is pozitív, tehát $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$, ezért $\frac{b}{a} < 0$, és $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0$.

(\impliedby) Fordítva, ha $b^2 - 4ac \geq 0$ teljesül, akkor az x_1 és x_2 gyökök valós számok. A $\frac{b}{a} < 0$ és $\frac{c}{a} > 0$ feltételek a Viéte képletek alapján azt jelentik, hogy $x_1 + x_2 > 0$ és $x_1 \cdot x_2 > 0$. Ha két valós szám szorzata pozitív, akkor a számok azonos előjelűek, ha összegük is pozitív, akkor pedig mindkettő pozitív kell legyen. \diamond

Hasonló módon igazolható a következő tétel is.

7.6. Tétel. *Legyenek x_1 és x_2 a valós együtthatós $ax^2 + bx + x = 0$ ($a \neq 0$) másodfokú egyenlet gyökei. Az x_1 és x_2 gyökök negatív valós számok akkor és csak akkor, ha*

$$b^2 - 4ac \geq 0 \quad \text{és} \quad \frac{b}{a} > 0 \quad \text{és} \quad \frac{c}{a} < 0.$$

A harmadik eset, amikor a gyökök valós és különböző előjelű számok, nem olyan egyértelmű, mint az előző kettő. Az a feltétel egyértelmű, hogy a diszkrimináns nemnegatív szám kell legyen, hiszen valós gyökökről van szó most is, az is egyértelmű, hogy a gyökök szorzata negatív, hiszen különböző előjelűek ($\frac{c}{a} < 0$), viszont az összegük előjele attól függ, hogy melyiknek nagyobb az abszolút értéke és ezt nem tudjuk eldönteni a gyökök ismerete nélkül.

Egyértelmű viszont az az eset, amikor $\frac{c}{a} = 0$. Ekkor ugyanis $c = 0$, az egyenlet $ax^2 + bx = 0$ hiányos alakú másodfokú egyenlet, megoldásai pedig $x_1 = 0$ és $x_2 = -\frac{b}{a}$.

7.20. Példa. A $23x^2 - 30x - 8 = 0$ másodfokú egyenlet gyökeiről akkor is el tudjuk dönteni, hogy milyen előjelűek, ha nem számoljuk ki őket. Mivel $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{8}{23} < 0$, ezért a gyökök különböző előjelűek, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-30}{23} > 0$ miatt pedig megállapíthatjuk, hogy a pozitív gyök abszolút értéke nagyobb a negatív gyök abszolút értékénél.

7.21. Példa. Határozzuk meg a k valós paraméter értékét úgy, hogy a $4x^2 + 2x + 1 - k = 0$ másodfokú egyenlet gyökei negatív számok legyenek. Ekkor $\frac{c}{a} = \frac{1-k}{4} > 0$ kell, hogy teljesüljön, és ebből $k < 1$. Mivel $b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 4(1 - k) \geq 0$ is igaz kell legyen,

ebből azt kapjuk, hogy $1 - 4 + 4k \geq 0$, illetve $k \geq \frac{3}{4}$. Ellenőrizzük a harmadik feltételt is. $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{2}{4} < 0$ minen k esetén teljesül, tehát a megoldás a $\left[\frac{3}{4}, 1\right)$ balról zárt, jobbról nyitott intervallum.

7.22. Példa. Határozzuk meg az m valós paraméter értékét úgy, hogy az

$$(m-3)x^2 - 2(m-1)x + m+5 = 0$$

másodfokú egyenlet megoldásai különböző előjelűek legyenek. Ekkor az $\frac{c}{a} < 0$, illetve $\frac{m+5}{m-3} < 0$ és $b^2 - 4ac \geq 0$, azaz $4(m-1)^2 - 4(m-3)(m+5) \geq 0$ feltételeknek kell teljesülniük. Az $\frac{m+5}{m-3}$ hányados előjelét vizsgáljuk meg táblázattal.

	$(-\infty, -5)$	$(-5, 3)$	$(3, \infty)$
$m+5$	–	+	+
$m-3$	–	–	+
$\frac{m+5}{m-3}$	+	–	+

A táblázatból kiolvashatjuk, hogy $\frac{m+5}{m-3} < 0$, ha $-5 < m < 3$. Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza most egy intervallum, $M_1 = (-5, 3)$.

$$\begin{aligned}
 b^2 - 4ac \geq 0 &\iff 4(m-1)^2 - 4(m-3)(m+5) \geq 0 \\
 &\iff (m-1)^2 - (m-3)(m+5) \geq 0 \\
 &\iff m^2 - 2m + 1 - m^2 - 2m + 15 \geq 0 \\
 &\iff -4m + 16 \geq 0 \\
 &\iff m \leq 4.
 \end{aligned}$$

Ennek az egyenlőtlenségnek a megoldáshalmaza is intervallum, $M_2 = (-\infty, 4)$. A feladat megoldását az $M = M_1 \cap M_2 = (-5, 3)$ intervallum adja, tehát a $-5 < m < 3$ paraméterértékek a megfelelőek.

7.1.6. Másodfokú egyenletre visszavezethető egyismeretlenes egyenletek

A magasabbfokú vagy az irracionális egyenletek közül néhány, megfelelő helyettesítéssel visszavezethető másodfokú egyenletre. Ilyenek például a következők is.

7.23. Példa. Oldjuk meg az $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 15$ negyedfokú egyenletet. Szorozzuk be az első tényezőt a negyedikkel, majd a második tényezőt a harmadikkal. Ekkor az $(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) = 15$ egyenletet kapjuk. Vezessük be az $x^2 - 5x + 4 = t$ helyettesítést. Ekkor az előző egyenlet felírható $t(t+2) = 15$, illetve $t^2 + 2t - 15 = 0$ alakban. Most egy t -ismeretlenű másodfokú egyenletet kaptunk, amelynek megoldásai $t_1 = 3$ és $t_2 = -5$. Visszatérve az eredeti x ismeretlenre és behelyettesítve a kapott t értékeket, az $x^2 - 5x + 4 = 3$ és az $x^2 - 5x + 4 = -5$ másodfokú egyenleteket kapjuk. Az első egyenlet megoldásai $x_1 = \frac{5 - \sqrt{21}}{2}$ és $x_2 = \frac{5 + \sqrt{21}}{2}$, a második egyenlet megoldásai

pedig $x_3 = \frac{5 - i\sqrt{11}}{2}$ és $x_4 = \frac{5 + i\sqrt{11}}{2}$. Így az eredeti egyenlet megoldáshalmaza

$$M = \left\{ \frac{5 - \sqrt{21}}{2}, \frac{5 + \sqrt{21}}{2}, \frac{5 - i\sqrt{11}}{2}, \frac{5 + i\sqrt{11}}{2} \right\}.$$

A magasabbfokú egyenletek egy jellegzetes típusát alkotják az

$$a \cdot x^{2n} + b \cdot x^n + c = 0, \quad n \in \mathbf{N}, \quad n \geq 2$$

alakú trinom egyenletek, amelyek $x^n = t$ helyettesítéssel másodfokú egyenletre vezethetők vissza. Ezek közül a legegyszerűbb a negyedfokú egyenlet.

7.5. Definíció. Legyenek $a, b, c \in \mathbf{R}$ és $a \neq 0$. Ekkor az $ax^4 + bx^2 + c = 0$ negyedfokú egyenletet bikvadratikus egyenletnek nevezzük.

A bikvadratikus egyenlet $x^2 = t$ helyettesítéssel mindig másodfokú egyenletre vezethető.

7.24. Példa. Az $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ bikvadratikus egyenlet $x^2 = t$ helyettesítés után a $t^2 - 3t - 4 = 0$ másodfokú egyenletre vezetődik vissza. Ennek gyökei $t_1 = -1$ és $t_2 = 4$. Az $x^2 = -1$ egyenletből megkapjuk az $x_1 = i$ és $x_2 = -i$ megoldásokat, az $x^2 = 4$ egyenletből pedig $x_3 = 2$ és $x_4 = -2$. Az eredeti egyenlet megoldáshalmaza $M = \{-2, 2, -i, i\}$.

7.25. Példa. Oldjuk meg az előző példához hasonlóan az $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$ egyenletet. Vezessük be az $x^3 = t$ helyettesítést. Ezzel az egyenletet a $t^2 - 9t + 8 = 0$ másodfokú egyenletre vezettük vissza, amelynek megoldásai $t_1 = 1$ és $t_2 = 8$. Az $x^3 = 1$ egyenletből $x^3 - 1 = 0$ harmadfokú egyenlet adódik, ahonnan felbontás után $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$, illetve $x - 1 = 0$ vagy $x^2 + x + 1 = 0$ adódik. Az első egyenlet megoldása $x_1 = 1$, a másodfokú megoldásai pedig $x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ és $x_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$. Az $x^3 = 8$ egyenletből $x^3 - 8 = 0$, illetve $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$ adódik, ahonnan a megoldások $x - 2 = 0$ vagy $x^2 + 2x + 4 = 0$ miatt: $x_4 = 2$, $x_5 = -1 + i\sqrt{3}$ és $x_6 = -1 - i\sqrt{3}$. A megoldáshalmaz tehát hat elemből áll és

$$M = \left\{ 1, 2, -1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

A következő fontos egyenletek, melyek szintén visszavezethetők másodfokú egyenletre, az úgynevezett szimmetrikus (vagy reciprok) és asszimmetrikus egyenletek.

7.6. Definíció. Legyen $n \in \mathbf{N}$ és $n \geq 2$. Ekkor az olyan valós együtthatós

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n = 0$$

alakú egyenleteket, melyekben x^{n-k} és x^k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) együtthatói egyenlőek, szimmetrikus egyenleteknek nevezzük.

7.7. Definíció. Legyen $n \in \mathbf{N}$ és $n \geq 2$. Ekkor az olyan valós együtthatós

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots - a_{n-2} x^2 - a_{n-1} x - a_n = 0$$

alakú egyenleteket, melyekben x^{n-k} és x^k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) együtthatói ellentett számok, asszimmetrikus egyenleteknek nevezzük.

Ezek az egyenletek a reciprok megnevezést abból a tényből kifolyólag kapták, hogy minden megoldás reciproka is megoldása az egyenletnek.

A szimmetrikus egyenleteket az $x + \frac{1}{x} = t$ helyettesítéssel oldhatjuk meg. Vegyük észre, hogy ekkor:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = t^2, \quad \text{ahonnan} \quad x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = t^2 \quad \text{és} \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2,$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = t^3, \quad \text{ahonnan} \quad x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} = t^3 \quad \text{és} \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t.$$

7.1. Megjegyzés. Fontos belátni, hogy a páratlan kitevőjű szimmetrikus egyenletek egyik megoldása mindig $x_1 = -1$, míg a páratlan kitevőjű asszimmetrikus egyenletek egyik megoldása mindig $x_1 = 1$.

7.26. Példa. Oldjuk meg a $4x^4 + 3x^3 - 14x^2 + 3x + 4 = 0$ negyedfokú egyenletet. Vegyük észre, hogy ez egy páros kitevőjű szimmetrikus egyenlet. A középső tagnak nincs párja és itt x a másodikon van. Osszuk el az egyenletet x^2 -tel. Ekkor

$$4x^2 + 3x - 14 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} = 0, \quad \text{illetve} \quad 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 14 = 0$$

egyenlet adódik. A fenti helyettesítést bevezetve kapjuk, hogy

$$4(t^2 - 2) + 3t - 14 = 0, \quad \text{vagyis} \quad 4t^2 + 3t - 22 = 0.$$

A kapott másodfokú egyenlet gyökei $t_1 = -\frac{11}{4}$ és $t_2 = 2$. Az $x + \frac{1}{x} = -\frac{11}{4}$ visszahelyettesítésből kapjuk a $4x^2 + 11x + 4 = 0$ másodfokú egyenletet, amelynek megoldásai $x_1 = \frac{-11 + \sqrt{57}}{8}$ és $x_2 = \frac{-11 - \sqrt{57}}{8}$, az $x + \frac{1}{x} = 2$ visszahelyettesítésből pedig az $x^2 - 2x + 1 = 0$ másodfokú egyenlet következik, amelynek megoldásai $x_3 = x_4 = 1$. Az eredeti egyenlet megoldáshalmaza

$$M = \left\{1, \frac{-11 - \sqrt{57}}{8}, \frac{-11 + \sqrt{57}}{8}\right\}.$$

Arról is könnyen meggyőződhetünk, hogy $\frac{-11 - \sqrt{57}}{8}$ reciprok értéke $\frac{-11 + \sqrt{57}}{8}$. Valóban,

$$\frac{8}{-11 - \sqrt{57}} = \frac{8}{-11 - \sqrt{57}} \cdot \frac{-11 + \sqrt{57}}{-11 + \sqrt{57}} = \frac{8(-11 + \sqrt{57})}{121 - 57} = \frac{-11 + \sqrt{57}}{8}.$$

7.27. Példa. A $4x^5 + x^4 - 5x^3 - 5x^2 + x + 4 = 0$ egyenlet páratlan kitevőjű (ötödfokú) szimmetrikus egyenlet, ezért belátható, hogy egy megoldása $x_1 = 1$. A Horner elrendezést felhasználva kapjuk, hogy

1	4	1	-5	-5	1	4
4	-3	-2	-3	4	0	

azaz $4x^5 + x^4 - 5x^3 - 5x^2 + x + 4 = (x-1)(4x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 3x + 4)$ alapján a

$$(x-1)(4x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 3x + 4) = 0$$

egyenletet, amelyből két egyenlet adódik

$$x-1=0 \quad \text{vagy} \quad 4x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 3x + 4 = 0.$$

Az első egyenlet megoldása $x_1 = 1$, a második pedig (negyedfokú) páros kitevőjű szimmetrikus egyenlet, ezért osszuk el mindkét oldalát x^2 -tel. Ekkor

$$4x^2 - 3x - 2 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} = 0, \quad \text{illetve} \quad 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2 = 0$$

egyenlet következik, ahonnan az $x + \frac{1}{x} = t$ helyettesítéssel a

$$4(t^2 - 2) - 3t - 2 = 0, \quad \text{illetve} \quad 4t^2 - 3t - 10 = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek megoldásai $t_1 = 2$ és $t_2 = -\frac{5}{4}$. Visszahelyettesítés után

$$x + \frac{1}{x} = 2 \quad \text{és} \quad x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{4}$$

egyenleteket kapjuk, amelyek megfelelő beszorzással az $x^2 - 2x + 1 = 0$ és $4x^2 + 5x + 4 = 0$ másodfokú egyenleteket adják, amelynek megoldásai $x_2 = x_3 = 1$, illetve $x_4 = \frac{-5 + i\sqrt{39}}{8}$ és $x_5 = \frac{-5 - i\sqrt{39}}{8}$. Az eredeti egyenlet megoldáshalmaza tehát

$$M = \left\{ 1, \frac{-5 - i\sqrt{39}}{8}, \frac{-5 + i\sqrt{39}}{8} \right\}.$$

FELADATOK

1. Oldjuk meg az $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = 0$ egyenletet.

Megoldás. Végezzük el az egyenleten a következő ekvivalens átalakításokat:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = 0 &\iff \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2-x} - \frac{1}{2+x} \iff \\ \iff \frac{x-1+x+1}{x^2-1} = \frac{2+x-2+x}{4-x^2} &\iff \frac{2x}{x^2-1} = \frac{2x}{4-x^2} \iff \\ \iff 2x(4-x^2) = 2x(x^2-1) &\iff 2x(5-2x^2) = 0 \iff \\ \iff 2x = 0 \quad \text{vagy} \quad 5-2x^2 = 0 &\iff x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{\frac{5}{2}}, \quad x_3 = -\sqrt{\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

Az egyenlet $x \neq \pm 1$ és $x \neq \pm 2$ esetén értelmezett, így a megoldáshalmaza

$$M = \left\{ 0, -\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}} \right\}.$$

2. Határozzuk meg az $\frac{34}{1-4x^2} - \frac{2x+1}{1-2x} = \frac{1-2x}{2x+1}$ egyenlet megoldásait.

Megoldás. Az egyenlet nem értelmezett, ha $x = \frac{1}{2}$ vagy $x = -\frac{1}{2}$, ezért ezeket az értékeket kizárjuk az értelmezési tartományából. Szorozzuk be az egyenlet mindkét oldalát az $(1-2x)(1+2x)$ szorzattal. Ekkor a

$$34 - (2x+1)^2 = (1-2x)^2$$

ekvivalens egyenletet kapjuk, amelyből rendezés után a $8x^2 = 32$, illetve $x^2 = 4$ egyenlet következik, ahonnan $x_1 = 2$ és $x_2 = -2$. Mivel ezeket az értékeket nem zártuk ki az értelmezési tartományból, ezért a megoldáshalmaz $M = \{-2, 2\}$.

3. Számoljuk ki az $x^2 - (3 - 2\sqrt{2})x + 4 - 3\sqrt{2} = 0$ másodfokú egyenlet megoldásait.

Megoldás. Alkalmazzuk a megoldóképletet. Ekkor

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= \frac{3 - 2\sqrt{2} \pm \sqrt{(3 - 2\sqrt{2})^2 - 4(4 - 3\sqrt{2})}}{2} \\ x_{1/2} &= \frac{3 - 2\sqrt{2} \pm \sqrt{9 - 12\sqrt{2} + 8 - 16 + 12\sqrt{2}}}{2} \\ x_{1/2} &= \frac{3 - 2\sqrt{2} \pm 1}{2}, \quad \text{ahonnan} \quad x_1 = 2 - \sqrt{2} \quad \text{és} \quad x_2 = 1 - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Az egyenlet megoldáshalmaza $M = \{1 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}\}$.

4. Oldjuk meg az $x^2 + 2x - 3|x+1| + 3 = 0$ másodfokú egyenletet.

Megoldás. Az abszolút érték miatt két esetet kell felírni.

1° Ha $x \geq -1$, akkor $x+1 \geq 0$, az egyenlet pedig $x^2 + 2x - 3(x+1) + 3 = 0$ alakú lesz. Elvégezve a műveleteket adódik $x^2 + 2x - 3x - 3 + 3 = 0$, majd rendezés után az $x^2 - x = 0$ egyenlet. A bal oldal felbontásával kapjuk, hogy $x(x-1) = 0$, ahonnan a megoldások $x_1 = 0$ és $x_2 = 1$. Mivel a kapott megoldások benne vannak a szemlélt tartományban, ezért a megoldáshalmaz $M_1 = \{0, 1\}$.

2° Ha $x < -1$, akkor $x+1 < 0$, az egyenlet pedig az $x^2 + 2x + 3(x+1) + 3 = 0$ alakot veszi fel. Elvégezve a műveleteket adódik $x^2 + 2x + 3x + 3 + 3 = 0$, majd rendezés után az $x^2 + 5x + 6 = 0$ egyenlet. A kapott másodfokú egyenlet megoldásai $x_3 = -2$ és $x_4 = -3$. Mivel a kapott megoldások benne vannak a szemlélt tartományban, ezért a megoldáshalmaz $M_2 = \{-3, -2\}$.

Az eredeti egyenlet megoldáshalmaza a két megoldáshalmaz uniója, azaz

$$M = M_1 \cup M_2 = \{-3, -2, 0, 1\}.$$

5. Határozzuk meg a k valós paraméter értékét úgy, hogy a $(k+2)x^2 + 5x + 2 - k = 0$ másodfokú egyenlet megoldásai valósak legyenek.

Megoldás. A másodfokú egyenlet megoldásai akkor valósak, ha az egyenlet diszkriminánsa nemnegatív, azaz $D \geq 0$. Mivel

$$D = 25 - 4(k+2)(2-k) = 25 - 4(4 - k^2) = 25 - 16 + 4k^2 = 9 + 4k^2$$

és $9 + 4k^2$ minden valós k esetén pozitív értéket vesz fel, így $D > 0$ és az adott másodfokú egyenlet gyökei mindig valós számok.

6. Határozzuk meg a k valós paraméter értékét úgy, hogy a $(2k+1)x^2 + 3kx + k - 1 = 0$ másodfokú egyenletnek csak egy valós megoldása legyen.

Megoldás. A másodfokú egyenletnek akkor van egy valós megoldása, ha az egyenlet diszkriminánsa nulla, azaz $D = 0$. Mivel

$$D = 9k^2 - 4(2k+1)(k-1) = 9k^2 - 4(2k^2 - k - 1) = 9k^2 - 8k^2 + 4k + 4 = k^2 + 4k + 4,$$

ezért

$$D = 0 \iff k^2 + 4k + 4 = 0 \iff (k+2)^2 = 0 \iff k = -2.$$

Valóban, ha $k = -2$, akkor az adott egyenlet $-3x^2 - 6x - 3 = 0$, -3 -mal való beszorzás után $x^2 + 2x + 1 = 0$, illetve $(x+1)^2 = 0$ alakú, így az egyenletnek valóban csak egy megoldása van, hiszen $x_1 = x_2 = -1$. Ilyen esetben mondjuk azt, hogy kettős gyöke van az egyenletnek, a megoldáshalmaz most $M = \{-1\}$.

7. Határozzuk meg a k valós paraméter értékét úgy, hogy a $(k+3)x^2 + 7x - k + 3 = 0$ másodfokú egyenletnek konjugált komplex megoldásai legyenek.

Megoldás. A másodfokú egyenletnek akkor vannak konjugált komplex megoldásai, ha az egyenlet diszkriminánsa negatív, vagyis $D < 0$. Mivel

$$D = 49 - 4(k+3)(3-k) = 49 - 4(9 - k^2) = 49 - 36 + 4k^2 = 13 + 4k^2,$$

így $D < 0$ akkor és csakis akkor, ha $4k^2 + 13 < 0$. Mivel $4k^2 + 13$ egyetlen egy valós értékre sem ad negatív értéket, ezért az adott másodfokú egyenletnek egyetlen k valós paraméterértékre sem lesznek konjugált komplex gyökei.

8. Írjuk fel azt a másodfokú egyenletet, amelynek gyökei az

$$x_1 = \frac{1}{10 + 6\sqrt{2}} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{1}{10 - 6\sqrt{2}} \quad \text{számok.}$$

Megoldás. Az adott gyököket az $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$ egyenletbe kell behelyettesíteni. Mivel

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{10 + 6\sqrt{2}} + \frac{1}{10 - 6\sqrt{2}} = \frac{10 - 6\sqrt{2} + 10 + 6\sqrt{2}}{100 - 72} = \frac{20}{28} = \frac{5}{7}$$

$$\text{és} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{10 + 6\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{10 - 6\sqrt{2}} = \frac{1}{100 - 72} = \frac{1}{28},$$

így a keresett másodfokú egyenlet az

$$x^2 - \frac{5}{7}x + \frac{1}{28} = 0, \quad \text{illetve a} \quad 28x^2 - 20x + 1 = 0.$$

Végezzük el az ellenőrzést.

$$x_{1/2} = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 112}}{56} = \frac{20 \pm 12\sqrt{2}}{56} = \frac{5 \pm 3\sqrt{2}}{14}$$

$$x_{1/2} = \frac{5 \pm 3\sqrt{2}}{14} \cdot \frac{5 \mp 3\sqrt{2}}{5 \mp 3\sqrt{2}} = \frac{25 - 18}{14(5 \mp 3\sqrt{2})} = \frac{7}{14(5 \mp 3\sqrt{2})}$$

$$x_{1/2} = \frac{1}{10 \mp 6\sqrt{2}}, \quad \text{ahonnan} \quad x_1 = \frac{1}{10 - 6\sqrt{2}} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{1}{10 + 6\sqrt{2}}.$$

9. Legyen p tetszőleges valós szám. A $2x^2 - 3px - 2 = 0$ másodfokú egyenlet megoldása nélkül határozzuk meg az $x_1^3 + x_2^3$ kifejezés értékét, ahol x_1 és x_2 az adott másodfokú egyenlet gyökei.

Megoldás. Alkalmazzuk az $x_1 + x_2 = -\frac{-3p}{2} = \frac{3p}{2}$ és $x_1 \cdot x_2 = \frac{-2}{2} = -1$ Viéte képleteket a megoldásban, ezért írjuk fel az $x_1^3 + x_2^3$ kifejezést $x_1 + x_2$ és $x_1 \cdot x_2$ segítségével.

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 &= (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) \\ &= (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) \\ &= \frac{3p}{2} \left(\left(\frac{3p}{2} \right)^2 - 3 \cdot (-1) \right) \\ &= \frac{3p}{2} \left(\frac{9p^2}{4} + 3 \right) \\ &= \frac{27p^3}{8} + \frac{9p}{2}. \end{aligned}$$

10. Egyszerűsítsük a $\frac{3x^2 + 2x^3 - x^4}{4x^3 + 10x^2 - 6x}$ törtkifejezést.

Megoldás. Először emeljünk ki $-x^2$ -et a számlálóban és $2x$ -et a nevezőben, majd bontsuk lineáris tényezőkre az így kapott másodfokú trinomokat.

$$\frac{3x^2 + 2x^3 - x^4}{4x^3 + 10x^2 - 6x} = \frac{x^2(x^2 + 2x - 3)}{2x(2x^2 + 5x - 3)} = \frac{-x(x-1)(x+3)}{2(2x-1)(x+3)} = \frac{-x(x-1)}{2(2x-1)},$$

ahol $x \neq 0$, $x \neq -3$, és $x \neq -\frac{1}{2}$. Mivel az $x^2 + 2x - 3 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei $x_1 = 1$ és $x_2 = -3$, ezért a számlálóban levő másodfokú trinom felbontása $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$. Mivel a $2x^2 + 5x - 3 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei $x_1 = \frac{1}{2}$ és $x_2 = -3$, ezért a nevezőben levő másodfokú trinom felbontása $2x^2 + 5x - 3 = 2 \left(x - \frac{1}{2} \right) (x - 3) = (2x - 1)(x - 3)$.

11. Egyszerűsítsük a $\frac{2x^2 + x - 3}{2x^2 - 3x + 1} : \frac{4x^2 + 8x + 3}{2x^2 - 3x - 2}$ törtkifejezést.

Megoldás. A $2x^2 + x - 3 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei $x_1 = 1$ és $x_2 = -\frac{3}{2}$, ezért a másodfokú trinom felbontása $2x^2 + x - 3 = 2(x-1) \left(x + \frac{3}{2} \right) = (x-1)(2x+3)$. A $2x^2 - 3x + 1 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei most $x_1 = 1$ és $x_2 = \frac{1}{2}$, ezért az adott másodfokú trinom felbontása $2x^2 + x + 1 = 2(x-1) \left(x - \frac{1}{2} \right) = (x-1)(2x-1)$. A $4x^2 + 8x + 3 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei $x_1 = -\frac{1}{2}$ és $x_2 = -\frac{3}{2}$, így a másodfokú trinom felbontása $4x^2 + 8x + 3 = 4 \left(x + \frac{1}{2} \right) \left(x + \frac{3}{2} \right) = (2x+1)(2x+3)$. Végül a

$2x^2 - 3x - 2 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei $x_1 = 2$ és $x_2 = -\frac{1}{2}$, ezért a másodfokú trinom felbontása $2x^2 - 3x - 2 = 2(x - 2) \left(x + \frac{1}{2}\right) = (x - 2)(2x + 1)$. Ekkor

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 + x - 3}{2x^2 - 3x + 1} &: \frac{4x^2 + 8x + 3}{2x^2 - 3x - 2} = \frac{2x^2 + x - 3}{2x^2 - 3x + 1} \cdot \frac{2x^2 - 3x - 2}{4x^2 + 8x + 3} = \\ &= \frac{(x - 1)(2x + 3)}{(x - 1)(2x - 1)} \cdot \frac{(x - 2)(2x + 1)}{(2x + 1)(2x + 3)} = \frac{2x + 3}{2x - 1} \cdot \frac{x - 2}{2x + 3} = \frac{x - 2}{2x - 1}, \end{aligned}$$

ahol $x \neq 1$, $x \neq 2$, $x \neq \pm\frac{1}{2}$ és $x \neq \pm\frac{3}{2}$.

12. A p valós paraméter mely értékeire lesznek az $x^2 + 2(p + 1)x + 9p - 5 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei negatív számok?

Megoldás. Legyenek x_1 és x_2 az $x^2 + 2(p + 1)x + 9p - 5 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei, D pedig az adott egyenlet diszkriminánsa. Ha $x_1 < 0$ és $x_2 < 0$, akkor $D \geq 0$, $x_1 + x_2 < 0$ és $x_1 \cdot x_2 > 0$. A Viéte képletek alapján

$$x_1 + x_2 = -2(p + 1) < 0 \quad \text{és} \quad x_1 \cdot x_2 = 9p - 5 > 0, \quad \text{azaz} \quad p > -1 \quad \text{és} \quad p > \frac{5}{9}.$$

A két egyenlőtlenség egyidőben teljesül, ha $p > \frac{5}{9}$, azaz a megoldáshalmaz egy intervallum, $M_1 = \left(\frac{5}{9}, \infty\right)$. Nézzük most a diszkriminánsra vonatkozó feltételt.

$$\begin{aligned} D \geq 0 &\iff 4(p + 1)^2 - 4(9p - 5) \geq 0 \\ &\iff p^2 + 2p + 1 - 9p + 5 \geq 0 \\ &\iff p^2 - 7p + 6 \geq 0 \\ &\iff (p - 1)(p - 6) \geq 0, \end{aligned}$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 6)$	$(6, \infty)$
$p - 1$	–	+	+
$p - 6$	–	–	+
$(p - 1)(p - 6)$	+	–	+

A táblázatból kiolvashatjuk, hogy $D \geq 0$, ha $p \leq 1$ vagy $p \geq 6$. Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza most is egy intervallum, pontosabban $M_2 = (-\infty, 1] \cup [6, \infty)$.

A feltételek mindegyikét a p paraméter az M megoldáshalmazon teljesíti, ahol

$$M = M_1 \cap M_2 = \left(\frac{5}{9}, \infty\right) \cap ((-\infty, 1] \cup [6, \infty)) = \left(\frac{5}{9}, 1\right] \cup [6, \infty).$$

13. Az n valós paraméter mely értékeire lesznek az $(n - 2)x^2 - 2nx + n - 3 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei pozitív számok?

Megoldás. Legyenek x_1 és x_2 az $(n - 2)x^2 - 2nx + n - 3 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei, D pedig az adott egyenlet diszkriminánsa. Ha $x_1 > 0$ és $x_2 > 0$, akkor $D \geq 0$, $x_1 + x_2 > 0$ és $x_1 \cdot x_2 > 0$. A Viéte képletek alapján

$$x_1 + x_2 = \frac{2n}{n - 2} > 0 \quad \text{és} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{n - 3}{n - 2} > 0.$$

A kapott egyenlőtlenségek megoldásait a következő táblázatokból olvashatjuk ki:

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
n	–	+	+
$n - 2$	–	–	+
$\frac{n}{n - 2}$	+	–	+

	$(-\infty, 2)$	$(2, 3)$	$(3, \infty)$
$n - 2$	–	+	+
$n - 3$	–	–	+
$\frac{n - 2}{n - 3}$	+	–	+

Az első egyenlőtlenség teljesül, ha $n \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, a megoldáshalmaza tehát $M_1 = (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, a második egyenlőtlenség pedig akkor teljesül, ha $n \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$, a megoldáshalmaza tehát $M_2 = (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$. Nézzük most a diszkriminánsra vonatkozó feltételt.

$$\begin{aligned}
 D \geq 0 &\iff 4n^2 - 4(n - 2)(n - 3) \geq 0 \\
 &\iff n^2 - n^2 + 5n - 6 \geq 0 \\
 &\iff 5n - 6 \geq 0 \\
 &\iff n \geq \frac{6}{5},
 \end{aligned}$$

vagyis $n \in \left[\frac{6}{5}, \infty\right)$, a megoldáshalmaz $M_3 = \left[\frac{6}{5}, \infty\right)$.

A három egyenlőtlenség egyidőben teljesül az

$$M = M_1 \cap M_2 \cap M_3 = ((-\infty, 0) \cup (2, \infty)) \cap ((-\infty, 2) \cup (3, \infty)) \cap \left[\frac{6}{5}, \infty\right) = (3, \infty)$$

megoldáshalmazon, azaz a gyökök pozitív számok, ha $n > 3$.

14. Oldjuk meg az $\frac{x^2 + 2x + 7}{x^2 + 2x + 3} = x^2 + 2x + 4$ egyenletet.

Megoldás. Vezessük be az $x^2 + 2x + 3 = t$ jelölést. Ekkor $\frac{t + 4}{t} = t + 1$, ahonnan $t + 4 = t^2 + t$, illetve rendezés után a $t^2 = 4$ másodfokú egyenletet következik, amelynek megoldásai $t_1 = 2$ és $t_2 = -2$. Visszahelyettesítés után kapjuk az $x^2 + 2x + 3 = 2$ és $x^2 + 2x + 3 = -2$, illetve rendezés után az

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \quad \text{és} \quad x^2 + 2x + 5 = 0,$$

másodfokú egyenleteket, amelyek megoldásai $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = -1 + 2i$, valamint $x_4 = -1 - 2i$. Az eredeti egyenlet megoldáshalmaza tehát

$$M = \{1, -1 + 2i, -1 - 2i\}.$$

15. Oldjuk meg a $3x^4 - x^2 - 2 = 0$ egyenletet.

Megoldás. Bikvadratikus egyenletről van szó, vezessük tehát be az $x^2 = t$ helyettesítést. Ekkor a $3t^2 - t - 2 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek megoldásai $t_1 = 1$ és $t_2 = -\frac{2}{3}$. Visszahelyettesítés után adódnak az $x^2 = 1$ és $x^2 = -\frac{2}{3}$

másodfokú egyenletek, amelyek megoldásai $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -i\sqrt{\frac{2}{3}}$, valamint

$x_4 = i\sqrt{\frac{2}{3}}$. Így az eredeti egyenlet megoldáshalmaza

$$M = \left\{-1, 1, -i\sqrt{\frac{2}{3}}, i\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}.$$

16. Határozzuk meg a $2x^6 - 11x^3 - 40 = 0$ egyenlet valós gyökeit.

Megoldás. Olyan hatodfokú egyenletünk van, amely $x^3 = t$ helyettesítéssel a $2t^2 - 11t - 40 = 0$ másodfokú egyenletre vezethető vissza. A kapott t ismeretlenű egyenlet gyökei $t_1 = 8$ és $t_2 = -\frac{5}{2}$. Visszahelyettesítés után az $x^3 = 8$ és $x^3 = -\frac{5}{2}$ egyenletek adódnak, amelyek felírhatók $x^3 - 8 = 0$ és $x^3 + \frac{5}{2} = 0$, illetve

$$(x - 3)(x^2 + 2x + 4) = 0 \quad \text{és} \quad \left(x + \sqrt[3]{\frac{5}{2}}\right) \left(x^2 - x\sqrt[3]{\frac{5}{2}} + \sqrt[3]{\frac{25}{4}}\right) = 0$$

alakban. Mivel egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, ezért az $x_1 = 2$ és $x_2 = -\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$ megoldások rögtön leolvashatók. Az $x^2 + 2x + 4 = 0$ egyenlet diszkriminánsa negatív, tehát nincs valós megoldása és ugyanez a helyzet a második egyenlethez tartozó $x^2 - x\sqrt[3]{\frac{5}{2}} + \sqrt[3]{\frac{25}{4}} = 0$ egyenlettel is, így a valós megoldások halmaza

$$M = \left\{ -\sqrt[3]{\frac{5}{2}}, 2 \right\}.$$

17. Oldjuk meg a $2x^3 - 5x^2 - 5x + 2 = 0$ harmadfokú egyenletet.

Megoldás. Vegyük észre, hogy ez egy páratlan kitevőjű szimmetrikus egyenlet, így tudjuk, hogy egyik gyöke $x_1 = -1$. Mivel egy aránylag alacsony fokú egyenletről van szó, ezért próbáljunk meg csoportosítással és kiemeléssel eljutni az egyenlet bal oldalán az $x + 1$ tényezőig. A következő ekvivalens átalakításokat végezhetjük el:

$$\begin{aligned} 2x^3 - 5x^2 - 5x + 2 = 0 &\iff 2(x^3 + 1) - 5x(x + 1) = 0 \\ &\iff 2(x + 1)(x^2 - x + 1) - 5x(x + 1) = 0 \\ &\iff (x + 1)(2x^2 - 7x + 2) = 0. \end{aligned}$$

Egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, azaz

$$x + 1 = 0 \quad \text{vagy} \quad 2x^2 - 7x + 2 = 0,$$

ahonnan megkapjuk, hogy a megoldások

$$x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{7 + \sqrt{33}}{4}, \quad x_3 = \frac{7 - \sqrt{33}}{4},$$

az egyenlet megoldáshalmaza pedig

$$M = \left\{ -1, \frac{7 - \sqrt{33}}{4}, \frac{7 + \sqrt{33}}{4} \right\}.$$

18. Oldjuk meg a $4x^4 + 12x^3 - 47x^2 + 12x + 4 = 0$ negyedfokú egyenletet.

Megoldás. Vegyük észre, hogy egy páros kitevőjű szimmetrikus egyenletet kell megoldanunk. Osszuk el a középső tagban szereplő x^2 -tel az egyenletet. Ekkor a

$$4x^2 + 12x - 47 + \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} = 0, \quad \text{illetve} \quad 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 12\left(x + \frac{1}{x}\right) - 47 = 0$$

egyenletet kapjuk, amelyből $x + \frac{1}{x} = t$ helyettesítéssel adódik $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$, valamint a $4(t^2 - 2) + 12t - 47 = 0$, vagyis a $4t^2 + 12t - 55 = 0$ másodfokú egyenlet, amelynek megoldásai $t_1 = \frac{5}{2}$ és $t_2 = -\frac{11}{2}$. Visszahelyettesítés után kapjuk az $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$ és $x + \frac{1}{x} = -\frac{11}{2}$ egyenleteket, illetve rendezés után a $2x^2 - 5x + 2 = 0$ és $2x^2 + 11x + 2 = 0$ másodfokú egyenleteket, amelyek megoldásai $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{-11 + \sqrt{105}}{4}$, valamint $x_4 = \frac{-11 - \sqrt{105}}{4}$, a megoldáshalmaz pedig

$$M = \left\{ 2, \frac{1}{2}, \frac{-11 + \sqrt{105}}{4}, \frac{-11 - \sqrt{105}}{4} \right\}.$$

19. Oldjuk meg a $2x^5 + 5x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 5x + 2 = 0$ egyenletet.

Megoldás. Az egyenlet ötödfokú (páratlan kitevőjű) és szimmetrikus, így az egyik megoldása $x_1 = -1$. ezt felhasználva a Horner elrendezés segítségével megkapjuk a bal oldal felbontását.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} -1 & 2 & 5 & -13 & -13 & 5 & 2 \\ \hline & 2 & 3 & -16 & 3 & 2 & 0 \end{array} \quad \begin{aligned} 2x^5 + 5x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 5x + 2 = \\ = (x + 1)(2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2). \end{aligned}$$

A felbontás alapján kapjuk az

$$(x + 1)(2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2) = 0$$

egyenletet, ahonnan

$$x + 1 = 0 \quad \text{vagy} \quad 2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0.$$

Az első egyenlet megoldása a jól ismert $x_1 = -1$ megoldás, a másik egyenletet pedig osszuk el x^2 -tel. Ekkor a

$$2x^2 + 3x - 16 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} = 0, \quad \text{illetve} \quad 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 16 = 0$$

egyenlethez jutunk, amelyből $x + \frac{1}{x} = t$ helyettesítés után a $2t^2 + 3t - 20 = 0$ egyenlet adódik. A kapott t ismeretlenű másodfokú egyenlet megoldásai $t_1 = \frac{5}{2}$ és $t_2 = -4$. Visszahelyettesítés után kapjuk az

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \quad \text{és} \quad x + \frac{1}{x} = -4$$

egyenleteket, illetve rendezés után a

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \quad \text{és} \quad 2x^2 + 4x + 1 = 0$$

másodfokú egyenleteket, amelyek megoldásai $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = -2 + \sqrt{3}$, valamint $x_4 = -2 - \sqrt{3}$, a megoldáshalmaz pedig

$$M = \left\{ 2, \frac{1}{2}, -2 + \sqrt{3}, -2 - \sqrt{3} \right\}.$$

20. Oldjuk meg a $12x^5 - 16x^4 - 37x^3 + 37x^2 + 16x - 12 = 0$ ötödfokú egyenletet.

Megoldás. vegyük észre, hogy az egyenlet asszimmetrikus és páratlan kitevőjű, így $x_1 = 1$ az egyik megoldása. Ezért

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 1 & 12 & -16 & -37 & 37 & 16 & -12 \\ \hline & 12 & -4 & -41 & -4 & 12 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 12x^5 - 16x^4 - 37x^3 + 37x^2 + 16x - 12 = \\ = (x-1)(12x^4 - 4x^3 - 41x^2 - 4x - 12). \end{array}$$

A felbontás alapján kapjuk az

$$(x-1)(12x^4 - 4x^3 - 41x^2 - 4x - 12) = 0$$

egyenletet, ahonnan

$$x-1=0 \quad \text{vagy} \quad 12x^4 - 4x^3 - 41x^2 - 4x - 12 = 0.$$

Az első egyenlet megoldása a jól ismert $x_1 = 1$ megoldás, a másik egyenletet pedig osszuk el x^2 -tel. Ekkor a

$$12x^2 - 4x - 41 - \frac{4}{x} - \frac{12}{x^2} = 0, \quad \text{illetve} \quad 12\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) - 41 = 0$$

egyenletet kapjuk. Bevezetve az $x + \frac{1}{x} = t$ helyettesítést $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ is teljesül, az egyenlet pedig $12(t^2 - 2) - 4t - 41 = 0$, illetve rendezés után $12t^2 - 4t - 65 = 0$ alakú lesz, amelynek megoldásai $t_1 = \frac{5}{2}$ és $t_2 = -\frac{13}{6}$. Visszahelyettesítés után kapjuk az

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \quad \text{és} \quad x + \frac{1}{x} = -\frac{13}{6}$$

egyenleteket, illetve rendezés után a

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \quad \text{és} \quad 6x^2 + 13x + 6 = 0$$

másodfokú egyenleteket, amelyek megoldásai $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = -\frac{2}{3}$, valamint $x_4 = -\frac{3}{2}$, a megoldáshalmaz pedig

$$M = \left\{ 1, 2, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{2} \right\}.$$

7.2. Másodfokú egyenlőtlenségek

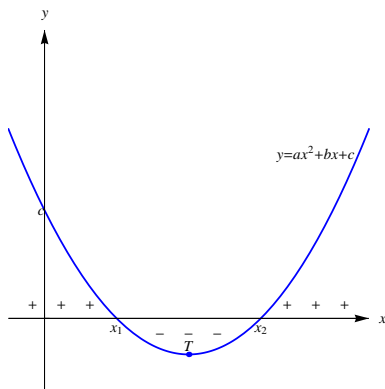
7.8. Definíció. Legyenek a, b, c valós számok és legyen $a \neq 0$. Az

$$ax^2 + bx + c > 0, \quad ax^2 + bx + c < 0, \quad ax^2 + bx + c \geq 0 \quad \text{és} \quad ax^2 + bx + c \leq 0$$

egyenlőtlenségeket x ismeretlenű másodfokú egyenlőtlenségeknek nevezzük.

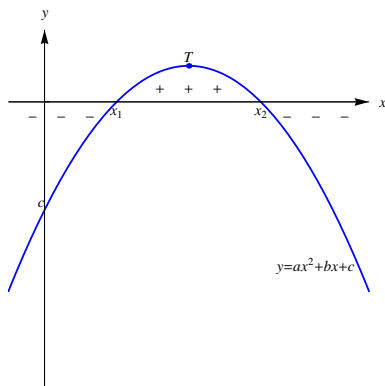
A másodfokú egyenlőtlenségek megoldása minden olyan valós szám, amely kielégíti az adott egyenlőtlenséget. Megoldani egy másodfokú egyenlőtlenséget annyit jelent, mint meghatározni az összes megoldását. A megoldáshalmazok vagy megoldás intervallumok meghatározása történhet az $f(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvény grafikonjának segítségével. Felrajzoljuk az $y = ax^2 + bx + c$ parabolát, majd leolvassuk a kapott ábráról a függvény megfelelő előjeléhez tartozó intervallumot. Egy másik megoldási módszer az, ha az egyenlőtlenségben szereplő másodfokú trinomot tényezőkre bontjuk és a szorzat előjelét vizsgáljuk meg, például táblázattal.

Mivel a másodfokú függvény alakja és helyzete a derékszögű koordináta-rendszerben az a főegyüttható és D diszkrimináns előjelétől függ, így hat esetet különböztetünk meg.



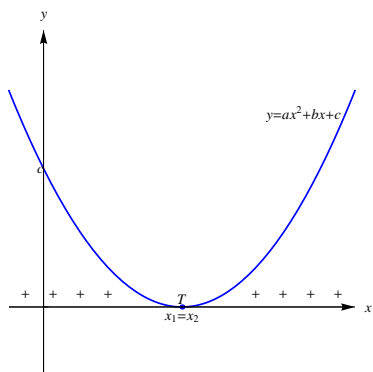
1° Az $a > 0, D > 0$ esetben

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c < 0, & \text{ ha } x \in (x_1, x_2), \\ ax^2 + bx + c \leq 0, & \text{ ha } x \in [x_1, x_2], \\ ax^2 + bx + c > 0, & \text{ ha } x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty), \\ ax^2 + bx + c \geq 0, & \text{ ha } x \in (-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty). \end{aligned}$$



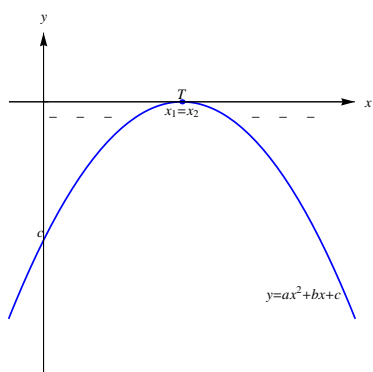
2° Az $a < 0, D > 0$ esetben

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c < 0, & \text{ ha } x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty), \\ ax^2 + bx + c \leq 0, & \text{ ha } x \in (-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty), \\ ax^2 + bx + c > 0, & \text{ ha } x \in (x_1, x_2), \\ ax^2 + bx + c \geq 0, & \text{ ha } x \in [x_1, x_2]. \end{aligned}$$



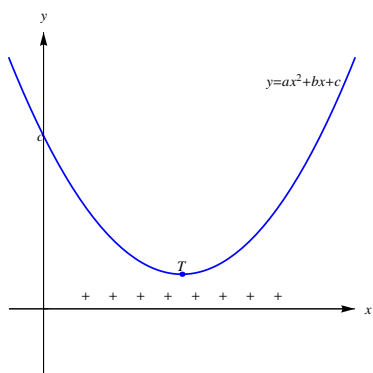
3° Az $a > 0$, $D = 0$ esetben

az $ax^2 + bx + c < 0$
 egyenlőtlenségnek nincs megoldása,
 $ax^2 + bx + c \leq 0$, ha $x = x_1$,
 $ax^2 + bx + c > 0$, ha $x \in \mathbf{R} \setminus \{x_1\}$,
 $ax^2 + bx + c \geq 0$, ha $x \in \mathbf{R}$.



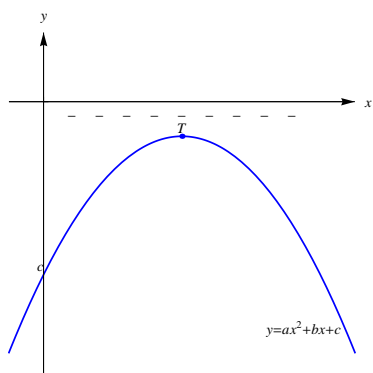
4° Az $a < 0$, $D = 0$ esetben

az $ax^2 + bx + c < 0$, ha $x \in \mathbf{R} \setminus \{x_1\}$
 $ax^2 + bx + c \leq 0$, ha $x \in \mathbf{R}$,
 $ax^2 + bx + c > 0$
 egyenlőtlenségnek nincs megoldása,
 $ax^2 + bx + c \geq 0$, ha $x = x_1$.



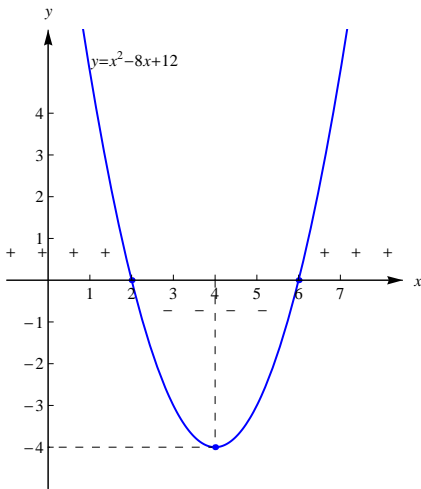
5° Az $a > 0$, $D < 0$ esetben

az $ax^2 + bx + c < 0$
 egyenlőtlenségnek nincs megoldása,
 $ax^2 + bx + c \leq 0$
 egyenlőtlenségnek nincs megoldása,
 $ax^2 + bx + c > 0$, ha $x \in \mathbf{R}$,
 $ax^2 + bx + c \geq 0$, ha $x \in \mathbf{R}$.



6° Az $a < 0$, $D < 0$ esetben

az $ax^2 + bx + c < 0$, ha $x \in \mathbf{R}$
 $ax^2 + bx + c \leq 0$, ha $x \in \mathbf{R}$,
 $ax^2 + bx + c > 0$
 egyenlőtlenségnek nincs megoldása,
 $ax^2 + bx + c \geq 0$
 egyenlőtlenségnek nincs megoldása.



7.28. Példa. Oldjuk meg az $x^2 - 8x + 12 < 0$, $x^2 - 8x + 12 \leq 0$, $x^2 - 8x + 12 > 0$ és $x^2 - 8x + 12 \geq 0$ másodfokú egyenlőtlenségeket.

Első módszer. Megrajzoljuk az $f(x) = x^2 - 8x + 12$ függvény grafikonját és arról leolvassuk a megfelelő intervallumokat.

$$x^2 - 8x + 12 < 0, \text{ ha } x \in (2, 6)$$

$$x^2 - 8x + 12 \leq 0, \text{ ha } x \in [2, 6]$$

$$x^2 - 8x + 12 > 0, \text{ ha } x \in (-\infty, 2) \cup (6, \infty)$$

$$x^2 - 8x + 12 \geq 0, \text{ ha } x \in (-\infty, 2] \cup [6, \infty).$$

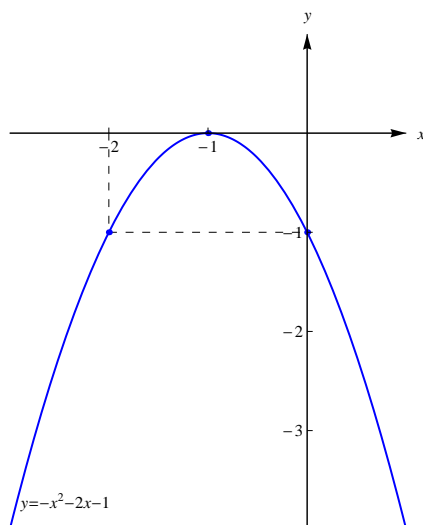
Második módszer. Kiszámítjuk az $x^2 - 8x + 12 = 0$ másodfokú egyenlet gyökeit. Ezek most az $x_1 = 2$ és $x_2 = 6$ számok, melyeknek segítségével tényezőkre bontjuk az egyenlőtlenség bal oldalán levő másodfokú trinomot. Mivel $x^2 - 8x + 12 = (x - 2)(x - 6)$, ezért az alábbi táblázatból leolvassuk az $(x - 2)(x - 6)$ szorzat előjelét.

	$(-\infty, 2)$	$(2, 6)$	$(6, \infty)$
$x - 2$	–	+	+
$x - 6$	–	–	+
$(x - 2)(x - 6)$	+	–	+

A táblázatból természetesen ugyanazok az intervallumok olvashatók le, mint az előbbi grafikonról.

FELADATOK

1. Oldjuk meg a $-x^2 - 2x - 1 < 0$ egyenlőtlenséget.



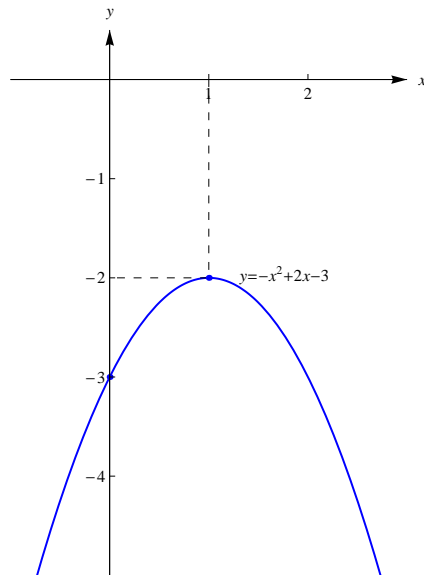
Megoldás. *Első módszer.* Rajzoljuk fel az $f(x) = -x^2 - 2x - 1$ függvény grafikonját, majd olvassuk le róla a feladat megoldását: $-x^2 - 2x - 1 < 0$, ha $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$, illetve ha $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

Második módszer. Bontsuk tényezőkre az egyenlőtlenség bal oldalát. Ekkor

$$-x^2 - 2x - 1 < 0 \iff -(x + 1)^2 < 0.$$

Az egyenlőtlenség minden valós számra teljesül, kivéve az $x = -1$ esetet. Ezért a megoldáshalmaz $M = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

2. Oldjuk meg a $-x^2 - 2x - 3 < 0$ és $-x^2 - 2x - 3 \geq 0$ egyenlőtlenségeket.

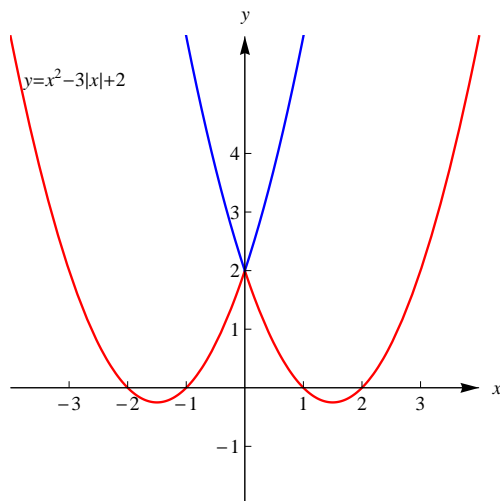


Megoldás. Az $f(x) = -x^2 - 2x - 3$ függvény grafikonja a mellékelt ábrán látható. Mivel most egy konkáv parabola a grafikon, amelynek nincsenek valós nullahelyei, ezért az ábráról könnyen leolvasható mindkét egyenlőtlenség megoldása:

$-x^2 - 2x - 3 < 0$, ha $x \in (-\infty, \infty)$, vagyis a $-x^2 - 2x - 3 < 0$ egyenlőtlenség minden x valós számra teljesül,

$-x^2 - 2x - 3 \geq 0$, ha $x \in \emptyset$, vagyis a $-x^2 - 2x - 3 \geq 0$ egyenlőtlenségnek nincs megoldása a valós számok halmazában.

3. Oldjuk meg az $x^2 - 3|x| + 2 \leq 0$ egyenlőtlenséget.



Megoldás. Az $f(x) = x^2 - 3|x| + 2$ függvény grafikonja a mellékelt ábrán látható. $x < 0$ esetén a nullahelyek az $x^2 - 3x + 2 = 0$ másodfokú egyenlet megoldásai, azaz $x_1 = -2$ és $x_2 = -1$, $x > 0$ esetén pedig a nullahelyek az $x^2 + 3x + 2 = 0$ másodfokú egyenlet megoldásai, vagyis $x_3 = 1$ és $x_4 = 2$. A grafikonról leolvasható, hogy $x^2 - 3|x| + 2 \leq 0$, ha $x \in [-2, -1] \cup [1, 2]$.

4. A k valós paraméter mely értékeire lesznek a $(k - 2)x^2 + (3k - 1)x + k - 2 = 0$ egyenlet megoldásai különböző valós számok?

Megoldás. A másodfokú egyenlet gyökei akkor különböző valós számok, ha a másodfokú egyenlet D diszkriminánsa szigorúan pozitív.

$$\begin{aligned}
 D > 0 &\iff (3k - 1)^2 - 4(k - 2)^2 > 0 \\
 &\iff 9k^2 - 6k + 1 - 4k^2 + 16k - 16 > 0 \\
 &\iff 5k^2 + 10k - 15 > 0 \\
 &\iff k^2 + 2k - 3 > 0 \\
 &\iff (k - 1)(k + 3) > 0
 \end{aligned}$$

A $k^2 + 2k - 3$ trinom lineáris tényezőkre való felbontása az $k^2 + 2k - 3 = 0$ másodfokú egyenlet $k_1 = 1$ és $k_2 = -3$ gyökei segítségével történt. A $(k - 1)(k + 3)$ szorzat előjele a következő táblázatból leolvasható.

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 1)$	$(1, \infty)$
$k - 1$	–	–	+
$k + 3$	–	+	+
$(k - 1)(k + 3)$	+	–	+

$(k - 1)(k + 3) > 0$, ha $k < -3$ vagy $k > 1$, illetve ha $k \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$.

5. A p valós paraméter mely értékeire lesz $\frac{2x^2 + 2x + 3}{x^2 + x + 1} \leq p$ minden $x \in \mathbf{R}$ esetén?

Megoldás. Mivel $x^2 + x + 1 > 0$ minden x valós szám esetén, ezért az adott egyenlőtlenség bezorozható $x^2 + x + 1$ -gyel. Ekkor

$$2x^2 + 2x + 3 \leq px^2 + px + p,$$

illetve némi rendezés után

$$(2 - p)x^2 + (2 - p)x + 3 - p \leq 0$$

másodfokú egyenlőtlenségnek kell teljesülnie minden x valós számra. A parabolák helyzetének elemzéséből láttuk, hogy a másodfokú trinom akkor lesz nempozitív, ha a főegyüttható negatív és a diszkrimináns nempozitív, azaz $2 - p < 0$ és $D \leq 0$. A $2 - p < 0$ egyenlőtlenség teljesül, ha $p > 2$, azaz az $M_1 = (2, \infty)$ intervallumon. Vezessük le a diszkriminánssal kapcsolatos feltételt is.

$$\begin{aligned} D \leq 0 &\iff (2 - p)^2 - 4(2 - p)(3 - p) \leq 0 \\ &\iff (2 - p)(2 - p - 12 + 4p) \leq 0 \\ &\iff (2 - p)(3p - 10) \leq 0 \end{aligned}$$

Készítsünk táblázatot a $(2 - p)(3p - 10)$ szorzat előjelének kivizsgálására.

	$(-\infty, 2)$	$\left(2, \frac{10}{3}\right)$	$\left(\frac{10}{3}, \infty\right)$
$2 - p$	–	–	+
$3p - 10$	–	+	+
$(2 - p)(3p - 10)$	+	–	+

A táblázatból kiolvashatjuk, hogy $(2 - p)(3p - 10) \leq 0$, ha $p \in (-\infty, 2] \left[\frac{10}{3}, \infty\right)$, vagyis a megoldáshalmaz $M_2 = (-\infty, 2] \left[\frac{10}{3}, \infty\right)$.

Az eredeti egyenlőtlenség megoldáshalmaza

$$M = M_1 \cap M_2 = \left[\frac{10}{3}, \infty\right).$$

7.3. Kétismeretlenes másodfokú egyenletrendszerek

7.9. Definíció. *Kétismeretlenes másodfokú egyenletnek nevezzük az*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

alakú egyenleteket, amelyekben x és y az ismeretlenek, A, B, C, D, E és F pedig valós együtthatók, melyek közül A, B és C nem lehetnek egyszerre nullával egyenlők.

7.10. Definíció. *Kétismeretlenes másodfokú egyenletrendszernek nevezzük két vagy több kétismeretlenes egyenlet konjunkcióját, melyek közül legalább egy másodfokú.*

A következőkben bemutatjuk néhány jellegzetes típusú két egyenletből álló másodfokú egyenletrendszer megoldási módszerét.

I. típus. Amikor az egyik egyenlet lineáris.

Ebben az esetben a lineáris egyenletből kifejezzük az egyik ismeretlent és azt behelyettesítjük a másodfokú egyenletbe.

7.29. Példa. Oldjuk meg az

$$\begin{aligned} x^2 - xy + y^2 + x - 5 &= 0, \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

másodfokú egyenletrendszert. Fejezzük ki x -et a második egyenletből. Ekkor $x = 4 - 2y$. Behelyettesítve ezt a kifejezést a másodfokú egyenletbe adódik az

$$(4 - 2y)^2 - (4 - 2y)y + y^2 + 4 - 2y - 5 = 0, \quad \text{illetve} \quad 7y^2 - 22y + 15 = 0$$

másodfokú egyenlet, amelynek megoldásai $y_1 = 1$ és $y_2 = \frac{15}{7}$. Visszahelyettesítve ezeket az értékeket kapjuk, hogy

$$x_1 = 4 - 2y_1 = 4 - 2 \cdot 1 = 2 \quad \text{és} \quad x_2 = 4 - 2y_2 = 4 - 2 \cdot \frac{15}{7} = -\frac{2}{7}.$$

A megoldások így a $(2, 1)$ és $\left(-\frac{2}{7}, \frac{15}{7}\right)$ rendezett párok, a megoldáshalmaz pedig

$$M = \left\{ (2, 1), \left(-\frac{2}{7}, \frac{15}{7}\right) \right\}.$$

II. típus. Amikor csak négyzetes és szabad tagok vannak.

Ebben az esetben $x^2 = a$ és $y^2 = b$ helyettesítéssel a másodfokú egyenletrendszert lineáris egyenletrendszerre vezetjük vissza.

7.30. Példa. Oldjuk meg az

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 48, \\ x^2 + y^2 &= 50 \end{aligned}$$

másodfokú egyenletrendszert. Ha bevezetjük az $x^2 = a$ és $y^2 = b$ helyettesítést, akkor az

$$\begin{aligned}a - b &= 48, \\a + b &= 50\end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszert kapjuk, amelyből az egyenletek összeadásával adódik $2a = 98$, azaz $a = 49$, majd $b = 1$. Visszahelyettesítés után kapjuk az $x^2 = 49$ egyenletet, ahonnan $x_1 = 7$ és $x_2 = -7$, valamint az $y^2 = 1$ egyenletet, ahonnan $y_1 = 1$ és $y_2 = -1$. Mivel a két ismeretlen között lineáris összefüggés nem áll fenn, így a $(7, 1)$, $(7, -1)$, $(-7, 1)$ és $(-7, -1)$ rendezett párok mindegyike kielégíti az adott egyenletrendszert, a megoldáshalmaz tehát $M = \{(7, 1), (7, -1), (-7, 1), (-7, -1)\}$.

III. típus. Amikor az egyik egyenlet homogén.

7.11. Definíció. *A kétismeretlenes másodfokú egyenletet homogénnek nevezzük, ha kizárólag másodfokú tagokat tartalmaz, vagyis*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$$

alakú, ahol A , B és C tetszőleges valós számok, és nem lehetnek egyszerre nullával egyenlők.

Ha a homogén egyenletet elosztjuk x^2 -tel vagy y^2 -tel, akkor $\frac{y}{x} = t$ vagy $\frac{x}{y} = t$ helyettesítéssel egy t -ismeretlenes másodfokú egyenletet kapunk, amelynek megoldásával lineáris összefüggéseket kapunk az x és y ismeretlenek között.

7.31. Példa. Az

$$\begin{aligned}x^2 - 5xy + 6y^2 &= 0, \\x^2 + y^2 &= 10\end{aligned}$$

másodfokú egyenletrendszerben az első egyenlet homogén, ezért osszuk el y^2 -tel. Ekkor az

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5\left(\frac{x}{y}\right) + 6 = 0$$

egyenletet kapjuk, amelyből $\frac{x}{y} = t$ helyettesítés után a $t^2 - 5t + 6 = 0$ másodfokú egyenlet következik. A kapott másodfokú egyenlet megoldásai $t_1 = 2$ és $t_2 = 3$.

Ha $\frac{x}{y} = 2$, akkor $x = 2y$ és ezt a második egyenletbe helyettesítve kapjuk a $(2y)^2 + y^2 = 10$,

illetve $y^2 = 2$ egyenletet, amelyből a megoldások $y_1 = \sqrt{2}$ és $y_2 = -\sqrt{2}$, a hozzájuk tartozó x_1 és x_2 értékek pedig $x_1 = 2\sqrt{2}$ és $x_2 = -2\sqrt{2}$. Ez azt jelenti, hogy a $(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ és $(-2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ számpárok megoldásai az adott egyenletrendszernek.

Ha $\frac{x}{y} = 3$, akkor $x = 3y$ és ezt a második egyenletbe helyettesítve adódik a $(3y)^2 + y^2 = 10$,

illetve $y^2 = 1$ egyenlet, amelyből a megoldások $y_3 = 1$ és $y_4 = -1$, a hozzájuk tartozó x_3 és x_4 értékek pedig $x_3 = 3$ és $x_4 = -3$. Ez azt jelenti, hogy a $(3, 1)$ és $(-3, -1)$ számpárok megoldásai az adott egyenletrendszernek.

Az egyenletrendszer megoldáshalmaza tehát

$$M = \{(-3, -1), (3, 1), (-2\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (2\sqrt{2}, \sqrt{2})\}.$$

IV. típus. Összetett feladatok.

Az olyan egyenletrendszerekben, amelyek nem sorolhatók az előző három eset egyikébe sem, az egyenletek összeadásával, tényezőkre bontással vagy új változók bevezetésével juthatunk megoldáshoz.

7.32. Példa. Az

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + x + y &= 8, \\x^2 + y^2 + xy &= 7\end{aligned}$$

másodfokú egyenletrendszer esetében vonjuk ki az első egyenletből a másodikat, ekkor kapjuk az $x + y - xy = 1$ egyenletet. Itt $x + y$ -t és xy -t helyettesíthetnénk új változóval, ha az eredeti egyenletrendszer valamelyik egyenletét szintén ki tudnánk fejezni $x + y$ és xy segítségével. Mivel

$$x^2 + y^2 + xy = (x + y)^2 - 2xy + xy = (x + y)^2 - xy,$$

így az eredeti egyenletrendszer helyett felírhatjuk a vele ekvivalens

$$\begin{aligned}(x + y) - xy &= 1, \\(x + y)^2 - xy &= 7\end{aligned}$$

másodfokú egyenletrendszert, amelybe $x + y = a$ és $xy = b$ helyettesítéseket bevezetve az

$$\begin{aligned}a - b &= 1, \\a^2 - b &= 7\end{aligned}$$

egyenletrendszert kapjuk. Az első egyenletből $b = a - 1$, s ezt a másodikba helyettesítve adódik az $a^2 - a - 6 = 0$ másodfokú egyenlet, amelynek megoldásai $a_1 = 3$ és $a_2 = -2$, ahozzájuk tartozó b értékek pedig $b_1 = 2$ és $b_2 = -3$. Visszatérve az x és y ismeretlenekre most az

$$\begin{aligned}x + y &= 3, & x + y &= -2, \\xy &= 2 & xy &= -3\end{aligned}$$

egyenletrendszereket kell megoldani.

Az első egyenletrendszer megoldása: az első egyenletből $y = 3 - x$, ezt behelyettesítve a második egyenletbe adódik a $x(3 - x) = 2$, illetve $x^2 - 3x + 2 = 0$ másodfokú egyenlet, amelynek gyökei $x_1 = 1$ és $x_2 = 2$, a hozzájuk tartozó y értékek pedig $y_1 = 2$ és $y_2 = 1$. Így az $(1, 2)$ és $(2, 1)$ rendezett párok megoldásai az eredeti egyenletrendszernek.

A második egyenletrendszer megoldása: az első egyenletből $y = -x - 2$, ezt behelyettesítve a második egyenletbe adódik a $x(-x - 2) = -3$, illetve $x^2 + 2x - 3 = 0$ másodfokú egyenlet, amelynek gyökei $x_3 = -3$ és $x_4 = 1$, a hozzájuk tartozó y értékek pedig $y_3 = 1$ és $y_4 = -3$. Így az $(-3, 1)$ és $(1, -3)$ rendezett párok is megoldásai az eredeti egyenletrendszernek.

Az eredeti egyenletrendszer megoldáshalmaza $M = \{(1, 2), (2, 1), (-3, 1), (1, -3)\}$.

7.33. Példa. Vizsgáljuk ki az

$$\begin{aligned}x^2 - y &= 1, \\y - x &= k\end{aligned}$$

másodfokú egyenletrendszert a k valós paraméter értékeitől függően. Vegyük észre, hogy az egyenletrendszer felírható

$$\begin{aligned}y &= x^2 - 1, \\y &= x + k\end{aligned}$$

alakban is, ami azt jelenti, hogy valójában az a kérdés, hogy az $y = x^2 - 1$ parabolának és az $y = x + k$ egyenesnek k értékeitől függően hány metszéspontja van.

Az első egyenletet a másodikba helyettesítve az $x^2 - 1 = x + k$ másodfokú egyenletet kapjuk, amely rendezés után $x^2 - x - (k + 1) = 0$ alakú. Az a kérdés, hogy ennek az egyenletnek mikor lesz két különböző valós megoldása (ez két metszéspontot jelent), mikor lesz egy valós megoldása (ez azt jelenti, hogy az egyenes érinti a parabolát) és mikor nincs valós megoldása (ez azt jelenti, hogy nincs közös pontjuk). Legyenek x_1 és x_2 a szemlélt másodfokú egyenlet gyökei, s tudjuk, hogy a valós gyökök száma a diszkrimináns előjelétől függ, ezért három esetet különböztetünk meg.

1° Két különböző metszéspont akkor van, ha $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ és $x_1 \neq x_2$, illetve ha a D diszkrimináns szigorúan pozitív. Ekkor

$$D > 0 \iff 1^2 + 4(k + 1) > 0 \iff 4k + 5 > 0 \iff k > -\frac{5}{4}.$$

2° Egy érintési pont akkor van, ha $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ és $x_1 = x_2$, azaz ha a D diszkrimináns nulla. Ekkor

$$D = 0 \iff 1^2 + 4(k + 1) = 0 \iff 4k + 5 = 0 \iff k = -\frac{5}{4}.$$

3° Nincs metszéspontja a parabolának és az egyenesnek, ha $x_1, x_2 \in \mathbf{C}$ és $x_1 = \overline{x_2}$, vagyis ha a D diszkrimináns szigorúan negatív. Ekkor

$$D < 0 \iff 1^2 + 4(k + 1) < 0 \iff 4k + 5 < 0 \iff k < -\frac{5}{4}.$$

Ha $k = -\frac{5}{4}$, akkor $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$, a hozzá tartozó y értékek pedig $y_1 = y_2 = -\frac{3}{4}$. Így az egyenletrendszer egyik megoldása az $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ rendezett pár.

Ha $k > -\frac{5}{4}$, akkor $x_1 = \frac{1 + \sqrt{4k + 5}}{2}$ és $x_2 = \frac{1 - \sqrt{4k + 5}}{2}$, a hozzá tartozó y értékek pedig $y_1 = \frac{1 + \sqrt{4k + 5}}{2} + k$ és $y_2 = \frac{1 - \sqrt{4k + 5}}{2} + k$. Ezért az egyenletrendszernek megoldása minden $\left(\frac{1 + \sqrt{4k + 5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{4k + 5}}{2} + k\right)$ és $\left(\frac{1 - \sqrt{4k + 5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{4k + 5}}{2} + k\right)$ alakú rendezett pár is.

Az eredeti rendszer megoldáshalmaza

$$M = \left\{ \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right), \left(\frac{1 + \sqrt{4k + 5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{4k + 5}}{2} + k\right), \left(\frac{1 - \sqrt{4k + 5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{4k + 5}}{2} + k\right) \right\},$$

ahol $k > -\frac{5}{4}$ valós szám.

FELADATOK

1. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + 2y - 9 &= 0, \\3x - y - 1 &= 0.\end{aligned}$$

Megoldás. A második egyenlet lineáris és ebből $y = 3x - 1$. Ezt az első egyenletbe helyettesítve kapjuk az

$$x^2 + (3x - 1)^2 + 2(3x - 1) - 9 = 0, \quad \text{vagyis} \quad x^2 + 9x^2 - 6x + 1 + 6x - 2 - 9 = 0$$

illetve rendezés után az $x^2 = 1$ másodfokú egyenletet, amelynek megoldásai $x_1 = 1$ és $x_2 = -1$. Ekkor

$$y_1 = 3x_1 - 1 = 3 \cdot 1 - 1 = 2, \quad \text{és} \quad y_2 = 3x_2 - 1 = 3 \cdot (-1) - 1 = -4.$$

Az egyenletrendszer megoldáshalmaza $M = \{(1, 2), (-1, -4)\}$.

2. A p valós paraméter mely értékeire érinti az $y = -2x + p$ egyenes az $y = 3x^2 - 7x + 4$ parabolát?

Megoldás. Az egyenes akkor érinti a parabolát, ha egy közös pontjuk van, ez pedig azt jelenti, hogy a

$$\begin{aligned}3x^2 - 7x - y &= -4, \\2x + y &= p.\end{aligned}$$

másodfokú egyenletrendszernek csak egy megoldása kell legyen. Helyettesítsük be $y = -2x + p$ -t az első egyenletbe. Ekkor a

$$3x^2 - 7x + 2x - p = -4, \quad \text{illetve} \quad 3x^2 - 5x + 4 - p = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek akkor van egy valós megoldása, ha D diszkriminánsa nulla, vagyis

$$D = 0 \iff 25 - 12(4 - p) = 0 \iff 12p - 23 = 0.$$

Innen $p = \frac{23}{12}$. Eszerint az adott egyenes $p = \frac{23}{12}$ értékre érinti az adott parabolát.

Ekkor az egyenes egyenlete $y = -2x + \frac{23}{12}$, a P érintési pont koordinátái pedig, $x_1 = x_2 = \frac{5}{6}$ és $y_1 = y_2 = -\frac{5}{3} + \frac{23}{12} = \frac{23 - 20}{12} = \frac{1}{4}$ alapján, $P\left(\frac{5}{6}, \frac{1}{4}\right)$.

3. Az a valós paraméter mely értékeire nincs közös pontja az $y = 2ax + 1$ egyenesnek és az $y = (a - 6)x^2 - 2$ parabolának, ha $a \neq 6$?

Megoldás. Azt kell kivizsgálunk, hogy az a valós paraméter mely értékeire nincs valós megoldása az

$$\begin{aligned}y &= 2ax + 1, \\y &= (a - 6)x^2 - 2.\end{aligned}$$

másodfokú egyenletrendszernek. Helyettesítsük az első egyenletet a másodikba. Ekkor az

$$(a - 6)x^2 - 2 = 2ax + 1, \quad \text{illetve} \quad (a - 6)x^2 - 2ax - 3 = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek akkor nincs valós megoldása, ha a diszkriminánsa negatív, vagyis

$$D < 0 \iff 4a^2 + 12(a - 6) < 0 \iff a^2 + 3a - 18 < 0.$$

Mivel $a^2 + 3a - 18 = (a - 3)(a + 6)$, ezért az $(a - 3)(a + 6) < 0$ egyenlőtlenség megoldását keressük a következő táblázat segítségével:

	$(-\infty, -6)$	$(-6, 3)$	$(3, \infty)$
$a + 6$	–	–	+
$a - 3$	–	+	+
$(a - 3)(a + 6)$	+	–	+

Az egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $-6 < a < 3$, így az adott egyenesnek és parabolának akkor nincs közös pontja, ha $a \in (-6, 3)$.

4. Oldjuk meg a következő másodfokú egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25, \\ x^2 + 2y^2 &= 41. \end{aligned}$$

Megoldás. Vezessük be az $x^2 = a$ és $y^2 = b$ helyettesítéseket. Ekkor az

$$\begin{aligned} a + b &= 25, \\ a + 2b &= 41 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszert kapjuk, amelynek megoldása $a = 9$ és $b = 16$. Visszahelyettesítve adódik, hogy $x^2 = 9$, valamint $y^2 = 16$, ahonnan a megoldások $x_1 = 3$ és $x_2 = -3$, valamint $y_1 = 4$ és $y_2 = -4$. Az egyenletrendszer megoldáshalmaza $M = \{(-3, -4), (3, -4), (-3, 4), (3, 4)\}$.

5. Határozzuk meg a következő másodfokú egyenletrendszer megoldásait:

$$\begin{aligned} x^2 - 3xy + 2y^2 &= 0, \\ x^2 + 2xy + y - y^2 &= 8. \end{aligned}$$

Megoldás. Vegyük észre, hogy az első egyenlet homogén és osszuk el mindkét oldalát y^2 -tel. Ekkor az

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 3\left(\frac{x}{y}\right) + 2 = 0$$

egyenletet kapjuk, amelyből $\frac{x}{y} = t$ helyettesítés után a $t^2 - 3t + 2 = 0$ másodfokú egyenlet következik. A kapott másodfokú egyenlet megoldásai $t_1 = 2$ és $t_2 = 1$.

Ha $\frac{x}{y} = 2$, akkor $x = 2y$ és ezt a második egyenletbe helyettesítve kapjuk a $(2y)^2 + 4y^2 + y - y^2 = 8$, illetve $7y^2 + y - 8 = 0$ egyenletet, amelyből a megoldások $y_1 = 1$ és $y_2 = -\frac{8}{7}$, a hozzájuk tartozó x_1 és x_2 értékek pedig $x_1 = 2$ és $x_2 = -\frac{16}{7}$. Ez azt jelenti, hogy a $(2, 1)$ és $\left(-\frac{16}{7}, -\frac{8}{7}\right)$ számpárok megoldásai az adott egyenletrendszernek. Ha $\frac{x}{y} = 1$, akkor $x = y$ és ezt a második egyenletbe helyettesítve adódik a $y^2 + 2y^2 + y - y^2 = 8$, illetve $2y^2 + y - 8 = 0$ egyenlet, amelyből a megoldások $y_3 = \frac{-1 + \sqrt{65}}{4}$ és $y_4 = \frac{-1 - \sqrt{65}}{4}$, a hozzájuk tartozó x_3 és x_4 értékek pedig $x_3 = y_3$ és $x_4 = y_4$. Ez azt jelenti, hogy a $\left(\frac{-1 + \sqrt{65}}{4}, \frac{-1 + \sqrt{65}}{4}\right)$ és $\left(\frac{-1 - \sqrt{65}}{4}, \frac{-1 - \sqrt{65}}{4}\right)$ számpárok megoldásai az adott egyenletrendszernek. Az egyenletrendszer megoldáshalmaza tehát

$$M = \left\{ (2, 1), \left(-\frac{16}{7}, -\frac{8}{7}\right), \left(\frac{-1 + \sqrt{65}}{4}, \frac{-1 + \sqrt{65}}{4}\right), \left(\frac{-1 - \sqrt{65}}{4}, \frac{-1 - \sqrt{65}}{4}\right) \right\}.$$

6. Keressük meg a következő másodfokú egyenletrendszer megoldásait:

$$\begin{aligned} x^2 - 3xy + 4y^2 &= 2, \\ 3x^2 - xy - 5y^2 &= 5. \end{aligned}$$

Megoldás. Vegyük észre, hogy a két egyenlet csak abban különbözik egy homogén másodfokú egyenlettől, hogy szerepel bennük szabad tag. Az ilyen egyenletrendszerek átalakíthatók olyan alakra, amelyben az egyik egyenlet homogén. Ehhez be kell szorozni az első egyenletet -5 -tel, a másodikat pedig 2 -vel, majd össze kell őket adni. Ekkor

$$\begin{aligned} -5x^2 + 15xy - 20y^2 &= -10, \\ 6x^2 - 2xy - 10y^2 &= 10. \end{aligned}$$

Összeadás után kapjuk az $x^2 + 13xy - 30y^2 = 0$ homogén másodfokú egyenletet, amelyet elosztunk y^2 -tel. Ekkor az

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 13\left(\frac{x}{y}\right) - 30 = 0$$

egyenletet kapjuk, amelyből $\frac{x}{y} = t$ helyettesítés után a $t^2 + 13t - 30 = 0$ másodfokú egyenlet következik. A kapott másodfokú egyenlet megoldásai $t_1 = 2$ és $t_2 = -15$. Ha $\frac{x}{y} = 2$, akkor $x = 2y$ és ezt a kifejezést az első egyenletbe helyettesítve kapjuk a $4y^2 - 6y^2 + 4y^2 = 2$, illetve $y^2 = 1$ egyenletet, amelyből a megoldások $y_1 = 1$ és $y_2 = -1$, a hozzájuk tartozó x_1 és x_2 értékek pedig $x_1 = 2$ és $x_2 = -2$. Ez azt jelenti,

hogyan a $(2, 1)$ és $(-2, -1)$ számpárok megoldásai az adott egyenletrendszernek. Ha $\frac{x}{y} = -15$, akkor $x = -15y$ és ezt az első egyenletbe helyettesítve adódik a $225y^2 + 45y^2 + 4y^2 = 2$, illetve $y^2 = \frac{1}{137}$ egyenlet, amelyből a megoldások $y_3 = \frac{1}{\sqrt{137}}$ és $y_4 = -\frac{1}{\sqrt{137}}$, a hozzájuk tartozó x_3 és x_4 értékek pedig $x_3 = -\frac{15}{\sqrt{137}}$, valamint $x_4 = \frac{15}{\sqrt{137}}$. Ez azt jelenti, hogy a $\left(-\frac{15}{\sqrt{137}}, \frac{1}{\sqrt{137}}\right)$ és $\left(\frac{15}{\sqrt{137}}, -\frac{1}{\sqrt{137}}\right)$ számpárok megoldásai az adott egyenletrendszernek.

Az egyenletrendszer megoldáshalmaza tehát

$$M = \left\{ (2, 1), (-2, -1), \left(-\frac{15}{\sqrt{137}}, \frac{1}{\sqrt{137}}\right), \left(\frac{15}{\sqrt{137}}, -\frac{1}{\sqrt{137}}\right) \right\}.$$

7. Adjuk meg a következő másodfokú egyenletrendszer megoldásait:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 41, \\ xy &= 20. \end{aligned}$$

Megoldás. Az első egyenletet bal oldalát felírhatjuk, mint

$$x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2xy - 2xy = (x + y)^2 - 2xy.$$

Ekkor az

$$\begin{aligned} (x + y)^2 - 2xy &= 41, \\ xy &= 20 \end{aligned}$$

egyenletrendszert kapjuk. A második egyenletet az elsőbe helyettesítve adódik az

$$(x + y)^2 - 2 \cdot 20 = 41, \quad \text{illetve az} \quad (x + y)^2 = 81$$

egyenlet, amelynek megoldása $x + y = 9$ vagy $x + y = -9$. Most az

$$\begin{aligned} x + y &= 9, & x + y &= -9, \\ xy &= 20 & xy &= 20 \end{aligned}$$

egyenletrendszereket kell megoldani.

Az első egyenletrendszer megoldása: az első egyenletből $y = 9 - x$, ezt behelyettesítve a második egyenletbe adódik a $x(9 - x) = 20$, illetve $x^2 - 9x + 20 = 0$ másodfokú egyenlet, amelynek gyökei $x_1 = 5$ és $x_2 = 4$, a hozzájuk tartozó y értékek pedig $y_1 = 4$ és $y_2 = 5$. Így az $(5, 4)$ és $(4, 5)$ rendezett párok megoldásai az eredeti egyenletrendszernek.

A második egyenletrendszer megoldása: az első egyenletből $y = -9 - x$, ezt behelyettesítve a második egyenletbe adódik a $x(-9 - x) = 20$, illetve $x^2 + 9x + 20 = 0$ másodfokú egyenlet, amelynek gyökei $x_3 = -4$ és $x_4 = -5$, a hozzájuk tartozó y értékek pedig $y_3 = -5$ és $y_4 = -4$. Így a $(-4, -5)$ és $(-5, -4)$ rendezett párok is megoldásai az eredeti egyenletrendszernek.

Az eredeti egyenletrendszer megoldáshalmaza

$$M = \{(5, 4), (4, 5), (-4, -5), (-5, -4)\}.$$

8. Oldjuk meg az

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + x + y &= 8, \\x^2 + y^2 + xy &= 7\end{aligned}$$

másodfokú egyenletrendszert.

Megoldás. Alakítsuk át az egyenletrendszer mindkét egyenletét a következőképpen:

$$\begin{aligned}(x + y)^2 - 2xy + (x + y) &= 8, \\(x + y)^2 - xy &= 7.\end{aligned}$$

Vezessük be az $x + y = a$ és $xy = b$ helyettesítést. Ekkor az

$$\begin{aligned}a^2 + a - 2b &= 8, \\a^2 - b &= 7\end{aligned}$$

másodfokú egyenletrendszert kapjuk. A második egyenletből $b = a^2 - 7$, s ezt az első egyenletbe helyettesítve az $a^2 + a - 2(a^2 - 7) = 8$, illetve rendezés után az $-a^2 + a + 6 = 0$ egyenletet kapjuk, amelynek megoldásai $a_1 = 3$ és $a_2 = -2$, a hozzájuk tartozó b értékek pedig $b_1 = 2$ és $b_2 = -3$. Visszatérve az x és y ismeretlenekre az

$$\begin{aligned}x + y &= 3, & x + y &= -2, \\xy &= 2 & xy &= -3\end{aligned}$$

egyenletrendszereket kapjuk és ezeket kell megoldani.

Az első egyenletrendszer megoldása: az első egyenletből $y = 3 - x$, ezt behelyettesítve a második egyenletbe adódik a $x(3 - x) = 2$, illetve $x^2 - 3x + 2 = 0$ másodfokú egyenlet, amelynek gyökei $x_1 = 2$ és $x_2 = 1$, a hozzájuk tartozó y értékek pedig $y_1 = 1$ és $y_2 = 2$. Így az $(2, 1)$ és $(1, 2)$ rendezett párok megoldásai az eredeti egyenletrendszernek.

A második egyenletrendszer megoldása: az első egyenletből $y = -2 - x$, ezt behelyettesítve a második egyenletbe adódik a $x(-2 - x) = -3$, illetve $x^2 + 2x - 3 = 0$ másodfokú egyenlet, amelynek gyökei $x_3 = 1$ és $x_4 = -3$, a hozzájuk tartozó y értékek pedig $y_3 = -3$ és $y_4 = 1$. Így a $(1, -3)$ és $(-3, 1)$ rendezett párok is megoldásai az eredeti egyenletrendszernek.

Az eredeti egyenletrendszer megoldáshalmaza $M = \{(-3, 1), (1, -3), (1, 2), (2, 1)\}$.

9. Határozzuk meg az

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 13, \\x^3 + y^3 &= 19\end{aligned}$$

nemlineáris egyenletrendszer egész megoldásait.

Megoldás. Alakítsuk át az egyenletrendszert a következőképpen:

$$\begin{aligned}(x + y)^2 - 2xy &= 13, \\(x + y)[(x + y)^2 - 3xy] &= 19.\end{aligned}$$

Vezessük be az $x + y = a$ és $xy = b$ helyettesítést. Ekkor az

$$\begin{aligned} a^2 - 2b &= 13, \\ a(a^2 - 3b) &= 19. \end{aligned}$$

egyenletrendszert kapjuk. Az első egyenletből $b = \frac{a^2 - 13}{2}$, s ezt a kifejezést a második egyenletbe helyettesítve kapjuk az

$$a \left(a^2 - \frac{3a^2 - 39}{2} \right) = 19 \quad \text{illetve rendezés után} \quad -a^3 + 39a - 38 = 0$$

egyenletet, amelyről könnyen belátható, hogy egyik megoldása $a_1 = 1$, Horner elrendezéssel pedig a másik két megoldás is megkapható egy másodfokú egyenlet segítségével.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & -1 & 0 & 39 & -38 \\ \hline & -1 & -1 & 38 & 0 \end{array}$$

Innen $-a^3 + 39a - 38 = (a - 1)(-a^2 - a + 38)$, így belátható, hogy a $-a^2 - a + 38 = 0$ másodfokú egyenlet megoldásaira van szükségünk, amelyek

$$a_2 = -\frac{1 + \sqrt{153}}{2} \quad \text{és} \quad a_3 = -\frac{1 - \sqrt{153}}{2} \quad \text{irracionális számok.}$$

Ha $a_1 = 1$, akkor akkor $b_1 = -6$, és az $x + y = 1$ és $xy = -6$ egyenletrendszerből az $x_1 = 3$, $y_1 = -2$, valamint $x_2 = -2$, $y_2 = 3$ megoldásokat kapjuk. Az a_2 és a_3 számok irracionálisak, tehát ebben az esetben nem kapunk egész megoldásokat. A keresett megoldáshalmaz így $M = \{(3, -2), (-2, 3)\}$.

10. Oldjuk meg a

$$\begin{aligned} 2x^2 - 15xy + 4y^2 - 12x + 45y &= 24, \\ x^2 + xy - 2y^2 - 3x + 3y &= 0 \end{aligned}$$

másodfokú egyenletrendszert.

Megoldás. A második egyenletben a szabad tag 0, ezért próbáljuk meg a tagokat csoportosítani és tényezőkre bontani a következő módon:

$$\begin{aligned} x^2 + xy - 2y^2 - 3x + 3y &= x^2 - xy + 2xy - 2y^2 - 3x + 3y = \\ &= x(x - y) + 2y(x - y) - 3(x - y) = (x - y)(x + 2y - 3). \end{aligned}$$

Innen a második egyenlet ekvivalens alakja

$$(x - y)(x + 2y - 3) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x - y = 0 \quad \text{vagy} \quad x + 2y - 3 = 0.$$

Most tulajdonképpen két egyenletrendszert kell megoldanunk. Az első egyenletrendszer $x - y = 0$ esetén a következő másodfokú egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 15xy + 4y^2 - 12x + 45y &= 24, \\ x - y &= 0. \end{aligned}$$

A második egyenletből azt kapjuk, hogy $x = y$. Helyettesítsük ezt be az első egyenletbe. Ekkor

$$\begin{aligned} 2x^2 - 15xy + 4y^2 - 12x + 45y &= 24 \\ 2y^2 - 15y^2 + 4y^2 - 12y + 45y &= 24 \\ -9y^2 + 33y - 24 &= 0 \\ 3y^2 - 11y + 8 &= 0 \\ y_1 = 1, \quad y_2 = \frac{8}{3}, \end{aligned}$$

a megfelelő x értékek pedig $x_1 = 1$ és $x_2 = \frac{8}{3}$, s az $(1, 1)$ és $\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$ rendezett párok megoldások. Az egyenletrendszer megoldáshalmaza

$$M_1 = \left\{ (1, 1), \left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right) \right\}.$$

A második egyenletrendszert $x + 2y - 3 = 0$ esetén kapjuk:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 15xy + 4y^2 - 12x + 45y &= 24, \\ x + 2y - 3 &= 0. \end{aligned}$$

A második egyenletből azt kapjuk, hogy $x = 3 - 2y$. Helyettesítsük ezt be az első egyenletbe. Ekkor

$$\begin{aligned} 2x^2 - 15xy + 4y^2 - 12x + 45y &= 24 \\ 2(3 - 2y)^2 - 15y(3 - 2y) + 4y^2 - 12(3 - 2y) + 45y &= 24 \\ 42y^2 - 42 &= 0 \\ y^2 &= 1 \\ y_3 = 1, \quad y_4 = -1, \end{aligned}$$

a megfelelő x értékek pedig $x_3 = 1$ és $x_4 = 5$, s az $(1, 1)$ és $(5, -1)$ rendezett párok megoldások. Az egyenletrendszer megoldáshalmaza

$$M_2 = \{(1, 1), (5, -1)\}.$$

Az eredeti egyenletrendszer megoldáshalmaza most a két megoldáshalmaz uniója, azaz

$$M = \left\{ (1, 1), (5, -1), \left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right) \right\}.$$

7.4. Irracionális egyenletek

Irracionális egyenleteknek nevezzük az olyan egyenleteket, amelyekben az ismeretlen valamelyik gyökjel alatt is szerepel. Az ilyen egyenletek lehetnek igen összetettek is, és a lineáris és másodfokú egyenletektől eltérően, nem létezik általános képlet vagy szabály a megoldásukra. Valójában az irracionális egyenleteknek csak néhány egyszerűbb típusát lehetséges megoldani. Általánosan kimondható, hogy az irracionális egyenletek megoldásakor arra törekszünk, hogy „megszabaduljunk” a gyököktől. Ez legtöbbször az eredeti egyenlet hatványozásával érhető el. Itt azonban rögtön ki kell emelnünk azt a tényt, hogy a hatványozás nem ekvivalens transzformáció. A hatványozott egyenlet megoldáshalmaza tartalmazza az eredeti egyenlet minden megoldását, de tartalmazhat olyan megoldásokat is, amelyek az irracionális egyenletet nem elégítik ki. Ezért a feladat megoldási eljárásának kezdetén a kikötések alapján az eredeti egyenlet értelmezési tartományát, majd a hatványozott egyenlet megoldásai közül csak azokat kell elfogadni, amelyek ehhez az értelmezési tartományhoz hozzátartoznak.

7.34. Példa. A $\sqrt{x+1} = -2$ egyenletnek nincs megoldása, mivel az egyenlet bal oldalán egy nemnegatív kifejezés áll, míg a jobb oldalon egy negatív szám. A megoldáshalmaz ebben az esetben $M = \emptyset$. Négyzetre emeléssel viszont megkaphatjuk az $x+1 = 4$ egyenletet, amelynek megoldása $x = 3$. Ez a megoldás természetesen nem teljesíti az eredeti egyenletet.

7.35. Példa. A $\sqrt{x} = 2 - x$ irracionális egyenlet értelmezési tartománya az $x \geq 0$ és $2 - x \geq 0$ egyenlőtlenségek konjunkciója, azaz a $[0, 2]$ intervallum. Az eredeti egyenlet négyzetre emelésével az $x = 4 - 4x + x^2$, illetve rendezés után az $x^2 - 5x + 4 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek megoldásai $x_1 = 1$ és $x_2 = 4$. Mivel a kapott megoldások közül csak $x_1 = 1$ tartozik a feladat értelmezési tartományába, így a megoldáshalmaz $M = \{1\}$. $x_2 = 4$ nem megoldás, hiszen nem tartozik az értelmezési tartományba és a behelyettesítés során a $2 = -2$ ellentmondást kapjuk.

Annak a ténynek a megállapítása, hogy a kapott megoldások közül melyik megoldásai az eredeti egyenletnek, egyszerű behelyettesítéssel is ellenőrizhető. Ez nem túl elegáns módszer, de összetettebb értelmezési tartomány esetében így is eljárhatunk.

Ha az irracionális egyenlet ekvivalens átalakításokkal

$$\sqrt{a(x)} = b(x)$$

alakra hozható, akkor az egyenlet a következő ekvivalencia alapján oldható meg:

$$\begin{aligned} \sqrt{a(x)} = b(x) &\iff a(x) = [b(x)]^2 \quad \wedge \quad a(x) \geq 0 \quad \wedge \quad b(x) \geq 0 \\ &\iff a(x) = [b(x)]^2 \quad \wedge \quad b(x) \geq 0. \end{aligned}$$

7.36. Példa. A $\sqrt{3x+1} = x-2$ egyenlet megoldása tehát így végezhető el:

$$\begin{aligned} \sqrt{3x+1} = x-2 &\iff 3x+1 = (x-2)^2 \quad \wedge \quad x-2 \geq 0 \\ &\iff 3x+1 = x^2 - 4x + 4 \quad \wedge \quad x \geq 2 \\ &\iff x^2 - 7x + 3 = 0 \quad \wedge \quad x \geq 2 \\ &\iff x_1 = \frac{7 - \sqrt{37}}{2}, \quad x_2 = \frac{7 + \sqrt{37}}{2} \quad \wedge \quad x \geq 2 \\ &\iff x_2 = \frac{7 + \sqrt{37}}{2}, \text{ a megoldáshalmaz pedig } M = \left\{ \frac{7 + \sqrt{37}}{2} \right\}. \end{aligned}$$

7.37. Példa. Határozzuk meg a $\sqrt{x+5} + \sqrt{20-x} = 7$ irracionális egyenlet megoldáshalmazát. Az egyenlet értelmezési tartományát az $x+5 \geq 0$ és $20-x \geq 0$ egyenlőtlenségrendszer alapján kaphatjuk meg, amelynek megoldása $x \geq -5$ és $x \leq 20$, azaz a $D = [-5, 20]$ zárt intervallum. Az egyenlet bal oldala két nemnegatív kifejezés összege, a jobb oldal pedig egy pozitív szám, így négyzetre emelhetjük mindkét oldalt. Ekkor az

$$x+5+2\sqrt{(x+5)(20-x)}+20-x=49 \quad \text{és} \quad x \in D$$

rendszert kapjuk, illetve rendezés után következik

$$\sqrt{(x+5)(20-x)} = 12 \quad \text{és} \quad x \in D.$$

Emeljük négyzetre a kapott egyenletet. Ekkor a $-x^2+15x+100-144=0$, illetve rendezés után az $x^2-15x+44=0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek megoldásai $x_1=11$ és $x_2=4$. Mivel mindkét megoldás benne van a D értelmezési tartományban, tehát az eredeti irracionális egyenlet megoldáshalmaza $M = \{4, 11\}$.

7.38. Példa. Oldjuk meg a $\sqrt{x+17} - \sqrt{x-7} = 4$ irracionális egyenletet. Értelmezési tartománya az $x+17 \geq 0$ és $x-7 \geq 0$, azaz $x \geq -17$ és $x \geq 7$ egyenlőtlenségrendszer megoldása, ezért az értelmezési tartomány a $D = [7, \infty)$ intervallum. Mivel az egyenlet bal oldalán különbség áll, rendezzük át az egyenletet $\sqrt{x+17} = 4 + \sqrt{x-7}$ alakra, majd emeljük négyzetre mindkét oldalát. Ekkor az

$$x+17=16+8\sqrt{x-7}+x-7 \quad \text{és} \quad x \in D$$

rendszert kapjuk, amely felírható a következő alakban is:

$$\sqrt{x-7} = 1 \quad \text{és} \quad x \in D.$$

Ha négyzetre emeljük a kapott irracionális egyenletet, akkor az $x-7=1$ lineáris egyenletet kapjuk, ahonnan $x=8$. Mivel a kapott megoldás benne van az értelmezési tartományban, így a megoldáshalmaz $M = \{8\}$.

7.39. Példa. Oldjuk meg a $\sqrt{x^2+5x+2} - \sqrt{x^2-3x+3} = 3$ egyenletet. Az egyenlet értelmezési tartománya az

$$x^2+5x+2 \geq 0 \quad \text{és} \quad x^2-3x+3 \geq 0$$

egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmaza. Mivel az első egyenlőtlenség

$$x \in \left(-\infty, \frac{-5-3\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{-5+3\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$$

esetén, az második pedig $x \in (-\infty, \infty)$ esetén teljesül, ezért az értelmezési tartomány

$$D = \left(-\infty, \frac{-5-3\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{-5+3\sqrt{2}}{2}, \infty\right).$$

Rendezzük az egyenletet $\sqrt{x^2+5x+2} = 3 + \sqrt{x^2-3x+3}$ alakra, majd emeljük négyzetre mindkét oldalát. Ekkor az

$$x^2+5x+2=9+6\sqrt{x^2-3x+3}+x^2-3x+3,$$

majd rendezés után a

$$8x - 10 = 6\sqrt{x^2 - 3x + 3}, \quad \text{illetve} \quad 3\sqrt{x^2 - 3x + 3} = 4x - 5$$

irracionális egyenletet kapjuk. Fontos megjegyezni, hogy ennél az egyenletnél kapunk egy új kikötést, mégpedig azt, hogy $4x - 5 \geq 0$, vagyis $x \geq \frac{5}{4}$, ami azt jelenti, hogy az értelmezési tartomány a $D^* = \left[\frac{5}{4}, \infty\right)$ tartományra módosul. Emeljük most négyzetre a kapott irracionális egyenletet. Ekkor a

$$9(x^2 - 3x + 3) = 16x^2 - 40x + 25, \quad \text{illetve} \quad 7x^2 - 13x - 2 = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek gyökei $x_1 = 2$ és $x_2 = -\frac{1}{7}$. Mivel a kapott gyökök közül csak a pozitív gyöktartozik a D^* értelmezési tartományba, ezért a megoldáshalmaz most $M = \{2\}$.

7.40. Példa. Oldjuk meg a $\sqrt{x - 4 + \sqrt{x - 2}} - \sqrt{x - 3 - \sqrt{x - 2}} = 1$ irracionális egyenletet. Az értelmezési tartomány meghatározása ebben az esetben nem olyan egyszerű, ezért a megoldásokat az eredeti egyenletbe való visszahelyettesítéssel fogjuk ellenőrizni. Vegyük továbbá észre, hogy mindkét gyökjel alatt megjelenik a $\sqrt{x - 2}$ kifejezés. Helyettesítsük ezt a kifejezést új változóval. Legyen $\sqrt{x - 2} = t$. Ekkor $x - 2 = t^2$ és $x = t^2 + 2$. Az egyenlet most t változóval felírva:

$$\sqrt{t^2 + t - 2} - \sqrt{t^2 - t - 1} = 1, \quad \text{illetve} \quad \sqrt{t^2 + t - 2} = 1 + \sqrt{t^2 - t - 1}.$$

Négyzetre emelve a kapott egyenletet adódik a

$$t^2 + t - 2 = 1 + 2\sqrt{t^2 - t - 1} + t^2 - t - 1, \quad \text{illetve} \quad t - 1 = \sqrt{t^2 - t - 1}$$

irracionális egyenlet. Emeljük négyzetre a most kapott irracionális egyenletet is. Ekkor a

$$t^2 - 2t + 1 = t^2 - t - 1, \quad \text{illetve a} \quad t = 2$$

megoldást kapjuk. Ebből a $\sqrt{x - 2} = 2$ irracionális egyenletet kapjuk, négyzetre emeléssel pedig $x - 2 = 4$, azaz $x = 6$ adódik. Mivel ez a megoldás kielégíti az eredeti egyenletrendszert, hiszen

$$\begin{aligned} \sqrt{6 - 4 + \sqrt{6 - 2}} - \sqrt{6 - 3 - \sqrt{6 - 2}} &= \sqrt{2 + \sqrt{4}} - \sqrt{3 - \sqrt{4}} = \\ &= \sqrt{2 + 2} - \sqrt{3 - 2} = \sqrt{4} - \sqrt{1} = 2 - 1 = 1, \end{aligned}$$

így a feladat megoldáshalmaza $M = \{6\}$.

Az irracionális egyenletekben természetesen a négyzetgyökök helyett (vagy mellett) harmadik, negyedik vagy más gyökök is szerepelhetnek. A kidolgozott feladatok között majd ilyen eseteket is bemutatunk.

FELADATOK

1. Oldjuk meg az $x + \sqrt{4 + x^2} = 8$ irracionális egyenletet.

Megoldás. Rendezzük át az egyenletet úgy, hogy bal oldalon csak a négyzetgyök maradjon. Ekkor

$$\sqrt{4 + x^2} = 8 - x.$$

Mivel $4 + x^2 \geq 0$ minden x valós számra, így az értelmezési tartományt a $8 - x \geq 0$ kitűzés határozza meg, az $x \leq 8$. Az értelmezési tartomány most $D = (-\infty, 8]$. Emeljük négyzetre az átrendezett irracionális egyenletet. Ekkor a

$$4 + x^2 = 64 - 16x + x^2 \quad \text{illetve} \quad 16x = 60$$

egyenletet kapjuk, ahonnan $x = \frac{15}{4}$. Mivel ez a szám beleesik az értelmezési tartományba, így a megoldáshalmaz $M = \left\{ \frac{15}{4} \right\}$.

2. Keressük meg a $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x-2} = \sqrt{x+1}$ irracionális egyenlet megoldásait.

Megoldás. Az adott egyenlet értelmezett, ha

$$2x - 1 \geq 0 \quad \text{és} \quad x - 2 \geq 0 \quad \text{és} \quad x + 1 \geq 0,$$

azaz

$$x \geq \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad x \geq 2 \quad \text{és} \quad x \geq -1,$$

vagyis az értelmezési tartomány $D = [2, \infty)$. Emeljük négyzetre az egyenletet. Ekkor a

$$2x - 1 + 2\sqrt{(2x-1)(x-2)} + x - 2 = x + 1, \quad \text{azaz} \quad \sqrt{(2x-1)(x-2)} = 2 - x$$

irracionális egyenletet kapjuk, amely újabb négyzetre emeléssel és beszorzással a

$$2x^2 - 5x + 2 = 4 - 4x + x^2, \quad \text{illetve} \quad x^2 - x - 2 = 0$$

másodfokú egyenlethez vezet. A kapott másodfokú egyenlet megoldásai $x_1 = 2$ és $x_2 = -1$. Mivel az értelmezési tartomány csak az $x_1 = 2$ megoldást engedélyezi, ezért a megoldáshalmaz $M = \{2\}$.

3. Oldjuk meg a következő irracionális egyenletet:

$$\sqrt{x^2 + 4x + 8} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} = \sqrt{2(x^2 + 4x + 6)}.$$

Megoldás. Alakítsuk át a gyökjelek alatti kifejezéseket. Ekkor az egyenlet felírható a következő ekvivalens alakban:

$$\sqrt{(x+2)^2 + 4} + \sqrt{(x+2)^2} = \sqrt{2(x+2)^2 + 2},$$

így könnyen belátható, hogy az egyenlet minden x valós számra értelmezett, azaz az értelmezési tartomány most $D = \mathbf{R}$. Emeljük négyzetre az egyenlet mindkét oldalát. Ekkor az

$$x^2 + 4x + 8 + 2\sqrt{(x^2 + 4x + 8)(x^2 + 4x + 4)} + x^2 + 4x + 4 = 2x^2 + 8x + 12,$$

majd rendezés után a

$$\sqrt{x^2 + 4x + 8} \cdot \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 0$$

irracionális egyenletet kapjuk, ahol a bal oldal akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, tehát

$$x^2 + 4x + 8 = 0 \quad \text{vagy} \quad x^2 + 4x + 4 = 0,$$

illetve ekvivalens átalakítással

$$(x + 2)^2 + 4 = 0 \quad \text{vagy} \quad (x + 2)^2 = 0.$$

Az első egyenletnek nincs valós megoldása, a másodiknak pedig kettős gyöke van, azaz $x_1 = x_2 = -2$, ezért az eredeti irracionális egyenlet megoldáshalmaza

$$M = \{-2\}.$$

4. Adjuk meg a $\sqrt{3x^2 + 5x + 8} - \sqrt{3x^2 + 5x + 1} = 1$ irracionális egyenlet megoldásait.

Megoldás. Vizsgáljuk ki először az egyenlet értelmezési tartományát. Most a $3x^2 + 5x + 8 \geq 0$ és $3x^2 + 5x + 1 \geq 0$ egyenlőtlenségeknek kell egyszerre teljesülnie. Az első egyenlőtlenség minden x valós számra teljesül, a második pedig

$$x \in \left(-\infty, \frac{-5 - \sqrt{13}}{6}\right] \cup \left[\frac{-5 + \sqrt{13}}{6}, \infty\right)$$

esetén, ezért az egyenlet értelmezési tartománya:

$$D = \left(-\infty, \frac{-5 - \sqrt{13}}{6}\right] \cup \left[\frac{-5 + \sqrt{13}}{6}, \infty\right).$$

Rendezzük most az egyenletet

$$\sqrt{3x^2 + 5x + 8} = 1 + \sqrt{3x^2 + 5x + 1}$$

alakra, majd vezessük be a $3x^2 + 5x + 1 = t$ helyettesítést. Ekkor a

$$\sqrt{t + 7} = 1 + \sqrt{t}$$

irracionális egyenletet kapjuk, amely négyzetre emelés után a $t + 7 = 1 + 2\sqrt{t} + t$, illetve $\sqrt{t} = 3$ irracionális egyenletet adja, ennek megoldása pedig $t = 9$. Visszahelyettesítés után a

$$3x^2 + 5x + 1 = 9, \quad \text{illetve} \quad 3x^2 + 5x - 8 = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek megoldásai $x_1 = 1$ és $x_2 = -\frac{8}{3}$. Mivel mindkét megoldás benne van az értelmezési tartományban, így a megoldáshalmaz

$$M = \left\{-\frac{8}{3}, 1\right\}.$$

5. Mi a $\sqrt{\frac{3-x}{2+x}} + 3\sqrt{\frac{2+x}{3-x}} = 4$ irracionális egyenlet megoldáshalmaza?

Megoldás. Az egyenlet értelmezett, ha $\frac{3-x}{2+x} \geq 0$ és $\frac{2+x}{3-x} \geq 0$. Mindkét egyenlőtlenség a $D = (-2, 3)$ intervallum értékeire érvényes. Vegyük észre, hogy a $\sqrt{\frac{3-x}{2+x}} = t$ helyettesítés után az egyenlet felírható

$$t + \frac{3}{t} = 4, \quad \text{illetve} \quad t^2 - 4t + 3 = 0$$

másodfokú egyenlet alakjában, amelynek megoldásai $t_1 = 1$ és $t_2 = 3$. Visszahelyettesítés után a

$$\sqrt{\frac{3-x}{2+x}} = 1 \quad \text{és} \quad \sqrt{\frac{3-x}{2+x}} = 3,$$

négyzetre emelés után a

$$\frac{3-x}{2+x} = 1 \quad \text{és} \quad \frac{3-x}{2+x} = 9,$$

rendezés után pedig a $3-x = 2+x$ és $3-x = 18+9x$ egyenleteket kapjuk, amelyek megoldásai $x_1 = \frac{1}{2}$ és $x_2 = -\frac{3}{2}$. Mivel mindkét megoldás benne van a D értelmezési tartományban, ezért a megoldáshalmaz $M = \left\{-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\}$.

6. Oldjuk meg a $\sqrt{x+6-4\sqrt{x+2}} + \sqrt{11+x-6\sqrt{x+2}} = 1$ irracionális egyenletet.

Megoldás. Vezessük be a $\sqrt{x+2} = t$ helyettesítést. Ebből $x = t^2 - 2$, az egyenlet pedig a következő alakban írható fel:

$$\sqrt{t^2 - 4t + 4} + \sqrt{t^2 - 6t + 9} = 1, \quad \text{illetve} \quad \sqrt{(t-2)^2} + \sqrt{(t-3)^2} = 1.$$

Ebből az alakból látszik, hogy az egyenlet értelmezési tartománya $D = \mathbf{R}$, valamint

gyökvonás után a $|t-2| + |t-3| = 1$ abszolút értéket tartalmazó egyenletet kell megoldani. A mellékelt táblázat alapján három esetet vizsgálunk.

	$(-\infty, 2)$	$(2, 3)$	$(3, \infty)$
$t-2$	–	+	+
$t-3$	–	–	+

1° Ha $t < 2$, akkor $t-2 < 0$ és $t-3 < 0$, az egyenlet most $-t+2-t+3 = 1$, azaz $-2t = -4$, amelynek megoldása $t = 2$, de ez nincs benne a szemlélt intervallumban, így a megoldáshalmaz $M_1 = \emptyset$.

2° Ha $2 \leq t < 3$, akkor $t-2 \geq 0$ és $t-3 < 0$, az egyenlet most $t-2-t+3 = 1$, azaz $0 \cdot t = 0$, amelynek megoldása minden t valós szám, viszont a szemlélt intervallum alapján a megoldáshalmaz $M_2 = [2, 3)$.

3° Ha $t \geq 3$, akkor $t-2 \geq 0$ és $t-3 \geq 0$, az egyenlet most $t-2+t-3 = 1$, azaz $2t = 6$, amelynek megoldása $t = 3$, s mivel a szemlélt intervallumban is benne van, ezért a megoldáshalmaz $M_3 = \{3\}$.

Az eredeti egyenlet megoldáshalmaza ezért a $[2, 3]$ zárt intervallum, vagyis $2 \leq t \leq 3$.
Visszahelyettesítve kapjuk:

$$2 \leq \sqrt{x+2} \leq 3 \iff 4 \leq x+2 \leq 9 \iff 2 \leq x \leq 7.$$

Az eredeti egyenlet megoldáshalmaza tehát az $M = [2, 7]$ zárt intervallum.

7. Adjuk meg a $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-1}$ irracionális egyenlet megoldásait.

Megoldás. A köbgyök minden valós számra értelmezett, ezért nincs semmilyen kikötés, így az értelmezési tartomány $D = \mathbf{R}$. Emeljük köbre az egyenlet mindkét oldalát (a köbre emelés ekvivalens átalakítás). Ekkor az

$$x+1 + 3\sqrt[3]{(x+1)^2(3x+1)} + 3\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)^2} + 3x+1 = x-1$$

egyenletet kapjuk, amely rendezhető a következő alakra:

$$\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)} \left(\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} \right) = -3x-3.$$

Kihasználva azt, hogy a zárójelben levő kifejezés az egyenlet eredeti alakjából $\sqrt[3]{x-1}$, felírhatjuk a következő ekvivalens egyenletet:

$$\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)} \cdot \sqrt[3]{x-1} = -x-1.$$

Emeljünk újra köbre. Ekkor

$$(x+1)(3x+1)(x-1) = -(x+1)^3, \quad \text{vagyis} \quad (x+1)((3x+1)(x-1) + (x+1)^2) = 0,$$

ahonnan az $(x+1) \cdot 4x^2 = 0$ egyenletet kapjuk. Egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, tehát $x+1 = 0$ vagy $x^2 = 0$, ezért a megoldások $x_1 = -1$ és $x_2 = 0$. A megoldáshalmaz $M = \{-1, 0\}$.

8. Oldjuk meg a $\sqrt[3]{(a+x)^2} + 4 \cdot \sqrt[3]{(a-x)^2} = 5 \cdot \sqrt[3]{a^2-x^2}$ irracionális egyenletet, ha a valós paraméter.

Megoldás. A köbgyök minden valós számra értelmezett, ezért az értelmezési tartomány $D = \mathbf{R}$. Emeljük köbre az egyenlet mindkét oldalát. Ekkor az

$$(a+x)^2 + 12\sqrt[3]{(a+x)^4(a-x)^2} + 12\sqrt[3]{(a+x)^2(a-x)^4} + 64(a-x)^2 = 125(a^2-x^2),$$

egyenletet kapjuk, amely rendezés után

$$12\sqrt[3]{(a+x)^2(a-x)^2} \left(\sqrt[3]{(a+x)^2} + 4 \cdot \sqrt[3]{(a-x)^2} \right) = 60a^2 - 190x^2 + 126ax.$$

Az eredeti egyenletből való behelyettesítés után a

$$12\sqrt[3]{(a^2-x^2)^2} \cdot 5 \cdot \sqrt[3]{a^2-x^2} = 2(30a^2 - 95x^2 + 63ax),$$

egyenletet kapjuk, illetve újabb rendezés után az egyenlet alakja

$$30\sqrt[3]{(a^2-x^2)^3} = 30a^2 - 95x^2 + 63ax, \quad \text{vagyis} \quad 30(a^2-x^2) = 30a^2 - 95x^2 + 63ax.$$

Beszorzás és rendezés után adódik a $65x^2 - 63ax = 0$ másodfokú egyenlet, illetve szorzat alakban az $x(65x - 63a) = 0$ egyenlet, amelynek megoldásai $x_1 = 0$ és $x_2 = \frac{63a}{65}$. Így az eredeti egyenlet megoldáshalmaza $M = \left\{ 0, \frac{63a}{65} \right\}$.

9. Oldjuk meg a $\sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x} = 5$ irracionális egyenletet.

Megoldás. Az egyenlet értelmezési tartományának meghatározásához a kikötések

$$97 - x \geq 0 \quad \text{és} \quad x \geq 0,$$

vagyis az értelmezési tartomány a $D = [0, 97]$ zárt intervallum. Vezessük be a $\sqrt[4]{97-x} = t$ és $\sqrt[4]{x} = u$ helyettesítéseket, ahonnan $97 - x = t^4$ és $x = u^4$. Ekkor az eredeti egyenlet helyett felírható a

$$\begin{aligned} t + u &= 5, \\ t^4 + u^4 &= 97 \end{aligned}$$

egyenletrendszer. Mivel

$$\begin{aligned} t^4 + u^4 &= (t^2 + u^2)^2 - 2t^2u^2 = ((t + u)^2 - 2tu)^2 - 2t^2u^2 = \\ &= (25 - 2tu)^2 - 2t^2u^2 = 625 - 100tu + 2t^2u^2, \end{aligned}$$

így a $625 - 100tu + 2t^2u^2 = 97$ egyenletet kapjuk, amely rendezés után felírható

$$(tu)^2 - 50(tu) + 264 = 0$$

alakban, és innen $tu = 44$ vagy $tu = 6$. Ezért a következő két egyenletrendszert kell megoldani:

$$\begin{array}{ll} t + u = 5, & \text{és} \\ tu = 44 & tu = 6. \end{array}$$

Az első egyenletrendszer megoldása: az első egyenletből $u = 5 - t$, ezt behelyettesítve a második egyenletbe adódik $t(t - 5) = 44$, azaz a $t^2 - 5t + 44 = 0$ másodfokú egyenlet, amelynek nincsenek valós megoldásai.

A második egyenletrendszer megoldása: az első egyenletből $u = 5 - t$, ezt behelyettesítve a második egyenletbe adódik $t(5 - t) = 6$, azaz a $t^2 - 5t + 6 = 0$ másodfokú egyenlet, amelynek megoldásai $t_1 = 3$ és $t_2 = 2$, a hozzájuk tartozó u értékek pedig $u_1 = 2$ és $u_2 = 3$.

A $t_1 = 3$ és $u_1 = 2$ esetben a

$$\sqrt[4]{97-x} = 3 \quad \text{és} \quad \sqrt[4]{x} = 2$$

rendszert kell megoldanunk. Az első egyenletből $97 - x = 81$, azaz $x = 16$, a második egyenletből pedig szintén $x = 16$ adódik, az egyik megoldás tehát $x_1 = 16$.

A $t_2 = 2$ és $u_2 = 3$ esetben a

$$\sqrt[4]{97-x} = 2 \quad \text{és} \quad \sqrt[4]{x} = 3$$

rendszert kell megoldanunk. Az első egyenletből $97 - x = 16$, azaz $x = 81$, a második egyenletből pedig szintén $x = 81$ adódik, így a másik megoldás $x_2 = 81$.

Mivel mindkét megoldás benne van a $D = [0, 97]$ zárt intervallumban, így a megoldáshalmaz

$$M = \{16, 81\}.$$

10. Határozzuk meg a $\sqrt[4]{80+x} + \sqrt[4]{2-x} = 4$ irracionális egyenlet megoldáshalmazát.

Megoldás. Az egyenlet értelmezési tartományának meghatározásához a kikötések

$$80 + x \geq 0 \quad \text{és} \quad 2 - x \geq 0,$$

vagyis $x \geq -80$ és $x \leq 2$ alapján az értelmezési tartomány a $D = [-80, 2]$ zárt intervallum. Vezessük be a $\sqrt[4]{80+x} = a$ és $\sqrt[4]{2-x} = b$ helyettesítéseket, ahonnan $80 + x = a^4$ és $2 - x = b^4$. Ekkor az eredeti egyenlet helyett felírható a

$$\begin{aligned} a + b &= 4, \\ a^4 + b^4 &= 82 \end{aligned}$$

egyenletrendszer. Mivel a második egyenlet bal oldala felírható

$$a^4 + b^4 = ((a+b)^2 - 2ab)^2 - 2a^2b^2 = (16 - 2ab)^2 - 2a^2b^2 = 2a^2b^2 - 64ab + 265$$

módon, így az adott egyenlet felírható

$$2a^2b^2 - 64ab + 265 = 82, \quad \text{illetve} \quad (ab)^2 - 32(ab) + 87 = 0$$

másodfokú egyenlet alakjában, ahonnan a megoldások $ab = 29$ vagy $ab = 3$. Ezek szerint most a következő két egyenletrendszert kell megoldani:

$$\begin{aligned} a + b &= 4, & \text{és} & & a + b &= 4, \\ ab &= 29 & & & ab &= 3. \end{aligned}$$

Az első egyenletrendszer megoldása: az első egyenletből $b = 4 - a$, ezt behelyettesítve a második egyenletbe adódik $a(4 - a) = 29$, azaz a $a^2 - 4a + 29 = 0$ másodfokú egyenlet, ahonnan nem kapunk valós megoldást.

A második egyenletrendszer megoldása: az első egyenletből $b = 4 - a$, ezt behelyettesítve a második egyenletbe adódik $a(4 - a) = 3$, azaz a $a^2 - 4a + 3 = 0$ másodfokú egyenlet, ahonnan $a_1 = 1$ és $a_2 = 3$ a megoldások, a hozzájuk tartozó b értékek pedig $b_1 = 3$ és $b_2 = 1$.

Mivel a helyettesítés szerint $\sqrt[4]{80+x} = a$, így a

$$\sqrt[4]{80+x} = 1, \quad \text{illetve} \quad \sqrt[4]{80+x} = 3$$

irracionális egyenleteket kell megoldanunk. Negyedik hatványra emelve mindkét egyenletet adódik

$$80 + x = 1, \quad \text{illetve} \quad 80 + x = 81,$$

ahonnan az $x_1 = -79$ és $x_2 = 1$ megoldásokat kapjuk.

Ellenőrzéssel megállapíthatjuk, hogy ha a $\sqrt[4]{2-x} = b$ egyenlőségbe helyettesítjük vissza a $b_1 = 3$ és $b_2 = 1$ értékeket, akkor ugyanehhez a két megoldáshoz jutunk.

Mivel mindkét megoldás benne van a $D = [-80, 2]$ zárt intervallumban, így a megoldáshalmaz

$$M = \{-79, 1\}.$$

7.5. Irracionális egyenlőtlenségek

Irracionális egyenlőtlenségnek nevezzük az olyan egyenlőtlenségeket, amelyekben az ismeretlen gyökjel alatt is szerepel. Ezeknek az egyenlőtlenségeknek a megoldása még összetettebb mint az irracionális egyenletek megoldása, ezért itt csak a négyzetgyökre korlátozódunk. Az egyenlőtlenség mindkét oldalának négyzetre emelése viszont nem mindig engedélyezett. Például, a $-4 < -1$ helyes egyenlőtlenséget négyzetre emelve a $16 < 1$ helytelen egyenlőtlenséget kapjuk. Arra kell törekednünk, hogy az $y = x^2$ függvénygrafikon monotonitási tulajdonságait használjuk ki, miszerint $y = x^2$ szigorúan monoton csökkenő negatív értékekre, illetve szigorúan monoton növekvő pozitív értékekre. Ezt a tulajdonságot így is felírhatjuk:

$$x_1 < x_2 < 0 \iff x_1^2 > x_2^2, \quad \text{valamint} \quad 0 < x_1 < x_2 \iff x_1^2 < x_2^2.$$

Az irracionális egyenlőtlenségek megoldásakor arra törekszünk, hogy azokat a

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x), \quad \sqrt{f(x)} < g(x), \quad \sqrt{f(x)} \geq g(x) \quad \text{vagy} \quad \sqrt{f(x)} > g(x)$$

alakra hozzuk, a kapott egyenlőtlenségeket pedig a következő, velük ekvivalens egyenlőtlenségrendszerekkel helyettesíthetjük:

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \iff f(x) \geq 0 \wedge g(x) \geq 0 \wedge f(x) \leq [g(x)]^2,$$

illetve

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \iff (f(x) \geq 0 \wedge g(x) \leq 0) \vee (f(x) \geq 0 \wedge g(x) \geq 0 \wedge f(x) \geq [g(x)]^2).$$

Az $\sqrt{f(x)} < g(x)$ és $\sqrt{f(x)} > g(x)$ eset hasonló módon oldható meg.

7.41. Példa. A $\sqrt{x+6} < x-6$ irracionális egyenlőtlenség a következő ekvivalens egyenlőtlenségrendszerekkel helyettesíthető:

$$\sqrt{x+6} < x-6 \iff x+6 \geq 0 \wedge x-6 \geq 0 \wedge x+6 < (x-6)^2.$$

A kapott egyenlőtlenségrendszer ekvivalens az

$$x \geq -6 \wedge x \geq 6 \wedge (x < 3 \vee x > 10)$$

egyenlőtlenségrendszerrel, amelynek megoldása $x > 10$, vagyis a három tartomány metszete, azaz a $(10, \infty)$ intervallum. Az eredeti egyenlőtlenség megoldáshalmaza tehát az $M = (10, \infty)$ nyitott intervallum.

7.42. Példa. A $\sqrt{x+3} > x+1$ irracionális egyenlőtlenség megoldása a következő ekvivalens átlakításokkal oldható meg:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} > x+1 &\iff \\ \iff (x+3 \geq 0 \wedge x+1 \leq 0) \vee (x+3 \geq 0 \wedge x+1 \geq 0 \wedge x+3 \geq (x+1)^2) \\ \iff (x \geq -3 \wedge x \leq -1) \vee (x \geq -3 \wedge x \geq -1 \wedge x+3 \geq x^2+2x+1) \\ \iff (-3 \leq x \leq -1) \vee (x \geq -3 \wedge x \geq -1 \wedge x^2+x-2 < 0) \\ \iff (-3 \leq x \leq -1) \vee (x \geq -3 \wedge x \geq -1 \wedge -2 < x < 1) \\ \iff (-3 \leq x \leq -1) \vee (-1 < x < 1) \\ \iff -3 \leq x < 1. \end{aligned}$$

Eszerint az eredeti egyenlőtlenség megoldáshalmaza az $M = [-3, 1)$ intervallum.

7.43. Példa. A

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} \geq \sqrt{2-x}$$

egyenlőtlenség értelmezett, ha $x \geq -1$ és $x \geq 2$ és $x \leq 2$, vagyis csak az $x = 2$ értékre. Mivel behelyettesítve az $x = 2$ értéket kapjuk, hogy $\sqrt{2+1} + \sqrt{2-2} \geq \sqrt{2-2}$, illetve rendezés után $\sqrt{3} + \sqrt{0} \geq \sqrt{0}$, megállapíthatjuk, hogy ez igaz állítás, tehát az egyenlőtlenség megoldáshalmaza $M = \{2\}$.

7.44. Példa. A

$$\sqrt{5x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5}$$

egyenlőtlenség értelmezett, ha $x \geq -\frac{6}{5}$ és $x \geq -1$ és $x \geq \frac{5}{2}$, vagyis $x \geq \frac{5}{2}$ esetén, ami azt jelenti, hogy az egyenlőtlenség értelmezési tartománya a $D = \left[\frac{5}{2}, \infty\right)$ intervallum. Ez az egyenlet az alapesetek közül egyikkel sem egyezik meg, tehát ekvivalens átalakításokat kell alkalmazni. Mivel mindkét oldalon pozitív kifejezés áll, ezért négyzetre emelhető mindkét oldal, s a relációjel nem változik, vagyis

$$5x+6 > x+1+2x-5+2\sqrt{(x+1)(2x-5)}, \quad \text{illetve} \quad \sqrt{(x+1)(2x-5)} < x+5.$$

A kapott ekvivalens egyenlőtlenség az alapesetekhez tartozik, ezért a következő egyenlőtlenségek konjunkciójával ekvivalens:

$$(x+1)(2x-5) \geq 0 \wedge x+5 \geq 0 \wedge 2x^2-3x-5 < x^2+10x+25.$$

A megoldást most a következő konjunkció alapján kapjuk:

$$x \in (-\infty, -1] \cup \left[\frac{5}{2}, \infty\right) \wedge x \in [-5, \infty) \wedge x \in (-2, 15),$$

amelynek megoldása $x \in (-2, -1] \cup \left[\frac{5}{2}, 15\right)$.

Az eredeti egyenlőtlenség megoldáshalmazát az $(-2, -1] \cup \left[\frac{5}{2}, 15\right)$ intervallum D értelmezési tartománnyal való metszete adja, amely most az $M = \left[\frac{5}{2}, 15\right)$ intervallum.

FELADATOK

1. Oldjuk meg a $\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}} > -2$ irracionális egyenlőtlenséget.

Megoldás. Mivel az egyenlőtlenség bal oldala egy nemnegatív kifejezés, a jobb oldal pedig negatív, így az állítás mindig igaz, amikor a gyök alatti kifejezés nemnegatív, azaz $\frac{2x-1}{x+1} \geq 0$ esetén.

Az adott hányados előjelét a következő táblázatból könnyen kiolvashatjuk:

	$(-\infty, -1)$	$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$
$2x-1$	–	+	+
$x+1$	–	–	+
$\frac{2x-1}{x+1}$	+	–	+

A $\frac{2x-1}{x+1}$ hányados akkor pozitív, ha $x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ és a kapott intervallum az adott egyenlőtlenség megoldása is, tehát az eredeti egyenlőtlenség megoldáshalmaza most intervallumok uniója:

$$M = (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right).$$

2. Adjuk meg a $\sqrt{x^2 - x - 1} < 1$ irracionális egyenlőtlenség megoldáshalmazát.

Megoldás. Az értelmezési tartomány meghatározásához az egyetlen kikötés az, hogy $x^2 - x - 1 \geq 0$ teljesüljön, így az értelmezési tartomány a

$$D = \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$$

intervallum. Mivel az egyenlőtlenség $\sqrt{f(x)} < g(x)$ típusú, ezért megoldáshalmaza az

$$x^2 - x - 1 \geq 0 \quad \wedge \quad 1 \geq 0 \quad \wedge \quad x^2 - x - 1 < 1$$

rendszer megoldáshalmazával ekvivalens, ez pedig

$$x \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right) \quad \wedge \quad x \in \mathbf{R} \quad \wedge \quad x \in (-1, 2).$$

A kapott intervallumok metszete, s egyben az eredeti egyenlőtlenség megoldáshalmaza

$$M = \left(-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2\right).$$

3. Oldjuk meg a $\sqrt{3-x} > x-2$ irracionális egyenlőtlenséget.

Megoldás. Az egyenlőtlenség a második alaptípushoz tartozik, ezért

$$\begin{aligned} \sqrt{3-x} > x-2 &\iff \\ \iff (3-x \geq 0 \wedge x-2 \leq 0) \vee (3-x \geq 0 \wedge x-2 \geq 0 \wedge 3-x \geq (x-2)^2) \\ \iff (x \leq 3 \wedge x \leq 2) \vee (x \leq 3 \wedge x \geq 2 \wedge x^2 - 3x + 1 < 0) \\ \iff x \leq 2 \vee \left(2 \leq x \leq 3 \wedge \frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \\ \iff x \leq 2 \vee \left(2 \leq x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \\ \iff x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy a megoldáshalmaz ismét egy intervallum, mégpedig

$$M = \left(\infty, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right).$$

4. Határozzuk meg a $(x-1)\sqrt{-x^2+x+6} \geq 0$ irracionális egyenlőtlenség megoldásait.

Megoldás. Az egyenlőtlenség bal oldala egy szorzat, amelynek nemnegatívnak kell lennie, miközben a szorzat egy tényezője, a gyökös kifejezés nemnegatív, ezért a másik tényezőnek is nemnegatívnak kell lennie. Ugyanakkor a gyök alatti kifejezés sem lehet negatív. Így a következő feltételeknek kell teljesülnie:

$$(x-1 \geq 0 \wedge -x^2+x+6 \geq 0) \iff (x \geq 1 \wedge -2 \leq x \leq 3).$$

A közös tartomány az $[1, 3]$ zárt intervallum. Az adott irracionális egyenlőtlenség megoldása még az $x = -2$ szám is, mert ekkor a gyökös tényező nullával egyenlő. A megoldáshalmaz tehát $M = \{-2\} \cup [1, 3]$.

5. Oldjuk meg a $\sqrt{4-3x} - \sqrt{6+x} > 1$ irracionális egyenlőtlenséget.

Megoldás. A D értelmezési tartományt a következő kikötések alapján határozzuk meg:

$$(4-3x \geq 0 \wedge 6+x \geq 0) \iff -6 \leq x \leq \frac{4}{3},$$

így $D = \left[-6, \frac{4}{3}\right]$. Mivel az egyenlőtlenség egyik alaptípusnak sem felel meg, ezért rendezés, illetve négyzetre emelés után

$$\sqrt{4-3x} > 1 + \sqrt{6+x} \quad \text{illetve} \quad 4-3x > 1 + 2\sqrt{6+x} + 6+x,$$

további rendezés után pedig

$$\sqrt{6+x} < -2x - \frac{3}{2}$$

irracionális egyenlet adódik. Ez már alapeset, így ekvivalens a következő konjunkcióval:

$$6+x \geq 0 \wedge -2x - \frac{3}{2} \geq 0 \wedge 6+x < 4x^2 + 6x + \frac{9}{4},$$

amelynek megoldása

$$x \geq -6 \wedge x \leq -\frac{3}{4} \wedge 16x^2 + 20x - 15 > 0,$$

vagyis

$$-6 \leq x \leq -\frac{3}{4} \wedge \left(x < \frac{-5-\sqrt{85}}{8} \vee x > \frac{-5+\sqrt{85}}{8} \right),$$

ahonnan

$$-6 \leq x < \frac{-5-\sqrt{85}}{8}.$$

A kapott intervallum metszete az értelmezési tartománnyal maga a kapott intervallum, tehát a megoldáshalmaz

$$M = \left[-6, \frac{-5-\sqrt{85}}{8} \right).$$

6. Keressük meg a $\sqrt{x^2 - 3x + 2} < 2x - 1$ irracionális egyenlőtlenség összes megoldását.

Megoldás. Mivel az adott egyenlőtlenség alapeset, így a megoldás a következő egyenlőtlenségek konjunkciója:

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0 \wedge 2x - 1 \geq 0 \wedge x^2 - 3x + 2 < 4x^2 - 4x + 1,$$

illetve rendezés után

$$(x \leq 1 \vee x \geq 2) \wedge x \geq \frac{1}{2} \wedge \left(x < \frac{1 - \sqrt{13}}{6} \vee x > \frac{1 + \sqrt{13}}{6} \right)$$

adódik, amelynek megoldása az eredeti egyenlet megoldáshalmaza:

$$M = \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{6}, 1 \right] \cup [2, \infty).$$

7. Oldjuk meg a $\sqrt{-x^2 + x + 6} + x - 1 > 0$ irracionális egyenlőtlenséget.

Megoldás. Írjuk fel az adott egyenlőtlenséget

$$\sqrt{-x^2 + x + 6} > 1 - x$$

alakban. Ekkor valójában a második alapesetet kell megoldanunk. A megoldás a következő módon vezethető le:

$$\begin{aligned} & (-x^2 + x + 6 \geq 0 \wedge 1 - x \leq 0) \vee \\ & \vee (-x^2 + x + 6 \geq 0 \wedge 1 - x \geq 0 \wedge -x^2 + x + 6 > (1 - x)^2) \iff \\ & \iff (-2 \leq x \leq 3 \wedge x \geq 1) \vee \left(-2 \leq x \leq 3 \wedge x \leq 1 \wedge 1 < x < \frac{11}{4} \right) \iff \\ & \iff (1 \leq x \leq 3) \vee (-1 < x \leq 1) \iff -1 < x \leq 3. \end{aligned}$$

Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza tehát az $M = (-1, 3]$ intervallum.

8. Határozzuk meg a $\sqrt{6 - x - x^2} < \sqrt{3x + 6}$ irracionális egyenlőtlenség megoldáshalmazát.

Megoldás. Vizsgáljuk ki az adott irracionális egyenlőtlenség értelmezési tartományát. A kitűzéseink most $6 - x - x^2 \geq 0$ és $3x + 6 \geq 0$. Ez azt jelenti, hogy a $-3 \leq x \leq 2$ és $x \geq -2$ feltételek mindegyikének teljesülnie kell, így a megoldás $-2 \leq x \leq 2$, azaz az értelmezési tartomány a $D = [-2, 2]$ zárt intervallum.

Mivel az egyenlőtlenség mindkét oldala pozitív, ezért négyzetre emelve mindkét oldalt a relációjel nem változik. Ekkor a

$$6 - x - x^2 < 3x + 6, \quad \text{illetve} \quad x^2 + 4x > 0$$

másodfokú egyenlőtlenségre vezetődik vissza a feladat, amelynek megoldása most az $M_1 = (-\infty, -4) \cup (0, \infty)$ intervallum. Végül a kapott M_1 intervallum metszete a D értelmezési tartománnyal adja meg az egyenlőtlenség megoldáshalmazát, így

$$M = M_1 \cap D = (0, 2].$$

9. Oldjuk meg a $\sqrt{9-x^2} + \sqrt{6x-x^2} > 3$ irracionális egyenlőtlenséget.

Megoldás. Határozzuk meg az egyenlőtlenség értelmezési tartományát. A kitűzések most $9-x^2 \geq 0$ és $6x-x^2 \geq 0$, ami szerint a $-3 \leq x \leq 3$ és $0 \leq x \leq 6$ feltételeknek kell egyszerre teljesülnie, ami pedig $0 \leq x \leq 3$ esetén következik be. Így a feladat értelmezési tartománya $D = [0, 3]$.

Az egyenlőtlenség mindkét oldala pozitív, így négyzetre emelve mindkét oldalt a relációjel nem változik. Ekkor a

$$9-x^2+6x-x^2+2\sqrt{(9-x^2)(6x-x^2)} > 9, \quad \text{illetve} \quad \sqrt{(9-x^2)(6x-x^2)} > x^2-3x$$

irracionális egyenlőtlenséget kapjuk, amely a második alapesetnek felel meg, így megoldása a következő ekvivalencia alapján történik:

$$\begin{aligned} & ((9-x^2)(6x-x^2) \geq 0 \wedge x^2-3x \leq 0) \vee \\ & \vee ((9-x^2)(6x-x^2) \geq 0 \wedge x^2-3x \geq 0 \wedge (9-x^2)(6x-x^2) > (x^2-3x)^2) \iff \\ & \iff (0 \leq x \leq 3 \wedge 0 < x < 3) \vee (0 \leq x \leq 3 \wedge (x \leq 0 \vee x \geq 3) \wedge 0 < x < 3) \iff \\ & \iff 0 < x < 3 \vee x \in \emptyset \iff 0 < x < 3. \end{aligned}$$

Mivel a kapott intervallum az értelmezési tartomány részét képezi, ezért az egyenlőtlenség megoldáshalmaza az $M = (0, 3)$ intervallum.

10. Határozzuk meg az $\frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}} \geq 1$ irracionális egyenlőtlenség megoldásait.

Megoldás. Az adott irracionális egyenlőtlenség nem alapeset, ezért az értelmezési tartományára lesz szükség, amelynek meghatározásához a kitűzések $1+x > 0$ és $1-x > 0$, azaz $x > -1$ és $x < 1$. A két feltétel egyszerre teljesül, ha $-1 < x < 1$, az értelmezési tartomány tehát a $D = (-1, 1)$ nyitott intervallum. Hozzuk most közös nevezőre a bal oldalt, majd szorozzunk be a közös nevezővel. Ekkor a

$$\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}} \geq 1, \quad \text{illetve} \quad \sqrt{1-x^2} \leq \sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}$$

egyenlőtlenséget kapjuk, amelyből látszik, hogy a bal oldal pozitív, tehát a jobb oldal is az kell legyen. Így módosul az értelmezési tartomány, mert a $\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x} > 0$ feltételnek is teljesülnie kell, ahonnan $\sqrt{1-x} > \sqrt{1+x}$, illetve $1-x > 1+x$ adódik, ahonnan $x < 0$. Az értelmezési tartomány most a $D^* = (-1, 0)$ intervallumra szűkül. Négyzetre emelve a $\sqrt{1-x^2} \leq \sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}$ egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$1-x^2 \leq 1-x-2\sqrt{1-x^2}+1+x, \quad \text{illetve} \quad 2\sqrt{1-x^2} \leq 1+x^2,$$

ami már alapeset, így megoldása a következő ekvivalencia alapján történik:

$$\begin{aligned} & (1-x^2 \geq 0 \wedge 1+x^2 \geq 0 \wedge 4(1-x^2) \leq 1+2x^2+x^4) \iff \\ & \iff \left(x \in [-1, 1] \wedge x \in \mathbf{R} \wedge x \in \left(-\infty, -\sqrt{2\sqrt{3}-2} \right] \cup \left[\sqrt{2\sqrt{3}-2}, \infty \right) \right). \end{aligned}$$

Figyelembe véve a feltételek mindegyikét és a D^* értelmezési tartományt, az adott irracionális egyenlőtlenség megoldáshalmaza

$$M = \left(-1, -\sqrt{2\sqrt{3}-2} \right).$$

8. Exponenciális és logaritmikus egyenletek, egyenlőtlenségek és egyenletrendszerek

8.1. A hatványozás kiterjesztése irracionális kitevőkre és az exponenciális függvény fogalma

Vezessük be a hatványozást valós kitevőkre a 2 hatványainak példáján és az exponenciális függvényt az $f(x) = 2^x$ függvény példáján keresztül, majd általánosítsuk a 2-es alap helyett tetszőleges valós pozitív $a \neq 1$ alapra. Vizsgáljuk először az $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbf{N}$ függvény grafikonját, vagyis azt az esetet, amikor a hatványkitevő csak természetes szám lehet. Megállapíthatjuk, hogy ebben az esetben a függvény grafikonja az ábrán látható módon elhelyezkedő különálló pontokból áll.

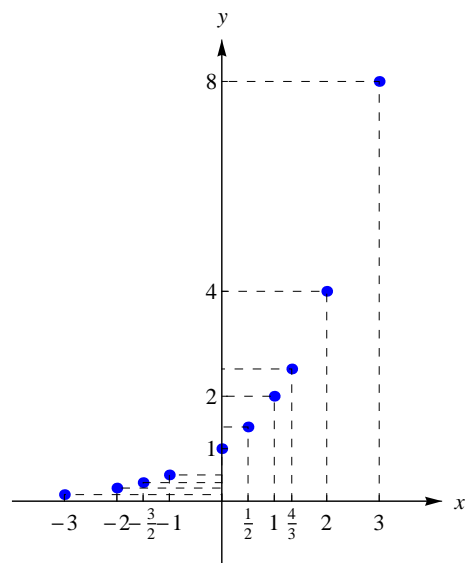
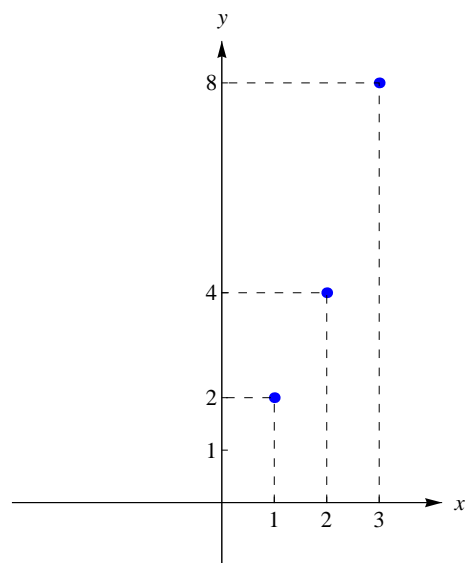
Ha az $f(x) = 2^x$ függvény értelmezési tartományát kibővítjük a nulla, a negatív és a törtekitevőkre adott hatványozási definíciók alapján, akkor az f függvény néhány értéke most

$$2^0 = 1, \quad 2^{-1} = \frac{1}{2}, \quad 2^{-2} = \frac{1}{4},$$

$$2^{-3} = \frac{1}{8}, \quad 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} = 1,41\dots,$$

$$2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{16} = 2,52\dots, \quad 2^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{1}{8}} = 0,35\dots$$

Az így kapott értékeket az előzőekkel együtt a koordináta-rendszerben ábrázolva a jobb oldalon látható megnyugtató ábrát kapjuk. Az újonnan számított értékeket ábrázoló pontok ugyanis szabályosan illeszkednek a függvény grafikonját jelentő korábban ábrázolt pontok közé, s azokkal együtt egy monoton növekvő pontsorozatot alkotnak. Könnyen belátható, hogy érvényes a következő tétel.



8.1. Tétel. Ha $a > 1$ valós szám és $x \in \mathbf{Q}$, akkor az $f(x) = a^x$ függvény szigorúan monoton növekvő.

Bizonyítás. Azt szeretnénk megmutatni, hogy ha $x_2 > x_1$, akkor $a^{x_2} > a^{x_1}$. Tudjuk, hogy ha $a > 0$, akkor $a^x > 0$ minden x racionális szám esetén, hiszen pozitív szám egész kitevőjű hatványa, vagy egész hatványának gyöke mindig pozitív szám. Ezért ha a^{x_1} és a^{x_2} nagyságviszonyát akarjuk eldönteni, akkor a hányadosukat (amely a fentiek alapján mindig pozitív) viszonyítjuk 1-hez. Ekkor ugyanis

$$\frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} = a^{x_2-x_1}, \quad \text{ahol } x_2 - x_1 > 0$$

és $x_2 - x_1$ is racionális szám, hiszen x_2 és x_1 is racionálisak voltak. Így $x_2 - x_1$ felírható $\frac{n}{m}$ alakban, ahol n és m természetes számok. Mivel egy pozitív szám természetes kitevőjű hatványa akkor és csak akkor nagyobb 1-nél, ha maga a szám is nagyobb 1-nél, így $a > 1$ -ből következik, hogy

$$(a^{x_2-x_1})^m = (a^{\frac{n}{m}})^m = a^n > 1,$$

de akkor $a^{\frac{n}{m}}$ is nagyobb, mint 1, mert a szám m -edik természetes hatványa nagyobb, mint 1. Így beláttuk, hogy

$$a^{\frac{n}{m}} = a^{x_2-x_1} = \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} > 1,$$

vagyis azt, hogy $a^{x_2} > a^{x_1}$, ha $x_2 > x_1$. \diamond

Végül pedig a tetszőleges valós, vagyis irracionális kitevőjű hatványokat kell értelmeznünk, illetve az $f(x) = 2^x$, majd $f(x) = a^x$ exponenciális függvényt tetszőleges $x \in \mathbf{R}$ esetén. Mivel az irracionális számokat közelítő értékeikkel határozzuk meg, így kézenfekvő, hogy egy pozitív szám irracionális hatványán azt a számot értsük, amelyet a kitevő racionális közelítő értékeire emelt hatványai zárnak közre. Ezzel az exponenciális függvény monotonitásának érvényességét tesszük az értelmezés alapelvevé. Térjünk át megint egy konkrét feladatra, például a $2^{\sqrt{2}}$ irracionális kitevőjű hatvány meghatározására. A $\sqrt{2}$ irracionális szám és $\sqrt{2} = 1,41421\dots$ közelítéséből indulunk ki. Ennek értelmében felírható, hogy

$$1 < \sqrt{2} < 2,$$

$$\frac{14}{10} = 1,4 < \sqrt{2} < 1,5 = \frac{15}{10},$$

$$\frac{141}{100} = 1,41 < \sqrt{2} < 1,42 = \frac{142}{100},$$

$$\vdots$$

Mivel már bizonyítottuk az $f(x) = 2^x$ függvény szigorúan monoton növekvő tulajdonságát, így az is érvényes, hogy

$$2^1 < 2^{\sqrt{2}} < 2^2,$$

$$2^{\frac{14}{10}} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{\frac{15}{10}},$$

$$2^{\frac{141}{100}} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{\frac{142}{100}},$$

$$\vdots$$

Mivel $2^{\frac{142}{100}} - 2^{\frac{141}{100}} = 2^{\frac{141}{100}} \left(2^{\frac{1}{100}} - 1 \right) < 0,02$, az eljárást folytatva pedig egyre kisebb különbségeket kapunk az intervallumok hosszára, ami azt jelenti, hogy a $2^{\sqrt{2}}$ számot egyre

jobban közelítik az egymásba ágyazott intervallumok alsó és felső határai. Ez szuggerálja azt a gondolatot, hogy pontosan egy olyan szám van, amely beletartozik az egymásba ágyazott intervallumok mindegyikébe, és ezt a számot „nevezzük ki” a $2^{\sqrt{2}}$ értékének. A fenti okoskodás alapján fogalmazzuk meg a következő definíciót.

8.1. Definíció. Legyen $a \neq 1$ pozitív valós szám, x tetszőleges valós szám, valamint $k_0, K_0; k_1, K_1; k_2, K_2; \dots; k_n, K_n; \dots$ az x szám olyan alsó és felső közelítő értékei, amelyek egymásba skatulyázott intervallumokat határoznak meg, és ezen intervallumok hosszúságai között van tetszőlegesen kis érték is, akkor a^x az

$$(a^{k_0}, a^{K_0}), (a^{k_1}, a^{K_1}), \dots, (a^{k_n}, a^{K_n}), \dots$$

intervallumok által meghatározott értéket értjük.

A fentiek alapján elmondható, hogy az

$$f(x) = 2^x, \quad x \in \mathbf{Q}$$

függvény grafikonja „kitölthető” pontokkal úgy, hogy egy folyamatos görbét kapjunk, és ez a görbe lesz az

$$f(x) = 2^x, \quad x \in \mathbf{R} \quad (8.1)$$

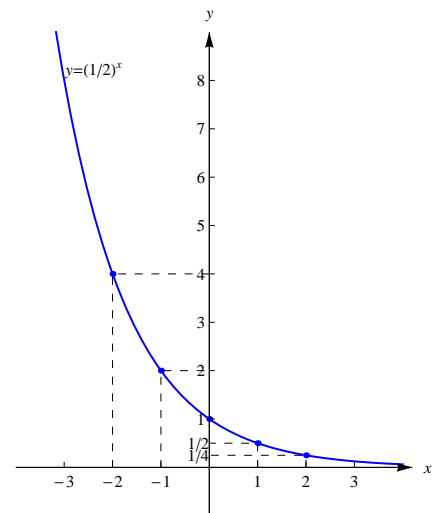
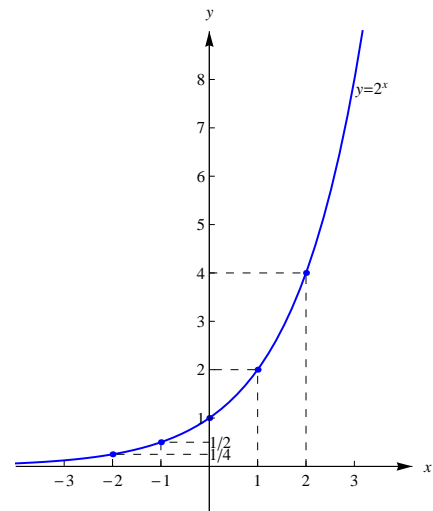
függvény grafikonja, amelyet a jobb oldali ábrán mutatunk be.

Hasonlóan lesz minden $a > 1$ valós szám esetén az $f(x) = a^x$, $x \in \mathbf{R}$ exponenciális függvény grafikonja a (8.1) függvény grafikonjához hasonló monoton növekvő görbe.

Legyen most az a^x hatvány alapja 1-nél kisebb, azaz legyen $0 < a < 1$. Ebben az esetben az $f(x) = a^x$, $x \in \mathbf{R}$ függvény grafikonjára a növekvő tulajdonság nem érvényes. Ekkor ugyanis $b = \frac{1}{a} > 1$, s ha $x_2 > x_1$, akkor $b^{x_2} > b^{x_1}$, illetve $\frac{1}{b^{x_2}} < \frac{1}{b^{x_1}}$, ahonnan

$$\left(\frac{1}{b}\right)^{x_2} < \left(\frac{1}{b}\right)^{x_1}, \quad \text{vagyis} \quad a^{x_2} < a^{x_1}.$$

A fent leírt tulajdonság $0 < a < 1$ esetén az $f(x) = a^x$ függvény grafikonjának szigorúan monoton csökkenő tulajdonságát fejezi ki, s minden ilyen függvény grafinja a jobb oldalon látható $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ függvény grafikonjához hasonló.



8.2. Exponenciális egyenletek, egyenlőtlenségek és egyenletrendszerek

8.2.1. Exponenciális egyenletek

8.2. Definíció. *Exponenciális egyenleteknek nevezzük azokat a egyenleteket, amelyekben az ismeretlen a hatványkitevőben (exponensben) szerepel.*

Az exponenciális egyenletek megoldásakor arra törekszünk, hogy az egyenlet mindkét oldalát azonos alapú hatványkifejezésre hozzuk, azaz $a \neq 1$ pozitív valós szám esetén

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

alakúra transzformáljuk, ahonnan az $y = a^x$ függvénygörbe szigorú monoton tulajdonságából következik, hogy ha az $a^{f(x)}$ és $a^{g(x)}$ függvényértékek megegyeznek, akkor meg kell egyezniük az $f(x)$ és $g(x)$ hatványkitevőknek is, vagyis $f(x) = g(x)$ teljesül.

Összetettségüket és megoldási menetüket figyelembe véve az exponenciális egyenleteket megoldási módjuktól függően négy csoportba sorolhatjuk.

I. Azonos alapra hozható exponenciális egyenletek

Az $y = a^x$ függvénygörbe szigorú monotonitási tulajdonsága miatt tetszőleges $a \neq 1$ pozitív valós szám esetén érvényes:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \iff f(x) = g(x).$$

8.1. Példa. Oldjuk meg a $\left(\frac{3}{4}\right)^{0,8x} = \frac{64}{27}$ exponenciális egyenletet.

Mivel az adott egyenlet felírható

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{0,8x} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$$

ekvivalens alakban, így az $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ függvény szigorúan monoton tulajdonságát figyelembe véve kapjuk, hogy a hatványkitevők kiegyenlíthetők, azaz

$$0,8x = -3, \quad \text{ahonnan} \quad \frac{4}{5}x = -3, \quad \text{illetve} \quad x = -\frac{15}{4}.$$

8.2. Példa. A $(3^x)^3 = 3^{x+3}$ exponenciális egyenlet felírható a $3^{3x} = 3^{x+3}$ ekvivalens alakban, s az $f(x) = 3^x$ függvény szigorúan monoton tulajdonságát figyelembe véve kapjuk, hogy a hatványkitevők kiegyenlíthetők, azaz

$$3x = x + 3, \quad \text{ahonnan} \quad 2x = 3, \quad \text{illetve} \quad x = \frac{3}{2}.$$

II. Tényezőkre bontással megoldható exponenciális egyenletek

Ebben az esetben tetszőleges $a \neq 1$ pozitív valós szám és $x, y \in \mathbf{R}$ esetén az

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \quad \text{és} \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

azonosságok alkalmazására utalunk az egyenlettípus megnevezésében.

8.3. Példa. Határozzuk most meg az $5^{x+1} - 5^{x-1} = 24$ exponenciális egyenlet megoldáshalmazát. Alkalmazva a fent említett hatványozási szabályokat, alakítsuk át az egyenletet a következő ekvivalen átalakítások segítségével:

$$\begin{aligned} 5^{x+1} - 5^{x-1} = 24 &\iff 5 \cdot 5^x - \frac{5^x}{5} = 24 \\ &\iff 5^x \left(5 - \frac{1}{5} \right) = 24 \\ &\iff \frac{24}{5} \cdot 5^x = 24 \\ &\iff 5^x = 5 \quad \text{ahonnan} \quad x = 1. \end{aligned}$$

Az egyenlet megoldáshalmaza tehát $M = \{1\}$.

8.4. Példa. Tekintsük most a $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$ exponenciális egyenletet, amelyben 5-ös alapú és 3-as alapú hatványkifejezések is vannak, tehát nem hozhatók közös alapra. Ilyenkor a kétféle alapot csoportosítjuk az egyenlet két különböző oldalán. Ebben az esetben felírható a

$$7 \cdot 3^{x+1} - 3^{x+4} = 5^{x+2} - 5^{x+3}$$

ekvivalens egyenlet. Tényezőkre bontás után a

$$7 \cdot 3^x \cdot 3 - 3^x \cdot 3^4 = 5^x \cdot 5^2 - 5^x \cdot 5^3$$

ekvivalens egyenlet következik, amelyből pedig rendezéssel kapjuk a

$$21 \cdot 3^x - 81 \cdot 3^x = 25 \cdot 5^x - 125 \cdot 5^x, \quad \text{illetve} \quad 60 \cdot 3^x = 100 \cdot 5^x$$

ekvivalens egyenletet. Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát $60 \cdot 5^x$ -nel. Ekkor a

$$\frac{3^x}{5^x} = \frac{100}{60}, \quad \text{azaz} \quad \left(\frac{3}{5} \right)^x = \frac{5}{3}, \quad \text{illetve} \quad \left(\frac{3}{5} \right)^x = \left(\frac{3}{5} \right)^{-1}$$

egyenlet adódik, ahonnan az $f(x) = \left(\frac{3}{5} \right)^x$ függvény szigorúan monoton tulajdonságát figyelembe véve kapjuk, hogy a hatványkitevők kiegyenlíthetők, azaz $x = -1$.

III. Másodfokú egyenletre visszavezethető exponenciális egyenletek

Ha egy exponenciális egyenletben tetszőleges $a \neq 1$ pozitív valós szám esetén az a^x hatványkifejezés mellett az $(a^2)^x = a^{2x} = (a^x)^2$ hatványkifejezés is szerepel, akkor az ilyen egyenlet $a^x = t$ és $a^{2x} = t^2$ helyettesítéssel visszavezethető másodfokú algebrai egyenletre.

8.5. Példa. Oldjuk meg a $4^x + 2^x = 20$ exponenciális egyenletet. Vegyük észre, hogy $4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2$, majd vezessük be az egyenletbe a $2^x = t$ helyettesítést. Ekkor az eredeti exponenciális egyenlet a $t^2 + t - 20 = 0$ másodfokú algebrai egyenletre vezetődik vissza, amelynek megoldásai $t_1 = -5$ és $t_2 = 4$. Visszahelyettesítés után a

$$2^x = -5 \quad \text{és} \quad 2^x = 4$$

exponenciális egyenleteket kapjuk, melyek közül a $2^x = -5$ egyenletnek nincs megoldása, hiszen az exponenciális kifejezés mindig szigorúan pozitív, tehát negatív értéket nem vehet fel. A $2^x = 4$ egyenlet megoldása $x = 2$, s így az adott exponenciális egyenlet megoldáshalmaza $M = \{2\}$.

8.6. Példa. Keressük most meg az $5^x - 5^{3-x} = 20$ exponenciális egyenlet megoldásait. Hasonlóan kell eljárunk, mint az előző feladatban. Vegyük észre, hogy az egyenlet felírható az

$$5^x - \frac{5^3}{5^x} = 20$$

ekvivalens alakban, s célravezető újra bevezetni az $5^x = t$ helyettesítést. Ekkor az eredeti exponenciális egyenlet a $t - \frac{125}{t} = 20$, illetve $t^2 - 20t - 125 = 0$ másodfokú algebrai egyenletre vezetődik vissza, amelynek megoldásai a $t_1 = -5$ és $t_2 = 25$ számok. Visszahelyettesítés után az

$$5^x = -5 \quad \text{és} \quad 5^x = 25$$

exponenciális egyenleteket kapjuk, melyek közül az $5^x = -5$ egyenletnek nincs megoldása, hiszen most is $t > 0$ érvényes. Az $5^x = 25$ egyenlet, így az eredeti exponenciális egyenlet egyetlen megoldása $x = 2$.

IV. Összetett típusú exponenciális egyenletek

Ezekben az egyenletekben az előbb említett tényezőkre bontást, kiemelést és helyettesítést vegyesen alkalmazzuk.

8.7. Példa. Határozzuk meg a $64 \cdot 9^x - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 16^x = 0$ exponenciális egyenlet megoldáshalmazát. Vegyük észre, hogy az adott egyenlet felírható a

$$64 \cdot 3^{2x} - 84 \cdot 3^x \cdot 4^x + 27 \cdot 4^{2x} = 0$$

ekvivalens alakban, amely egy homogén egyenlet. Osszuk el a kapott egyenlet mindkét oldalát a 4^{2x} hatványkifejezéssel. Ekkor a

$$64 \cdot \frac{3^{2x}}{4^{2x}} - 84 \cdot \frac{3^x \cdot 4^x}{4^{2x}} + 27 = 0, \quad \text{illetve} \quad 64 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{2x} - 84 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x + 27 = 0$$

ekvivalens egyenlethez jutunk, amelyben célszerű bevezetni a $\left(\frac{3}{4}\right)^x = t$ helyettesítést. Ekkor az eredeti egyenletet a $64t^2 - 84t + 27 = 0$ másodfokú egyenletre vezettük vissza, amelynek megoldásai $t_1 = \frac{9}{16}$ és $t_2 = \frac{3}{4}$. Visszahelyettesítés után az

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x_1} = \frac{9}{16} \quad \text{és} \quad \left(\frac{3}{4}\right)^{x_2} = \frac{3}{4}$$

exponenciális egyenleteket kapjuk, ahonnan a megoldások $x_1 = 2$ és $x_2 = 1$, az adott exponenciális egyenlet megoldáshalmaza pedig $M = \{1, 2\}$.

8.8. Példa. Végül oldjuk meg a $20^x - 6 \cdot 5^x + 10^x = 0$ exponenciális egyenletet. Rendezéssel az adott egyenlet felírható a

$$(4 \cdot 5)^x - 6 \cdot 5^x + (2 \cdot 5)^x = 0, \quad \text{illetve} \quad 4^x \cdot 5^x - 6 \cdot 5^x + 2^x \cdot 5^x = 0$$

ekvivalens alakban. Innen kiemelve a közös tényezőt adódik, hogy

$$5^x (4^x - 6 + 2^x) = 0, \quad \text{ahonnan} \quad 5^x = 0 \quad \text{vagy} \quad 4^x + 2^x - 6 = 0.$$

Mivel $5^x > 0$, így az $5^x = 0$ egyenletnek nincs megoldása. A $4^x + 2^x - 6 = 0$ egyenletben alkalmazva a $2^x = t$ helyettesítést, a $t^2 + t - 6 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek gyökei $t_1 = 2$ és $t_2 = -3$. Visszahelyettesítés után $2^x = 2$ egyenletből $x = 1$ következik, a $2^x = -3$ egyenletnek pedig nincs valós megoldása.

Az eredeti exponenciális egyenlet megoldáshalmaza tehát $M = \{1\}$.

8.2.2. Exponenciális egyenlőtlenségek

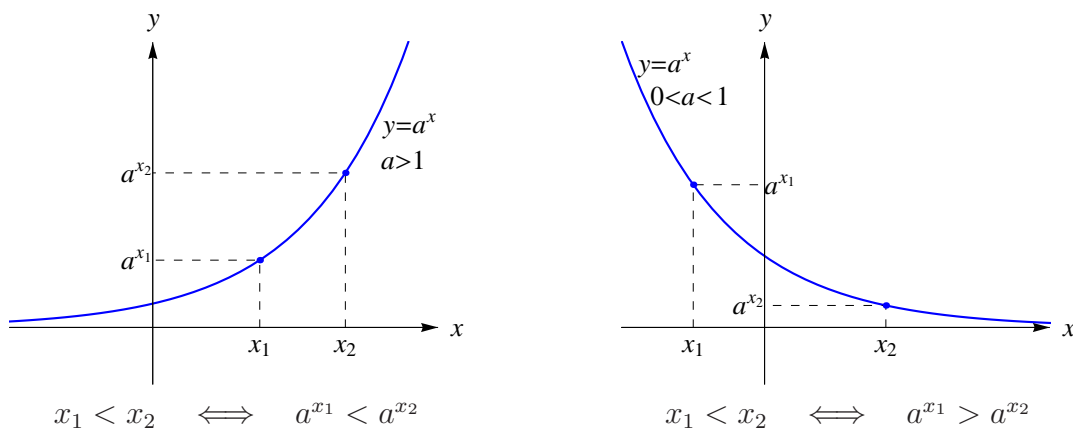
8.3. Definíció. *Exponenciális egyenlőtlenségnek nevezzük az olyan egyenlőtlenséget, amelyben az ismeretlen a hatványkitevőben szerepel.*

Figyelembe véve az $f(x) = a^x$ exponenciális függvény szigorúan monoton növekvő tulajdonságát $a > 1$ valós számok esetén, valamint szigorúan monoton csökkenő tulajdonságát $0 < a < 1$ valós számokra, megfogalmazhatjuk a következőket:

1° Ha $a > 1$, akkor $a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \iff f(x) \leq g(x)$.

2° Ha $0 < a < 1$, akkor $a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \iff f(x) \geq g(x)$.

Az exponenciális egyenlőtlenségekre vonatkozó imént felsorolt tulajdonságok nagyon szépen leolvashatók a következő két ábráról is.



Az elmondottak alapján az exponenciális egyenlőtlenségek megoldásakor arra törekszünk, hogy az összetettebb exponenciális egyenlőtlenségeket

$$a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \quad \text{vagy} \quad a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \quad \text{vagy} \quad a^{f(x)} < a^{g(x)} \quad \text{vagy} \quad a^{f(x)} > a^{g(x)}$$

alakúra transzformáljuk.

8.9. Példa. Oldjuk meg az $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} > \left(\frac{1}{9}\right)^x$ exponenciális egyenlőtlenséget. Hozzuk azonos alapú hatványra az egyenlőtlenség két oldalát. Ekkor az

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} > \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$$

ekvivalens egyenlőtlenséget kapjuk, ahonnan az $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ függvény szigorúan monoton csökkenő tulajdonságából $x + 2 > 2x$, illetve $x > 2$ következik.

Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza tehát az $M = (2, \infty)$ intervallum.

8.10. Példa. Határozzuk meg az $5^{2x+1} > 5^x + 4$ exponenciális egyenlőtlenség megoldáshalmazát. Írjuk fel az adott egyenlőtlenséget először az $5 \cdot 5^{2x} - 5^x - 4 > 0$ ekvivalens alakban, majd vezessük be az $5^x = t$ helyettesítést. Ekkor az $5t^2 - t - 4 > 0$ másodfokú egyenlőtlenséget kapjuk, amely $t \in (-\infty, -\frac{4}{5}) \cup (1, \infty)$ esetén teljesül, azaz a megoldás a

$$t < -\frac{4}{5} \quad \text{vagy} \quad t > 1$$

egyenlőtlenségek megoldáshalmaza. Visszahelyettesítés után a

$$5^x < -\frac{4}{5} \quad \text{vagy} \quad 5^x > 1$$

egyenlőtlenségek megoldáshalmazát keressük. $5^x > 0$ miatt az első egyenlőtlenségnek nincs megoldása. A második egyenlőtlenség felírható az $5^x > 5^0$ ekvivalens formában, ahonnan az $f(x) = 5^x$ függvény szigorúan monoton növekvő tulajdonsága miatt következik, hogy $x > 0$.

Az eredeti egyenlőtlenség megoldáshalmaza tehát az $M = (0, \infty)$ intervallum.

8.11. Példa. Keressük meg most a $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$ exponenciális egyenlőtlenség megoldáshalmazát. Végezzük el először a következő ekvivalens átalakításokat:

$$\begin{aligned} 2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2} &\iff 2^2 \cdot 2^x - 2^3 \cdot 2^x - 2^4 \cdot 2^x > 5 \cdot 5^x - 5^2 \cdot 5^x \\ &\iff 2^x(4 - 8 - 16) > 5^x(5 - 25) \\ &\iff -20 \cdot 2^x > -20 \cdot 5^x \\ &\iff 2^x < 5^x \quad / : 5^x \quad (\text{mert } 5^x > 0) \\ &\iff \frac{2^x}{5^x} < 1 \\ &\iff \left(\frac{2}{5}\right)^x < \left(\frac{2}{5}\right)^0. \end{aligned}$$

Mivel az $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$ függvény szigorúan monoton csökkenő, ezért az utolsó egyenlőtlenségből következik, hogy $x > 0$.

Az eredeti egyenlőtlenség megoldáshalmaza tehát az $M = (0, \infty)$ intervallum.

8.2.3. Exponenciális egyenletrendszerek

8.4. Definíció. *Exponenciális egyenletrendszernek nevezzük az olyan egyenletrendszert, amelyben legalább az egyik egyenlet exponenciális.*

8.12. Példa. Oldjuk meg a következő exponenciális egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 3^{2\sqrt{x}\sqrt{y}} &= 729, \\ 3^{2\sqrt{y}} \cdot 9^{\frac{\sqrt{x}}{2}} &= 243. \end{aligned}$$

Végezzük el az egyenletrendszeren a következő ekvivalens átalakításokat:

$$\begin{aligned} 3^{2\sqrt{x}\sqrt{y}} &= 3^6, \\ 3^{2\sqrt{y} + \sqrt{x}} &= 3^5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x}\sqrt{y} &= 3, \\ 2\sqrt{y} + \sqrt{x} &= 5. \end{aligned}$$

A második egyenletből kapjuk, hogy $\sqrt{x} = 5 - 2\sqrt{y}$, s ezt a kifejezést behelyettesítve az első egyenletbe adódik az

$$(5 - 2\sqrt{y})\sqrt{y} = 3$$

a \sqrt{y} -ra másodfokú egyenlet. Bevezetve a $\sqrt{y} = t$ helyettesítést kapjuk a $2t^2 - 5t + 3 = 0$ másodfokú algebrai egyenletet, amelynek gyökei $t_1 = 1$ és $t_2 = \frac{3}{2}$. Visszahelyettesítés után kapjuk, hogy

$$\sqrt{y} = 1 \quad \text{és} \quad \sqrt{y} = \frac{3}{2}, \quad \text{ahonnan} \quad y_1 = 1 \quad \text{és} \quad y_2 = \frac{9}{4}.$$

A $\sqrt{x} = 5 - 2\sqrt{y}$ egyenlőségből $x = (5 - 2\sqrt{y})^2$, ahonnan $x_1 = 9$ és $x_2 = 4$. Az egyenletrendszer megoldásai tehát a $(9; 1)$ és $\left(4; \frac{9}{4}\right)$ rendezett párok, az egyenletrendszer megoldáshalmaza pedig

$$M = \left\{ (9; 1), \left(4; \frac{9}{4}\right) \right\}.$$

8.13. Példa. Adjuk meg a következő exponenciális egyenletrendszer megoldáshalmazát:

$$\begin{aligned} 4^{x+y} &= 128, \\ 5^{3x-2y-3} &= 1. \end{aligned}$$

Végezzük el az egyenletrendszeren a következő ekvivalens átalakításokat:

$$\begin{aligned} 2^{2(x+y)} &= 2^7, \\ 5^{3x-2y-3} &= 5^0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 7, \\ 3x - 2y &= 3. \end{aligned}$$

A kapott ekvivalens egyenletrendszer megoldása a $\left(2; \frac{3}{2}\right)$ rendezett pár, az eredeti egyenletrendszer megoldáshalmaza pedig

$$M = \left\{ \left(2; \frac{3}{2}\right) \right\}.$$

8.14. Példa. Keressük meg a következő exponenciális egyenletrendszer megoldásait:

$$\begin{aligned} x + y &= 4, \\ 2^x + 2^y &= 10. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer első egyenlete lineáris, s ebből $y = 4 - x$. Behelyettesítve a kapott kifejezést a második egyenletbe adódik a $2^x + 2^{4-x} = 10$ exponenciális egyenlet, ahonnan $2^x + \frac{2^4}{2^x} = 10$. Bevezetve a $2^x = t$ helyettesítést kapjuk a $t + \frac{16}{t} = 10$, majd rendezés után a $t^2 - 10t + 16 = 0$ másodfokú algebrai egyenletet, amelynek gyökei $t_1 = 8$ és $t_2 = 2$. Visszahelyettesítés után kapjuk, hogy $2^x = 8$, ahonnan $x_1 = 3$, majd hogy $2^x = 2$, ahonnan $x_2 = 1$. $y = 4 - x$ miatt $y_1 = 1$ és $y_2 = 3$ következik, vagyis az az eredeti egyenletrendszer megoldáshalmaza $M = \{(1; 3), (3; 1)\}$.

FELADATOK

1. Oldjuk meg a ${}^{x+1}\sqrt{2^{x+4}} = \sqrt{x}{2 \cdot 8^{x-1}}$ exponenciális egyenletet.

Megoldás. Az egyenletet hatványok alakjában

$$2^{\frac{x+4}{x+1}} = 2^{\frac{1}{x}} \cdot 8^{\frac{x-1}{x}}$$

módon írhatjuk fel. 2-es alapú hatványok segítségével az egyenletet felírhatjuk az ekvivalens

$$2^{\frac{x+4}{x+1}} = 2^{\frac{1}{x}} \cdot 2^{\frac{3x-3}{x}}, \quad \text{illetve} \quad 2^{\frac{x+4}{x+1}} = 2^{\frac{1}{x} + \frac{3x-3}{x}}$$

alakban, ahonnan az $f(x) = 2^x$ függvény szigorú monotonitásából következik, hogy kiegyenlíthetők a hatványkitevők, azaz

$$\frac{x+4}{x+1} = \frac{1}{x} + \frac{3x-3}{x}, \quad \text{vagyis} \quad \frac{x+4}{x+1} = \frac{3x-2}{x}, \quad x \neq 0, \quad x \neq -1.$$

Beszorozva az egyenlet mindkét oldalát $x(x+1)$ -gyel adódik az

$$x(x+4) = (x+1)(3x-2), \quad \text{illetve} \quad 2x^2 - 3x - 2 = 0$$

másodfokú egyenlet, amelynek megoldásai $x_1 = 2$ és $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Az eredeti egyenlet megoldáshalmaza tehát az $M = \left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$ kételemű halmaz.

2. Adjuk meg a $8^{\frac{x-3}{3x-7}} \cdot \sqrt[3]{x-1}\sqrt{0,5^{3x-1}} = 1$ exponenciális egyenletet megoldáshalmazát.

Megoldás. A 8, 0,5 és 1 számok közös alapja a 2 lehet, ezért írjuk fel az egyenlet bal és jobb oldalát 2 hatványaiként a következőképpen:

$$(2^3)^{\frac{x-3}{3x-7}} \cdot (2^{-1})^{\frac{3x-1}{3(x-1)}} = 2^0, \quad \text{illetve} \quad 2^{\frac{3x-9}{3x-7} + \frac{1-3x}{3x-3}} = 2^0.$$

Az $f(x) = 2^x$ függvény szigorú monotonitásából következik, hogy

$$\frac{3x-9}{3x-7} + \frac{1-3x}{3x-3} = 0, \quad \text{illetve} \quad \frac{3x-9}{3x-7} - \frac{3x-1}{3x-3}, \quad x \neq \frac{7}{3}, \quad x \neq 1.$$

Beszorozva az egyenlet mindkét oldalát $(3x-3)(3x-7)$ -tel kapjuk a

$$(3x-9)(3x-3) = (3x-1)(3x-7), \quad \text{majd rendezés után a} \quad 12x = 20$$

egyenletet, ahonnan $x = \frac{5}{3}$, a megoldáshalmaz pedig $M = \left\{\frac{5}{3}\right\}$.

3. Határozzuk meg a $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$ exponenciális egyenletet megoldáshalmazát.

Megoldás. Az egyenlet felírható a 2 és a 3 hatványai segítségével, s rendezés után a

$$2^{2x} + \frac{2^{2x}}{2} = 3^x \cdot \sqrt{3} + \frac{3^x}{\sqrt{3}}, \quad \text{ahonnan} \quad \frac{3}{2} \cdot 2^{2x} = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot 3^x,$$

majd további rendezés után

$$\frac{2^{2x}}{(\sqrt{3})^{2x}} = \frac{8}{3\sqrt{3}}, \quad \text{illetve} \quad \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$$

egyenlet kapható, amelyből $2x = 3$, majd $x = \frac{3}{2}$ következik.

Az eredeti egyenlet megoldáshalmaza tehát $M = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

4. Oldjuk meg a $5^{\frac{2x+2}{5}} - 4^{\frac{2x-5}{3}} = 5^{\frac{2x-3}{5}} + 4^{\frac{2x-2}{3}}$ exponenciális egyenletet.

Megoldás. Rendezés és tényezőkre bontás után az egyenlet felírható az

$$5^{\frac{2x}{5}} \cdot 5^{\frac{2}{5}} - \frac{5^{\frac{2x}{5}}}{5^{\frac{3}{5}}} = \frac{4^{\frac{2x}{3}}}{4^{\frac{2}{3}}} + \frac{4^{\frac{2x}{3}}}{4^{\frac{5}{3}}}$$

ekvivalens alakban, majd kiemelés után kapjuk a

$$5^{\frac{2x}{5}} \cdot \frac{5-1}{\sqrt[5]{5^3}} = 4^{\frac{2x}{3}} \cdot \frac{4+1}{\sqrt[3]{4^5}}, \quad \text{illetve} \quad (\sqrt[5]{5})^{2x} \cdot \frac{4}{\sqrt[5]{5^3}} = (\sqrt[3]{4})^{2x} \cdot \frac{5}{\sqrt[3]{4^5}},$$

rendezés után pedig a

$$\frac{(\sqrt[5]{5})^{2x}}{(\sqrt[3]{4})^{2x}} = \frac{5\sqrt[5]{5^3}}{4^2\sqrt[3]{4^2}}, \quad \text{illetve} \quad \left(\frac{\sqrt[5]{5}}{\sqrt[3]{4}}\right)^{2x} = \left(\frac{\sqrt[5]{5}}{\sqrt[3]{4}}\right)^8$$

exponenciális egyenletet, ahonnan $2x = 8$, vagyis $x = 4$.

Az eredeti egyenlet megoldáshalmaza tehát $M = \{4\}$.

5. Keressük meg a $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$ exponenciális egyenlet megoldásait.

Megoldás. Végezzük el először a tényezőkre bontást. Ekkor

$$\frac{9^{x^2}}{9} - \frac{36}{27} \cdot 3^{x^2} + 3 = 0.$$

Bevezetve a $3^{x^2} = t$ helyettesítést az

$$\frac{1}{9}t^2 - \frac{4}{3}t + 3 = 0, \quad \text{illetve} \quad t^2 - 12t + 27 = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek gyökei $t_1 = 3$ és $t_2 = 9$. Visszahelyettesítés után a

$$3^{x^2} = 3 \quad \text{és} \quad 3^{x^2} = 9$$

exponenciális egyenleteket nyerjük, amelyekből $x^2 = 1$, azaz $x_1 = 1$ és $x_2 = -1$, majd $x^2 = 2$, vagyis $x_3 = \sqrt{2}$ és $x_4 = -\sqrt{2}$ adódik.

Az eredeti egyenlet megoldáshalmaza tehát $M = \{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}$.

6. Határozzuk meg a $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$ exponenciális egyenletet megoldáshalmazát.

Megoldás. Ebben és az ehhez hasonló esetekben azt kell észrevenni, hogy $2 - \sqrt{3}$ és $2 + \sqrt{3}$ egymás reciprokai. Ekkor az egyenlet felírható

$$\frac{1}{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x} + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$$

alakban. Bevezetve most a $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = t$ helyettesítést kapjuk az

$$\frac{1}{t} + t = 4, \quad \text{illetve} \quad t^2 - 4t + 1 = 0$$

másodfokú egyenletet, amelynek megoldásai $t_1 = 2 + \sqrt{3}$ és $t_2 = 2 - \sqrt{3}$. Visszahelyettesítés után a

$$\left(2 + \sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}} = 2 + \sqrt{3} \quad \text{és} \quad \left(2 + \sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}} = \left(2 + \sqrt{3}\right)^{-1}$$

exponenciális egyenleteket nyerjük, amelyekből a hatványkitevők kiegyenlítésével $x_1 = 2$ és $x_2 = -2$ adódik.

Az eredeti egyenlet megoldáshalmaza tehát $M = \{-2, 2\}$.

7. Oldjuk meg a $2\sqrt[3]{9} - 5\sqrt[3]{6} + 3\sqrt[3]{4} = 0$ exponenciális egyenletet.

Megoldás. Írjuk fel az egyenletet

$$2 \cdot 9^{\frac{1}{x}} - 5 \cdot 6^{\frac{1}{x}} + 3 \cdot 4^{\frac{1}{x}} = 0, \quad \text{illetve} \quad 2 \cdot 3^{\frac{2}{x}} - 5 \cdot 2^{\frac{1}{x}} \cdot 3^{\frac{1}{x}} + 3 \cdot 2^{\frac{2}{x}} = 0$$

alakban, majd osszuk el az egyenlet mindkét oldalát a $2^{\frac{2}{x}}$ hatvánnyal. Ekkor a

$$2 \cdot \frac{3^{\frac{2}{x}}}{2^{\frac{2}{x}}} - 5 \cdot \frac{3^{\frac{1}{x}}}{2^{\frac{1}{x}}} + 3 = 0, \quad \text{illetve} \quad 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{x}} - 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} + 3 = 0$$

egyenletet kapjuk, amelyben bevezetve a $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = t$ helyettesítést az $2t^2 - 5t + 3 = 0$

másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek megoldásai $t_1 = \frac{3}{2}$ és $t_2 = 1$. Visszahelyettesítés után a

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{3}{2} \quad \text{és} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = 1$$

exponenciális egyenleteket kapjuk, ahonnan

$$\frac{1}{x} = 1, \quad \text{azaz} \quad x_1 = 1 \quad \text{adódik, illetve} \quad \frac{1}{x} = 0,$$

amely egyenletnek nincs megoldása.

Az eredeti egyenlet megoldáshalmaza tehát $M = \{1\}$.

8. Adjuk meg a $(x-3)^{x^2-x} = (x-3)^2$ exponenciális egyenlet megoldáshalmazát.

Megoldás. Mivel az egyenlet bal oldalán a hatványkitevőben is szerepel az x ismeretlen, így az $x-3$ kifejezés, mint egy hatványkifejezés alapja pozitív kell legyen, azaz $x-3 > 0$, illetve $x > 3$ kell teljesüljön. Másrészt, ha $x-3 = 1$, akkor az egyenlet bal és jobb oldala megegyezik, mindkettő 1-gyel egyenlő, így $x_1 = 4$ megoldása az egyenletnek.

Ha $x > 3$ és $x \neq 4$, akkor azonos alapú hatványokat egyenlítettünk ki, tehát a hatványkitevőket is kiegyenlíthetjük. Ekkor az $x^2 - x = 2$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek megoldásai $x_2 = 2$ és $x_3 = -1$. Mivel ezen számok közül egyik sem elégíti ki az $x > 3$ feltételt, így az egyenletnek csak egy megoldása van, megoldáshalmaza pedig $M = \{4\}$.

9. Oldjuk meg a $4^x - 4^{\sqrt{x}+1} = 3 \cdot 2^{x+\sqrt{x}}$ egyenletet.

Megoldás. Az egyenlet értelmezett, ha

$$x \geq 0 \quad \text{és} \quad 4^x > 4^{\sqrt{x}+1}, \quad \text{azaz} \quad x > \sqrt{x} + 1.$$

Rendezve az utolsó egyenlőtlenséget kapjuk a $x - \sqrt{x} - 1 > 0$ egyenlőtlenséget, amelybe bevezetve a $\sqrt{x} = y$ helyettesítést az $y^2 - y - 1 > 0$ másodfokú egyenlőtlenség adódik, amelynek megoldása

$$y < \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{vagy} \quad y > \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

visszatérve az eredeti változóra és figyelembe véve, hogy $x \geq 0$ kell, hogy teljesüljön, a feladat értelmezési tartománya

$$D = \left(\sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}, \infty \right), \quad \text{ahol} \quad \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} \approx 1.23.$$

Végezzük el a következő ekvivalens átalakításokat, amelyek során először osszuk el az egyenlet mindkét oldalát $2^{2\sqrt{x}}$ -szel.

$$\begin{aligned} 4^x - 4^{\sqrt{x}+1} = 3 \cdot 2^{x+\sqrt{x}} &\iff 2^{2(x-\sqrt{x})} - 4 = 3 \cdot 2^{x-\sqrt{x}} \\ &\iff \left(2^{x-\sqrt{x}}\right)^2 - 3 \cdot 2^{x-\sqrt{x}} - 4 = 0. \end{aligned}$$

Vezessük most be a $2^{x-\sqrt{x}} = t$ helyettesítést. Ekkor az egyenlet az $t^2 - 3t - 4 = 0$ másodfokú egyenlettel lesz ekvivalens, amelynek megoldásai $t_1 = 4$ és $t_2 = -1$, ahonnan $t \geq 0$ miatt a t_2 gyök nem ad megoldást. Helyettesítsük akkor vissza a első gyököt, vagyis legyen

$$2^{x-\sqrt{x}} = 2^2, \quad \text{ahonnan} \quad x - \sqrt{x} = 2, \quad \text{illetve} \quad x^2 - 5x + 4 = 0,$$

amelynek megoldásai $x_1 = 4$ és $x_2 = 1$, de ezek közül csak $x_1 = 4$ van benne a D értelmezési tartományban, így a megoldáshalmaz $M = \{4\}$.

10. Határozzuk meg a

$$2^{x+2} + 2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} + \dots = 3^{x+3} + 3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^x + \dots$$

egyenlet megoldáshalmazát.

Megoldás. Kiemelve az egyenlet bal és jobb oldalán a közös tényezőt adódik a

$$2^x (2^2 + 2^1 + 2^0 + 2^{-1} \dots) = 3^x (3^3 + 3^2 + 3^1 + 3^0 + 3^{-1})$$

egyenlet, majd felhasználva mindkét oldalon a végtelen mértani sor összegzőképletét kapjuk, hogy

$$2^x \cdot \frac{4}{1 - \frac{1}{2}} = 3^x \cdot \frac{27}{1 - \frac{1}{3}},$$

amely rendezés után a

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{81}{16}, \quad \text{azaz} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$$

egyenletet adja, ahonnan a megoldás $x = -4$.

11. Határozzuk meg a következő egyenlet megoldáshalmazát:

$$\frac{\sqrt{-x^2 - x + 12} \cdot \left(3^{x^2 - \frac{47}{4}} - \sqrt{3}\right)}{(x-3)(x+1)} = 0.$$

Megoldás. Az egyenlet értelmezett, ha érvényesek a következő feltételek: $x-3 \neq 0$ és $x+1 \neq 0$ és $-x^2 - x + 12 \geq 0$. A fenti egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmaza, s így az egyenlet értelmezési tartománya $D = [-4, -1) \cup (-1, 3)$.

Egy hányados akkor nulla, ha a számlálója nulla, tehát a

$$\sqrt{-x^2 - x + 12} \cdot \left(3^{x^2 - \frac{47}{4}} - \sqrt{3}\right) = 0$$

egyenlet megoldáshalmazának azt a részhalmazát keressük, amely benne van a D értelmezési tartományban. Egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, tehát

$$\sqrt{-x^2 - x + 12} = 0 \quad \text{vagy} \quad 3^{x^2 - \frac{47}{4}} - \sqrt{3} = 0.$$

$\sqrt{-x^2 - x + 12} = 0$, ha $-x^2 - x + 12 = 0$, amely másodfokú egyenlet megoldásai $x_1 = -4$ és $x_2 = 3$. Ebből x_2 nincs az egyenlet értelmezési tartományában, tehát nem megoldása az egyenletnek.

$3^{x^2 - \frac{47}{4}} - \sqrt{3} = 0$, ha $3^{x^2 - \frac{47}{4}} = \sqrt{3}$, azaz $x^2 - \frac{47}{4} = \frac{1}{2}$, amely egyenlet megoldásai $x_3 = \frac{7}{2}$ és $x_4 = -\frac{7}{2}$. Ebből az x_3 nincs az egyenlet értelmezési tartományában, tehát nem megoldása az egyenletnek.

Az eredeti egyenlet megoldáshalmaza tehát $M = \left\{-4, \frac{7}{2}\right\}$.

12. Határozzuk meg az $(x+1)9^{x-3} + 4x \cdot 3^{x-3} - 16 = 0$ egyenlet megoldáshalmazát.

Megoldás. Vezessük be a $3^{x-3} = t$ helyettesítést. Ekkor az egyenlet ekvivalens az $(x+1)t^2 + 4xt - 16 = 0$ másodfokú egyenlettel, amelynek megoldásai $t_1 = \frac{4}{x+1}$ és $t_2 = -4$. Mivel $t \geq 0$ miatt a t_2 gyök nem ad megoldást, ezért helyettesítsük vissza a első gyököt, ahol $x+1 > 0$, azaz $x > -1$. Ekkor

$$3^{x-3} = \frac{4}{x+1}, \quad \text{amelynek } x = 3 \text{ megoldása.}$$

Mivel az $y = 3^{x-3}$ függvény szigorúan monoton növekvő, az $y = \frac{4}{x+1}$ függvény pedig szigorúan monoton csökkenő, így az egyenletnek több megoldása nincs, vagyis a megoldáshalmaz $M = \{3\}$.

13. Oldjuk meg a $\left(\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2-2x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \geq 1$ egyenlőtlenséget.

Megoldás. Fejezzük ki az egyenlőtlenség mindkét oldalát $\frac{3}{7}$ hatványaként. Ekkor a

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{x^2-2x}{x^2}} \geq \left(\frac{3}{7}\right)^0, \quad x \neq 0$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Mivel $\frac{3}{7} < 1$, így az $f(x) = \left(\frac{3}{7}\right)^x$ függvény szigorúan monoton csökkenő, s a kitevőkre érvényes, hogy

$$\frac{x-2}{x} \leq 0.$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$x-2$	–	+	+
x	–	–	+
$\frac{x-2}{x}$	+	–	+

A kapott egyenlőtlenséget a baloldali táblázat segítségével oldjuk meg. A táblázatból kiolvasható, hogy az egyenlőtlenség $0 < x \leq 2$ esetén teljesül, tehát a megoldáshalmaz az $M = (0, 2]$ intervallum.

14. Határozzuk meg az $x^2 \cdot 3^x - 3^{x+1} \leq 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmazát.

Megoldás. Tényezőkre bontás és kiemelés után kapjuk a

$$3^x (x^2 - 3) \leq 0$$

egyenlőtlenséget. Mivel $3^x > 0$ minden valós x esetén, így a fenti szorzat csak akkor lesz nempozitív, ha

$$x^2 - 3 \leq 0$$

teljesül. A kapott másodfokú egyenlőtlenség teljesül, ha $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$, az eredeti exponenciális egyenlőtlenség megoldáshalmaza pedig az $M = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ zárt intervallum.

15. Adjuk meg az $\frac{1}{2^{2x} + 3} \geq \frac{1}{2^{x+2} - 1}$ exponenciális egyenlőtlenség megoldáshalmazát.

Megoldás. Tényezőkre bontás után kapjuk az

$$\frac{1}{2^{2x} + 3} \geq \frac{1}{4 \cdot 2^x - 1}$$

exponenciális egyenlőtlenséget, majd bevezetve a $2^x = t$ helyettesítést kapjuk az

$$\frac{1}{t^2 + 3} \geq \frac{1}{4t - 1}$$

egyenlőtlenséget, amelynek megoldása a következő ekvivalens átalakításokkal történik:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^2 + 3} \geq \frac{1}{4t - 1} &\iff \frac{1}{t^2 + 3} - \frac{1}{4t - 1} \geq 0 \\ &\iff \frac{4t - 1 - t^2 - 3}{(t^2 + 3)(4t - 1)} \geq 0 \\ &\iff \frac{-t^2 + 4t - 4}{(t^2 + 3)(4t - 1)} \geq 0 \\ &\iff \frac{(t - 2)^2}{(t^2 + 3)(4t - 1)} \leq 0. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőtlenségből kiolvasható, hogy $t = 2$ esetén lesz igaz az egyenlőség, s hogy $(t - 2)^2 \geq 0$ és $t^2 + 3 > 0$ miatt a hányados akkor és csakis akkor lesz negatív, ha $4t - 1 < 0$, vagyis $t < \frac{1}{4}$.

Visszahelyettesítés után kapjuk, hogy a $t = 2$ megoldásnak megfelel a $2^x = 2^1$ exponenciális egyenlet, ahonnan $x = 1$ megoldása az adott egyenlőtlenségnek.

Ha a $t < \frac{1}{4}$ megoldáshalmazt tekintjük, akkor itt visszahelyettesítés után a $2^x < 2^{-2}$ exponenciális egyenlőtlenséget kapjuk, ahonnan $x < -2$ a megoldás.

Az eredeti exponenciális egyenlőtlenség megoldáshalmaza tehát

$$M = (-\infty, -2) \cup \{1\}.$$

16. Oldjuk meg a $(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x \geq 4$ egyenlőtlenséget.

Megoldás. Mivel $2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$, ezért az egyenlet felírható a

$$(2 + \sqrt{3})^x + \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^x} \geq 4$$

ekvivalens alakban. Vezessük be a $(2 + \sqrt{3})^x = y$ helyettesítést. Ekkor kapjuk az $y^2 - 4y + 1 \geq 0$ másodfokú egyenlőtlenséget, amely akkor teljesül, ha $y \leq \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$ vagy $y \geq 2 + \sqrt{3}$. Visszahelyettesítés után azt kapjuk, hogy

$$(2 + \sqrt{3})^x \leq (2 + \sqrt{3})^{-1} \quad \text{vagy} \quad (2 + \sqrt{3})^x \geq (2 + \sqrt{3})^1,$$

ahonnan következik, hogy $x \leq -1$ vagy $x \geq 1$, vagyis a megoldáshalmaz

$$M = (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

17. Határozzuk meg az $\frac{1}{2^{\sqrt{x+1}}} > \frac{8}{2^{\sqrt{x^2}}}$ egyenlőtlenség megoldáshalmazát.

Megoldás. Az egyenlőtlenség $x + 1 \geq 0$ esetén értelmezett, tehát az értelmezési tartománya a $D = [-1, \infty)$ intervallum. Figyelembe véve, hogy $\sqrt{x^2} = |x|$, felírható az eredetivel ekvivalens

$$\frac{1}{2^{\sqrt{x+1}}} > \frac{8}{2^{|x|}}$$

az egyenlőtlenség. Most vesszük mindkét oldal reciprokát, s némi rendezés és a relációjel megváltozása miatt kapjuk, hogy

$$2^{\sqrt{x+1}} < 2^{|x|-3}.$$

Az $f(x) = 2^x$ függvény szigorúan monoton növekvő, a négyzetgyökös kifejezés pedig nem lehet negatív, ezért

$$0 \leq \sqrt{x+1} < |x| - 3.$$

Mivel most nemnegatív mennyiségeket hasonlítunk össze és az $g(x) = x^2$ függvény pozitív értékekre szigorúan monoton növekvő, így ezért az

$$x + 1 < (|x| - 3)^2$$

egyenlőtlenséget kapjuk, amiből az

$$x^2 - 6|x| - x + 8 > 0$$

másodfokú egyenlőtlenség adódik. Két esetet veszünk figyelembe.

1. eset. Ha $x \geq 0$, akkor $|x| = x$. Ekkor az $x^2 - 6x - x + 8 > 0$, illetve rendezéssel az $x^2 - 7x + 8 > 0$ másodfokú egyenlőtlenség adódik, amely $x < \frac{7 - \sqrt{17}}{2}$ vagy pedig $x > \frac{7 + \sqrt{17}}{2}$ esetén teljesül. Figyelembe véve, hogy most $x \geq 0$, így a megoldáshalmaz $M_1 = \left[0, \frac{7 - \sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{7 + \sqrt{17}}{2}, \infty\right)$.

2. eset. Ha $-1 \leq x < 0$, akkor $|x| = -x$. Ekkor az $x^2 + 6x - x + 8 > 0$, illetve rendezéssel az $x^2 + 5x + 8 > 0$ másodfokú egyenlőtlenséget kapjuk, amely minden valós x esetére teljesül. Figyelembe véve, hogy most $-1 \leq x < 0$, így a megoldáshalmaz $M_2 = [-1, 0)$.

Az eredeti egyenlőtlenség megoldáshalmaza

$$M = M_1 \cup M_2 = \left[-1, \frac{7 - \sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{7 + \sqrt{17}}{2}, \infty\right).$$

18. Oldjuk meg a következő exponenciális egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 8^{2x+1} &= 32 \cdot 2^{4y-1}, \\ 5 \cdot 5^{x-y} &= \sqrt{25^{2y+1}}. \end{aligned}$$

Megoldás. Írjuk fel az első egyenletet a 2, a másodikat pedig az 5 hatványaiként. Ekkor a

$$\begin{aligned} 2^{6x+3} &= 2^{4y+4}, \\ 5^{x-y+1} &= 5^{2y+1} \end{aligned}$$

egyenletrendszert kapjuk, ahonnan a megfelelő exponenciális függvények szigorú monotonitása miatt a hatványkitevők kiegyenlíthetők, vagyis felírható a

$$\begin{aligned} 6x + 3 &= 4y + 4, \\ x - y + 1 &= 2y + 1 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszer, amelynek megoldása a $\left(\frac{3}{14}, \frac{1}{14}\right)$ rendezett pár, s így az eredeti exponenciális egyenletrendszer megoldáshalmaza $M = \left\{\left(\frac{3}{14}, \frac{1}{14}\right)\right\}$.

19. Határozzuk meg a következő exponenciális egyenletrendszer megoldáshalmazát:

$$\begin{aligned} 2^x \cdot 3^y &= 24, \\ 2^y \cdot 3^x &= 54. \end{aligned}$$

Megoldás. A két egyenlet összeszorozásával kapjuk a

$$6^x \cdot 6^y = 24 \cdot 54, \quad \text{illetve} \quad 6^{x+y} = 6^4$$

exponenciális egyenletet, ahonnan a megfelelő exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt a hatványkitevők kiegyenlíthetők, vagyis felírható az $x+y=4$ lineáris egyenlet, ahonnan $y=4-x$. Behelyettesítve ezt a kifejezést az első egyenletbe adódik a

$$2^x \cdot 3^{4-x} = 24, \quad \text{illetve} \quad 2^x \cdot \frac{81}{3^x} = 24, \quad \text{majd a} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

exponenciális egyenlet, amelyből a hatványkitevők kiegyenlítésével $x=3$, majd behelyettesítéssel $y=1$ adódik.

Az eredeti exponenciális egyenletrendszer megoldáshalmaza így $M = \{(3, 1)\}$.

20. Adjuk meg a következő exponenciális egyenletrendszer megoldáshalmazát:

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2}\right)^{x-y} - \left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} &= \frac{65}{36}, \\ xy - x + y &= 118. \end{aligned}$$

Megoldás. Vezessük be az első egyenletbe a $\left(\frac{3}{2}\right)^{x-y} = t$ helyettesítést. Ekkor a

$$t - \frac{1}{t} = \frac{65}{36}, \quad \text{illetve} \quad 36t^2 - 65t - 36 = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek $t_1 = \frac{9}{4}$ és $t_2 = -\frac{4}{9}$ a megoldásai. Visszahe-
lyettesítés után a

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x-y} = \left(\frac{3}{2}\right)^2, \quad \text{illetve} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{x-y} = -\frac{4}{9}$$

exponenciális egyenleteket kapjuk. Az első egyenletből az $x - y = 2$ lineáris egyen-
letet kapjuk, a második egyenletnek pedig nincs valós megoldása. Így az

$$\begin{aligned} x - y &= 2, \\ xy - x + y &= 118 \end{aligned}$$

egyenletrendszer kapjuk. Az első egyenletből $x = y + 2$, s ezt a második egyenletbe
helyettesítve az

$$y(y + 2) - (y + 2) + y = 0, \quad \text{illetve} \quad y^2 + 2y - 120 = 0$$

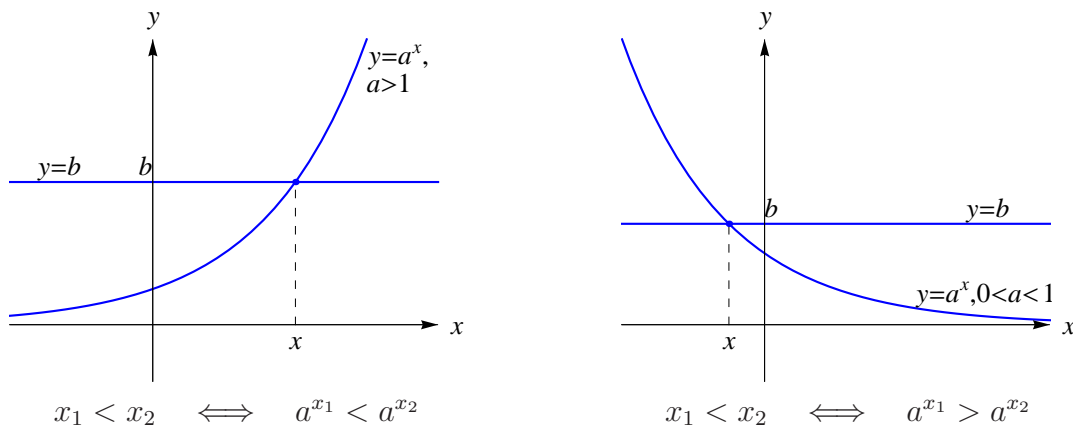
másodfokú egyenletet nyerjük, amelynek megoldásai $y_1 = 10$ és $y_2 = -12$. A
megfelelő x párok $x_1 = 12$ és $x_2 = -10$, az eredeti exponenciális egyenletrendszer
megoldáshalmaza pedig

$$M = \{(12; 10), (-10; -12)\}.$$

8.3. A logaritmus fogalmának bevezetése

Legyen $a \neq 1$ pozitív valós szám. Tudjuk az előző fejezetből, s az alábbi ábrákról is
leolvasható, hogy az $y = a^x$ függvénygrafikon $a > 1$ esetben szigorúan monoton növekvő,
 $0 < a < 1$ esetben pedig szigorúan monoton csökkenő.

Legyen továbbá b egytetszőleges valós szám. Azt a kérdést szeretnénk megvizsgálni, hogy
létezik-e, és ha igen, akkor egyértelműen-e, egy olyan $x \in \mathbf{R}$ valós szám, amelyre $a^x = b$.
Ennek a kérdésnek a geometriai interpretációja az lenne, hogy vajon metszi-e az $y = b$
egyenes, és ha igen, akkor hány pontban, az $y = a^x$ exponenciális görbét.



A kérdésre a válaszok az $f(x) = a^x$ exponenciális függvény megfelelő tulajdonságaiból
következnek. Először is az f függvény értelmezési tartománya a valós számok \mathbf{R} halmaza.

Ugyanakkor az f függvény szigorúan monoton, ami azt jelenti, hogy bijektív függvényről van szó, vagyis egy eredetihez egy és csakis egy képelem tartozik. A harmadik fontos tulajdonság, hogy az f függvény képtartománya a pozitív valós számok halmaza.

A feltett kérdésre a válaszokat tehát így fogalmazhatjuk meg:

1° Ha $b > 0$, akkor az $y = b$ egyenes pontosan egy pontban metszi az $y = a^x$ exponenciális görbét, vagyis egyértelműen létezik olyan valós x szám, amelyre $a^x = b$.

2° Ha $b \leq 0$, akkor az $y = b$ egyenes nem metszi az $y = a^x$ exponenciális görbét, vagyis nem pozitív b -re az $a^x = b$ egyenletnek nincs megoldása.

Azt az x számot, amelyre $a \neq 1$ pozitív valós szám és $b > 0$ esetén $a^x = b$, $x = \log_a b$ módon jelöljük (olvasd: x egyenlő logaritmus a alapon b), vagyis

$$x = \log_a b, \quad \text{ha} \quad a^x = b, \quad \text{vagy másként} \quad a^{\log_a b} = b.$$

A megfelelő $x \neq 0$ valós számra, $a \neq 1$ pozitív valós számra és $b > 0$ pozitív valós számra a következő összefüggéseket írhatjuk fel:

$$a^x = b \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt[x]{b} = a \quad \Longleftrightarrow \quad \log_a b = x.$$

Ugyanarról az összefüggésről van szó, csak a három szám közül mindig másikat fejezünk ki explicit módon. Ez a számhármas olyan értelemben tartozik össze, hogy bármelyik kettőhöz egyértelműen hozzátartozik a harmadik.

Mindebből kitűnik, hogy az a alapú logaritmuskeresés egy művelet, méghozzá a hatványozás inverz művelete (ezért lehet a logaritmálást másképpen hatványkeresésnek is nevezni). Mivel a gyökvonás is a hatványozás inverz művelete, így megállapíthatjuk, hogy a hatványozásnak két lényegesen különböző inverz művelete van, a gyökvonás és a logaritmálás.

8.5. Definíció. Legyen $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ és $b \in \mathbf{R}$, $b > 0$. Az a szám b alapú logaritmusának nevezzük azt a valós x számot, amellyel kell hatványozni az a számot ahhoz, hogy megkapjuk a b -t, vagyis amelyre igaz, hogy $a^x = b$. Ezt a számot $x = \log_a b$ -vel jelöljük, s erre igaz, hogy

$$x = \log_a b \quad \text{akkor és csakis akkor, ha} \quad a^x = b.$$

Az a számot a logaritmus alapjának, a b számot pedig a logaritmus argumentumának vagy numerusának nevezzük.

8.15. Példa. A logaritmus definíciója alapján határozzuk meg a következő logaritmus értékeket.

$$\log_2 2 = 1, \quad \text{mert} \quad 2^1 = 2; \quad \log_2 8 = 3, \quad \text{mert} \quad 2^3 = 8;$$

$$\log_2 \frac{1}{4} = -2, \quad \text{mert} \quad 2^{-2} = \frac{1}{4}; \quad \log_2 1 = 0, \quad \text{mert} \quad 2^0 = 1;$$

$$\log_7 \sqrt{7} = \frac{1}{2}, \quad \text{mert} \quad 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}; \quad \log_{\frac{1}{3}} 9 = -2, \quad \text{mert} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9;$$

$$\log_{\frac{2}{3}} \frac{16}{81} = 4, \quad \text{mert} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}; \quad \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1000}} = -\frac{3}{2}, \quad \text{mert} \quad 10^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{1}{10^3}} = \frac{1}{\sqrt{1000}}.$$

Nemzetközi megállapodás szerint a 10-es alapú logaritmust ($\log_{10} x$) \log (egyres magyarországi tankönyvekben \lg) jelöléssel ($\log x$, $\lg x$), az e alapú logaritmust \ln ($\ln x$, logaritmus naturalis, s annyit jelent, mint természetes alapú logaritmus) jelöléssel rövidítjük (egyres magyarországi tankönyvekben \log jelöli a természetes alapú logaritmust).

8.16. Példa. Alkalmazva a rövidített jelöléseket felírhatjuk a következőket:

$$\begin{aligned}\log 10 &= 1, \quad \text{mert} \quad 10^1 = 10; & \log 100 &= 2, \quad \text{mert} \quad 10^2 = 100; \\ \log 0,1 &= -1, \quad \text{mert} \quad 10^{-1} = 0,1; & \log 0,0001 &= -4, \quad \text{mert} \quad 10^{-4} = 0,0001; \\ \log \sqrt{10} &= \frac{1}{2}, \quad \text{mert} \quad 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}; & \ln e &= 1, \quad \text{mert} \quad e^1 = e.\end{aligned}$$

8.17. Példa. A logaritmus definíciója alapján határozzuk meg az x ismeretlen értékét a következő egyenletekben:

$$\begin{aligned}\log_5 x &= 0 & \iff & 5^0 = x & \iff & x = 1; \\ \log_4 \frac{1}{4} &= x & \iff & 4^x = \frac{1}{4} & \iff & x = -1; \\ \log_x 125 &= 3 & \iff & x^3 = 125 & \iff & x = 5.\end{aligned}$$

8.4. A logaritmus műveleti azonosságai

Az előző fejezetben leszögeztük, hogy a logaritmuskeresés egy művelet. Nézzük meg, hogy milyen kapcsolatban áll ez az új művelet a többi művelettel.

1° Vizsgáljuk meg először a szorzás és a logaritmus kapcsolatát. Ha $a > 0$, $a \neq 1$ és $x > 0$, $y > 0$ valós számok, akkor léteznek olyan α és β valós számok, amelyekre

$$\log_a x = \alpha \quad \text{és} \quad \log_a y = \beta, \quad \text{vagyis} \quad a^\alpha = x \quad \text{és} \quad a^\beta = y.$$

Ha $x > 0$ és $y > 0$, akkor $x \cdot y > 0$, s így létezik a $\log_a xy$ érték is. Ekkor a definíció alapján

$$a^{\log_a xy} = xy = a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta} = a^{\log_a x + \log_a y},$$

ami azt jelenti, hogy

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y.$$

Szavakkal: **Szorzat logaritmus egyenlő a tényezők logaritmusának összegével.**

2° Vizsgáljuk most meg a hatványozás és a logaritmus kapcsolatát. Legyen $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$ és s valós számok. Ekkor létezik olyan α valós szám, amelyre

$$\log_a x = \alpha, \quad \text{azaz} \quad a^\alpha = x.$$

Mivel x^s pozitív valós szám, így létezik a $\log_a x^s$ érték is. A definíció alapján

$$a^{\log_a x^s} = x^s = (a^\alpha)^s = a^{s\alpha} = a^{s \log_a x},$$

s innen (az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt)

$$\log_a x^s = s \log_a x.$$

Szavakkal: **Hatvány logaritmus egyenlő a kitevő és az alap logaritmusának szorzatával.**

3° Vizsgáljuk továbbá az osztás és a logaritmus kapcsolatát. Tekintettel arra, hogy felírható az $\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$ egyenlőség, így felhasználva az előző két szabályt következik:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x \cdot y^{-1} = \log_a x + \log_a y^{-1} = \log_a x + (-1) \log_a y,$$

vagyis

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

Szavakkal: **Hányados logaritmusa egyenlő a számláló és a nevező logaritmusainak különbségével.**

4° Vizsgálva a gyökvonás és logaritmus kapcsolatát, és felhasználva az első két szabályt, ha $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$ valós számok és $n \in \mathbf{N}$, akkor

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a x, \quad \text{vagyis} \quad \log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x.$$

5° Ha $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$ valós számok és $n \in \mathbf{N}$, akkor ha

$$\log_{a^n} b^n = \alpha, \quad \text{akkor} \quad (a^n)^\alpha = b^n, \quad \text{illetve} \quad a^\alpha = b \quad \text{és} \quad \log_a b = \alpha,$$

vagyis igaz, hogy

$$\log_{a^n} b^n = \log_a b.$$

6° Ha $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$ valós számok, akkor a definíció alapján $a^{\log_a b} = b$, s ezt az egyenlőséget b alapon logaritmálva kapjuk, hogy

$$\log_b a^{\log_a b} = \log_b b = 1,$$

illetve a hatvány logaritmusára vonatkozó szabály alapján

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1, \quad \text{ahonnan} \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

7° Ha $a > 0$, $a \neq 1$, $s \neq 0$ valós számok, akkor az előző szabályt kétszer alkalmazva a $\log_{a^s} x$ értékre kapjuk, hogy

$$\log_{a^s} x = \frac{1}{\log_x a^s} = \frac{1}{s \cdot \log_x a} = \frac{1}{s} \cdot \log_a x, \quad \text{vagyis} \quad \log_{a^s} x = \frac{1}{s} \cdot \log_a x.$$

8° Végül vizsgáljuk meg a más logaritmus alapra való áttérés lehetőségét. Ha $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $c > 0$, $c \neq 1$ valós számok, akkor $c^{\log_c b} = a^{\log_a b} = b$. Ha az egyenlőség első részét logaritmáljuk c alapú logaritmussal, akkor a

$$\log_c c^{\log_c b} = \log_c a^{\log_a b}$$

összefüggést kapjuk, amelyre a hatvány logaritmusának szabályát alkalmazva

$$\log_c b \cdot \log_c c = \log_a b \cdot \log_c a, \quad \text{illetve} \quad \log_c b = \log_a b \cdot \log_c a$$

adódik ($\log_c c = 1$ miatt).

A fenti egyenlőségből következik a más logaritmus alapra való áttérés képlete:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

8.18. Példa. A 8° szabály segítségével számíthatjuk ki például a tetszőleges alapú logaritmus értékét, ha a zsebszámológépen csak \log és \ln található. Például:

$$\log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2} \approx 2,32 \quad \text{vagy} \quad \log_2 5 = \frac{\ln 5}{\ln 2} \approx 2,32;$$

$$\log_3 7 = \frac{\log 7}{\log 3} \approx 1,77 \quad \text{vagy} \quad \log_3 7 = \frac{\ln 7}{\ln 3} \approx 1,77.$$

8.19. Példa. Alkalmazzuk a logaritmálási szabályokat a következő kifejezésekre:

$$A = 3x^2y^3, \quad \log_a A = \log_a 3x^2y^3 = \log_a 3 + 2\log_a x + 3\log_a y,$$

$$B = 6x\sqrt[3]{y^2}, \quad \log_a B = \log_a 6x\sqrt[3]{y^2} = \log_a 6 + \log_a x + \frac{2}{3}\log_a y,$$

$$C = \sqrt{2x\sqrt{x^3\sqrt{y^2}}}, \quad \log_a C = \log_a \sqrt{2x\sqrt{x^3\sqrt{y^2}}} = \frac{1}{2}(\log_a 2 + \log_a x) + \frac{3}{4}\log_a x + \frac{1}{8}\log_a y.$$

8.20. Példa. Határozzuk meg a $\log_2 x = \log_2 4 + \log_2 3 - \log_2 2$ egyenletből az x ismeretlen értékét. Alkalmazva a jobb oldalon a logaritmálási szabályokat kapjuk a $\log_2 x = \log_2 \frac{4 \cdot 3}{2}$ ekvivalens alakot, ahonnan $\log_2 x = \log_2 6$. Innen $x = 2^{\log_2 6}$, azaz $x = 6$.

8.21. Példa. Legyen $\log_{30} 3 = x$ és $\log_{30} 5 = y$. Fejezzük ki x és y segítségével a $\log_{30} 8$ számot. Írjuk fel a 8-at a 3, 5 és 30 számok segítségével. Mivel $8 = 2^3$, ezért gondolkodhatunk a következő módon:

$$\begin{aligned} \log_{30} 8 &= \log_{30} 2^3 = 3\log_{30} 2 = 3\log_{30} \frac{30}{15} = 3\log_{30} \frac{30}{3 \cdot 5} = \\ &= 3(\log_{30} 30 - \log_{30} 3 - \log_{30} 5) = 3(1 - x - y). \end{aligned}$$

8.22. Példa. Legyenek $a > 0$, $b > 0$, $x > 0$, $a \neq 1$, $ab \neq 1$ és $x \neq 1$ valós számok. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 1 + \log_a b.$$

Térjünk át az egyenlőség bal oldalán x alapú logaritmusra és alkalmazzuk a logaritmálási szabályokat. Ekkor felírható, hogy

$$\frac{\log_x ab}{\log_x a} = 1 + \log_a b, \quad \text{illetve} \quad \frac{\log_x a + \log_x b}{\log_x a} = 1 + \log_a b,$$

továbbá, hogy

$$\frac{\log_x a}{\log_x a} + \frac{\log_x b}{\log_x a} = 1 + \log_a b, \quad \text{illetve} \quad 1 + \frac{\log_x b}{\log_x a} = 1 + \log_a b.$$

Most a kapott ekvivalens egyenlőség bal oldalán áttérhetünk a alapú logaritmusokra. Ekkor adódik, hogy

$$1 + \frac{\frac{\log_a b}{\log_a x}}{\frac{\log_a a}{\log_a x}} = 1 + \log_a b,$$

ahonnan egyszerűsítés után, valamint a $\log_a a = 1$ egyenlőségből következik, hogy

$$1 + \log_a b = 1 + \log_a b,$$

ami igaz egyenlőség, s ekvivalens az egyenlőséggel, amit bizonyítanunk kellett.

8.5. Logaritmusos egyenletek, egyenlőtlenségek és egyenletrendszerek

8.5.1. A logaritmusfüggvény és logaritmusos egyenletek

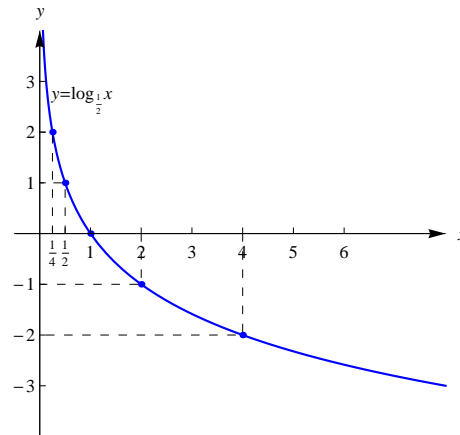
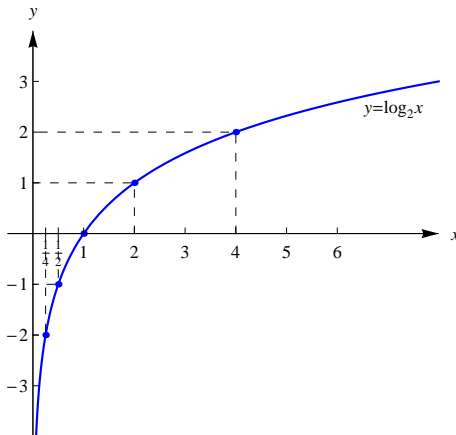
Az $f(x) = a^x$ függvényről elmondtuk, hogy $a > 0$, $a \neq 1$ valós szám esetén értelmezési tartománya a valós számok, azaz $D_f = \mathbf{R}$ halmaza, értékkészlete pedig a pozitív valós számok halmaza, azaz $R_f = \mathbf{R}^+$, valamint hogy $a > 1$ esetén szigorúan monoton növekvő, $0 < a < 1$ esetén pedig szigorúan monoton csökkenő. Így

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^+, \quad f : x \mapsto a^x, \quad x \in \mathbf{R}, a^x \in \mathbf{R}^+$$

egy bijektív függvény, ezért létezik az f^{-1} inverzfüggvénye, melyre $a > 0$, $a \neq 1$ valós szám esetén és $a^y = x \iff y = \log_a x$ miatt igaz, hogy

$$f^{-1} : \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R}, \quad f^{-1} : x \mapsto \log_a x, \quad x \in \mathbf{R}^+, \log_a x \in \mathbf{R},$$

s amely $a > 1$ esetén szigorúan monoton növekvő, grafikonja pedig az alábbi bal oldali ábrán látható $y = \log_2 x$ függvénygrafikonhoz hasonló, $0 < a < 1$ esetén pedig szigorúan monoton csökkenő, grafikonja pedig az alábbi jobb oldali ábrán látható $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ függvénygrafikonhoz hasonló.



8.6. Definíció. *Logaritmusos egyenletnek nevezünk egy egyenletet, ha benne az ismeretlen a logaritmus alapjában vagy argumentumában szerepel.*

A logaritmusfüggvények szigorú monotonitási tulajdonsága miatt, az exponenciális egyenletek megoldásához hasonlóan, a logaritmusos egyenleteknél is felhasználható az a tulajdonság, hogy egyenlő függvényértékek esetén az eredetiek is egyenlők, azaz

$$a \neq 1 \text{ valós szám esetén} \quad \log_a f(x) = \log_a g(x) \iff f(x) = g(x),$$

ahol természetesen az f és g tetszőleges pozitív értékű valós függvények lehetnek.

Összetettségüktől és megoldási menetüktől függően az exponenciális egyenletekhez hasonlóan a logaritmusos egyenletek is csoportokba sorolhatók.

I. Azonos alapra hozható logaritmusos egyenletek

Ezeknél a típusoknál alkalmazhatjuk, az előbb már említett monotonitási tulajdonságot:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \iff (f(x) = g(x) \quad \wedge \quad f(x) > 0).$$

8.23. Példa. Oldjuk meg a $\log_2(x-3) = \log_2(x^2-5x-10)$ logaritmusos egyenletet. Ennél az egyenletnél közvetlenül alkalmazható az $f(x) = \log_2 x$ függvény szigorú monotonitási tulajdonsága, s ekkor

$$x-3 = x^2-5x-10 \quad \text{és} \quad x-3 > 0, \quad \text{illetve} \quad x^2-6x-7 = 0 \quad \text{és} \quad x > 3$$

következik, amelyből az $x_1 = -1$ és $x_2 = 7$ gyökök közül $x > 3$ miatt csak $x_2 = 7$ lesz megoldása az eredeti logaritmusos egyenletnek is, vagyis az eredeti logaritmusos egyenlet megoldáshalmaza

$$M = \{7\}.$$

8.24. Példa. Határozzuk meg a $\log_3(5 + 4\log_3(x-1)) = 2$ logaritmusos egyenlet megoldáshalmazát. Közös alapú logaritmusra felírva az egyenlet mindkét oldalát kapjuk a

$$\log_3(5 + 4\log_3(x-1)) = \log_3 3^2$$

ekvivalens egyenlet, majd az $f(x) = \log_3 x$ függvény szigorú monotonitási tulajdonsága alapján felírható, hogy

$$5 + 4\log_3(x-1) = 9, \quad \text{illetve} \quad \log_3(x-1) = 1,$$

ahonnan $x-1 = 3$, illetve $x = 4$ adódik. Mivel a kapott megoldás kielégíti az eredeti logaritmusos egyenletet, így a keresett megoldáshalmaz

$$M = \{4\}.$$

II. Helyettesítéssel megoldható logaritmusos egyenletek

Ezekben az egyenletekben egy többször is előforduló logaritmusos kifejezést helyettesítünk új változóval.

8.25. Példa. Oldjuk meg a $\log_2(2^x + 1) \cdot \log_2(2^{x+1} + 2) = 2$ logaritmusos egyenletet. Vegyük észre, hogy $2^x + 1 > 0$ és $2^{x+1} + 2 > 0$ minden valós x -re teljesül az exponenciális kifejezések szigorú pozitivitása miatt, ezért az egyenlet értelmezési tartománya $D = \mathbf{R}$. Tényezőkre bontással az egyenlet felírható

$$\log_2(2^x + 1) \cdot \log_2(2 \cdot 2^x + 2) = 2, \quad \text{illetve} \quad \log_2(2^x + 1) \cdot [\log_2 2 + \log_2(2^x + 1)] = 2$$

alakban. Ha most a kapott egyenletben a $\log_2(2^x + 1) = t$ helyettesítést alkalmazzuk, akkor a $t(t+1) = 2$, illetve rendezés után a $t^2 + t - 2 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek megoldásai a $t_1 = 1$ és $t_2 = -2$ számok. Visszahelyettesítés után kapjuk a

$$\log_2(2^x + 1) = 1 \quad \text{és} \quad \log_2(2^x + 1) = -2, \quad \text{illetve} \quad 2^x + 1 = 2 \quad \text{és} \quad 2^x + 1 = \frac{1}{4}$$

egyenleteket, amelyekből rendezés után a

$$2^x = 1 \quad \text{és} \quad 2^x = -\frac{3}{4}$$

exponenciális egyenlet adódik. Az első egyenlet megoldása $x = 0$, a második egyenletnek pedig nincs megoldása, hiszen exponenciális kifejezés negatív értéket nem vehet fel. Az egyenlet megoldáshalmaza tehát

$$M = \{0\}.$$

III. Logaritmálással megoldható egyenletek

Amikor egy exponenciális egyenlet alapjában is és kitevőjében is megtalálható a keresett ismeretlen, akkor az ilyen egyenleteket legtöbbször csak az egyenlet mindkét oldalának megfelelő alapon történő logaritmálásával tudjuk megoldani.

8.26. Példa. Oldjuk meg az $x^{\log_3 \sqrt{x} - \frac{1}{2}} = 3$ egyenletet. Mivel az egyenlet bal oldalán a hatványkifejezés alapjában is és kitevőjében is megtalálható az x ismeretlen, ezért logaritmáljuk az egyenlet mindkét oldalát 3-as alapú logaritmussal. Ekkor viszont a $\log_3 x^{\log_3 \sqrt{x} - \frac{1}{2}} = \log_3 3$ logaritmusos egyenletet kapjuk, majd a hatvány logaritmusára vonatkozó szabály alapján a

$$\left(\log_3 \sqrt{x} - \frac{1}{2}\right) \cdot \log_3 x = 1, \quad \text{illetve} \quad \frac{1}{2}(\log_3 x - 1) \cdot \log_3 x = 1$$

ekvivalens egyenleteket. Vezessük be a kapott egyenletbe a $\log_3 x = t$ helyettesítést. Ekkor a $(t-1)t = 2$, illetve rendezés után a $t^2 - t - 2 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek megoldásai a $t_1 = 2$ és $t_2 = -1$ számok. Visszahelyettesítés után adódnak a

$$\log_3 x = 2 \quad \text{és} \quad \log_3 x = -1$$

logaritmusos egyenletek, ahonnan az $x_1 = 9$ és $x_2 = \frac{1}{3}$ megoldásokat nyerjük. Mivel az adott egyenlet értelmezési tartománya az $x > 0$, $x \neq 1$ feltétel miatt $D = (0, 1) \cup (1, \infty)$, így az eredeti egyenlet megoldáshalmaza

$$M = \left\{\frac{1}{3}, 9\right\}.$$

8.27. Példa. Határozzuk most meg az $x^{1 - \frac{1}{3} \log x^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{100}}$ egyenlet megoldáshalmazát. Hasonló megfontolásból kiindulva, mint az előző példában, logaritmáljuk az egyenlet mindkét oldalát, de ez esetben 10-es alapú logaritmussal. Ekkor kapjuk a

$$\log x^{1 - \frac{1}{3} \log x^2} = \log \frac{1}{\sqrt[3]{100}}, \quad \text{majd az} \quad \left(1 - \frac{2}{3} \log x\right) \log x = -\frac{2}{3}$$

ekvivalens egyenletet. Bevezetve a $\log x = t$ helyettesítést az $\left(1 - \frac{2}{3}t\right)t = -\frac{2}{3}$, illetve rendezés után a $2t^2 - 3t - 2 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek gyökei $t_1 = 2$ és $t_2 = -\frac{1}{2}$. Visszahelyettesítés után a

$$\log x = 2 \quad \text{és} \quad \log x = -\frac{1}{2}$$

logaritmusos egyenleteket kapjuk, amelyek megoldásai $x_1 = 100$ és $x_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Mivel az eredeti egyenlet értelmezési tartománya ebben az esetben is az $x > 0$, $x \neq 1$ feltétel miatt $D = (0, 1) \cup (1, \infty)$, így az eredeti egyenlet megoldáshalmaza

$$M = \left\{\frac{1}{\sqrt{10}}, 100\right\}.$$

8.5.2. Logaritmikus egyenlőtlenségek

8.7. Definíció. Logaritmikus egyenlőtlenségnek nevezzük az egyenlőtlenséget, ha benne az ismeretlen a logaritmus alapjában vagy argumentumában szerepel.

Felhasználva az $f(x) = \log_a x$ logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekvő tulajdonságát $a > 1$ esetén, felírhatjuk, hogy

$$\log_a f(x) \leq \log_a g(x) \iff (f(x) \leq g(x) \wedge f(x) > 0)$$

$$\text{vagy } \log_a f(x) < \log_a g(x) \iff (f(x) < g(x) \wedge f(x) > 0).$$

$0 < a < 1$ esetén, az $f(x) = \log_a x$ logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökkenő tulajdonsága alapján felírhatjuk, hogy

$$\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \iff (f(x) \leq g(x) \wedge f(x) > 0)$$

$$\text{vagy } \log_a f(x) > \log_a g(x) \iff (f(x) < g(x) \wedge f(x) > 0).$$

8.28. Példa. Oldjuk meg a $\log_2 \frac{x-1}{x+1} < 1$ logaritmikus egyenlőtlenséget. Mivel az egyenlőtlenségben szereplő logaritmusfüggvény alapja $a = 2 > 1$, így az első két ekvivalencia alapján felírhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \log_2 \frac{x-1}{x+1} < \log_2 2 &\iff \frac{x-1}{x+1} < 2 \wedge \frac{x-1}{x+1} > 0 \\ &\iff \frac{-x-3}{x+1} < 0 \wedge \frac{x-1}{x+1} > 0 \\ &\iff x \in (-\infty, -3) \cup (-1, \infty) \wedge x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ &\iff x \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty). \end{aligned}$$

Az ekvivalencia jobb oldalán álló $\frac{x-1}{x+1} > 0$ egyenlőtlenséggel tulajdonképpen az egyenlőtlenség értelmezési tartományát határozzuk meg.

Az adott logaritmikus egyenlőtlenség megoldáshalmaza tehát

$$M = (-\infty, -3) \cup (1, \infty).$$

Összetettebb akkor a helyzet, amikor a logaritmikus egyenlőtlenségben szereplő logaritmikus kifejezés alapjában is szerepel az ismeretlen. Ilyen esetben külön kell tárgyalni azt az esetet, amikor a logaritmus alapja nagyobb, mint 1, valamint azt az esetet, amikor a logaritmus alapja 0 és 1 között van.

8.29. Példa. Határozzuk meg a $\log_x \sqrt{x+12} > 1$ logaritmikus egyenlőtlenség megoldáshalmazát. Vegyük észre, hogy az egyenlőtlenség felírható a $\log_x \sqrt{x+12} > \log_x x$ ekvivalens alakban, s hogy ez értelmezett, ha $x > 0$, $x \neq 1$ és $x+12 > 0$, vagyis az egyenlőtlenség értelmezési tartománya $D = (0, 1) \cup (1, \infty)$.

1. eset. Ha $x > 1$, akkor

$$\begin{aligned} \log_x \sqrt{x+12} > \log_x x &\iff \sqrt{x+12} > x \\ (y = x^2 \text{ szig. mon. növekvő, ha } x > 0) &\iff x+12 > x^2 \\ &\iff x^2 - x - 12 < 0 \\ &\iff x \in (-3, 4). \end{aligned}$$

Figyelembe véve, hogy az adott eset feltétele $x > 1$, a megoldáshalmaz $M_1 = (1, 4)$.

2. eset. Ha $0 < x < 1$, akkor

$$\begin{aligned} \log_x \sqrt{x+12} > \log_x x &\iff \sqrt{x+12} < x \\ (y = x^2 \text{ szig. mon. növekvő, ha } x > 0) &\iff x+12 < x^2 \\ &\iff x^2 - x - 12 > 0 \\ &\iff x \in (-\infty, -3) \cup (4, \infty). \end{aligned}$$

Figyelembe véve, hogy az adott eset feltétele most $0 < x < 1$, a megoldáshalmaz $M_2 = \emptyset$. Az eredeti egyenlőtlenség megoldáshalmaza tehát

$$M = M_1 \cup M_2 = (1, 4).$$

8.5.3. Logaritmusos egyenletrendszerek

8.8. Definíció. *Logaritmusos egyenletrendszernek nevezzük egy egyenletrendszert, ha benne legalább az egyik egyenlet logaritmusos egyenlet.*

8.30. Példa. Oldjuk meg az $y + \log_{\frac{1}{3}} x = 1$ és $x^y = 3^{12}$ egyenletekből álló rendszert. Az első egyenletből $y = 1 - \log_{\frac{1}{3}} x$, azaz $y = 1 + \log_3 x$. A kapott kifejezést a második egyenletbe helyettesítve kapjuk az

$$x^{1+\log_3 x} = 3^{12}$$

egyenletet, amelynek mindkét oldalát 3-as alapú logaritmussal logaritmáljuk, s így a

$$\log_3 x^{1+\log_3 x} = \log_3 3^{12}, \quad \text{illetve} \quad (1 + \log_3 x) \log_3 x = 12$$

egyenlethez jutunk. Bevezetve a $\log_3 x = t$ helyettesítést kapjuk az $(1+t)t = 12$, illetve rendezés után a $t^2 + t - 12 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek gyökei $t_1 = 3$ és $t_2 = -4$. Visszahelyettesítés után a

$$\log_3 x = 3 \quad \text{és} \quad \log_3 x = -4$$

logaritmusos egyenleteket kapjuk, amelyek megoldásai $x_1 = 27$ és $x_2 = \frac{1}{81}$. A megfelelő y értékeket a következő egyenletekből számíthatjuk ki:

$$y_1 = 1 + \log_3 27 = 1 + 3 = 4 \quad \text{és} \quad y_2 = 1 + \log_3 \frac{1}{81} = 1 - 4 = -3.$$

Az egyenletrendszer akkor értelmezett, ha $x > 0$ és $x \neq 1$, tehát értelmezési tartománya $D = \{(x; y) | x \in (0, 1) \cup (1, \infty), y \in \mathbf{R}\}$, megoldáshalmaza pedig

$$M = \left\{ (27; 4), \left(\frac{1}{81}; -3 \right) \right\}.$$

8.31. Példa. Határozzuk most meg a

$$\begin{aligned}\log(x+1) + \log(y-1) &= 2 \\ \log(x-1) + \log(y+1) &= 5\log 2 + \log 3\end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldáshalmazát. Alkalmazva mindkét egyenletben a logaritmálási szabályokat kapjuk a

$$\begin{aligned}\log(x+1)(y-1) &= \log 10^2 \\ \log(x-1)(y+1) &= \log 2^5 \cdot 3\end{aligned}$$

ekvivalens egyenletrendszert, amelyben az $f(x) = \log x$ függvény szigorú monotonitása miatt a függvény argumentumai kiegyenlíthetők, ezzel pedig az

$$\begin{aligned}(x+1)(y-1) &= 100 \\ (x-1)(y+1) &= 96\end{aligned}$$

egyenletrendszer adódik. Rendezés után kapjuk az

$$\begin{aligned}xy - x + y - 1 &= 100 \\ xy + x - y - 1 &= 96\end{aligned}$$

egyenletrendszert, s a két egyenlet kivonásával nyerjük a $-2x + 2y = 4$ lineáris egyenletet, ahonnan $y = x + 2$. A kapott kifejezést az első egyenletbe helyettesítve az

$$x(x+2) - x + x + 2 - 1 = 100,$$

majd rendezés után az

$$x^2 + 2x - 99 = 0$$

másodfokú egyenletet, amelynek megoldásai $x_1 = 9$ és $x_2 = -11$, a hozzájuk tartozó y párok pedig $y_1 = 11$ és $y_2 = -9$. A lehetséges megoldások tehát a $(9; 11)$ és $(-9; -11)$ rendezett párok.

Mivel az eredeti egyenletrendszer csak akkor értelmezett, ha

$$x+1 > 0 \quad \text{és} \quad y-1 > 0 \quad \text{és} \quad x-1 > 0 \quad \text{és} \quad y+1 > 0,$$

vagyis ha $x > 1$ és $y > 1$, így az egyenletrendszer értelmezési tartománya

$$D = \{(x; y) | x > 1, y > 1\},$$

ezért a negatív koordinátájú rendezett pár nem megoldás, vagyis az egyenletrendszer megoldáshalmazában csak a pozitív koordinátájú rendezett pár lehet benne. Az eredeti egyenletrendszer megoldáshalmaza tehát

$$M = \{(9; 11)\}.$$

FELADATOK

1. Egyszerűsítsük a következő logaritmusos kifejezést, ha $a > 1$ és $b > 1$:

$$A = 2 (\log_a b)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\log_a \sqrt[4]{ab} + \log_b \sqrt[4]{ab} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\log_a \sqrt[4]{\frac{b}{a}} + \log_b \sqrt[4]{\frac{a}{b}} \right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

Megoldás. Alkalmazzuk a logaritmus és a hatványozás műveleti szabályait. Ekkor

$$\begin{aligned} A &= 2\sqrt{\log_a b} \sqrt{\frac{1}{4} (\log_a a + \log_a b + \log_b a + \log_b b)} - \\ &\quad - 2\sqrt{\log_a b} \sqrt{\frac{1}{4} (\log_a b - \log_a a + \log_b a - \log_b b)} \\ &= \sqrt{\log_a b} \left(\sqrt{\log_a b + \frac{1}{\log_a b} + 2} - \sqrt{\log_a b + \frac{1}{\log_a b} - 2} \right) \\ &= \sqrt{\log_a b} \left(\sqrt{\frac{(\log_a b + 1)^2}{\log_a b}} - \sqrt{\frac{(\log_a b - 1)^2}{\log_a b}} \right) \\ &= |\log_a b + 1| - |\log_a b - 1|. \end{aligned}$$

Mivel $a > 1$ és $b > 1$, ezért $\log_a b > 0$, s így $A = \log_a b + 1 - |\log_a b - 1|$.

Ha $a \geq b$, akkor $\log_a b \leq 1$, s ekkor $A = \log_a b + 1 + \log_a b - 1 = 2 \log_a b$.

Ha $a < b$, akkor $\log_a b > 1$, s ekkor $A = \log_a b + 1 - \log_a b + 1 = 2$.

Az eredmény tehát felírható a következő formában:

$$A = \begin{cases} 2, & \text{ha } a < b, \\ 2 \log_a b, & \text{ha } a \geq b. \end{cases}$$

2. Ha $\log_{12} 18 = a$ és $\log_{24} 54 = b$, akkor mennyivel egyenlő $ab + 5(a - b)$?

Megoldás. Térjünk át az a és b kifejezések egy közös, mondjuk 10-es logaritmus alapjára. Ekkor

$$a = \log_{12} 18 = \frac{\log 18}{\log 12} = \frac{\log 2 + 2 \log 3}{2 \log 2 + \log 3} = \frac{x + 2y}{2x + y},$$

ahol bevezettük az új $\log 2 = x$ és $\log 3 = y$ jelöléseket. Ugyanezeket a jelöléseket használva adódik, hogy

$$b = \log_{24} 54 = \frac{\log 54}{\log 24} = \frac{3 \log 3 + \log 2}{\log 3 + 3 \log 2} = \frac{x + 3y}{3x + y}.$$

Rendezzük most a keresett kifejezést a következő módon:

$$\begin{aligned} ab + 5(a - b) &= \frac{x + 2y}{2x + y} \cdot \frac{x + 3y}{3x + y} + 5 \left(\frac{x + 2y}{2x + y} - \frac{x + 3y}{3x + y} \right) \\ &= \frac{x^2 + 5xy + 6y^2}{(2x + y)(3x + y)} + 5 \cdot \frac{3x^2 + 2y^2 - 2x^2 - 3y^2}{(2x + y)(3x + y)} \\ &= \frac{x^2 + 5xy + 6y^2 + 5x^2 - 5y^2}{(2x + y)(3x + y)} \\ &= \frac{6x^2 + 5xy + y^2}{6x^2 + 5xy + y^2} = 1. \end{aligned}$$

3. Határozzuk meg a $\log x + \log x^2 + \dots + \log x^{100} = 5050$ egyenlet valós megoldásait.

Megoldás. Végezzük el a következő ekvivalens átalakításokat:

$$\begin{aligned}\log x + \log x^2 + \dots + \log x^{100} &= 5050 \\ \log x + 2 \log x + \dots + 100 \log x &= 5050 \\ (1 + 2 + \dots + 100) \log x &= 5050 \\ \frac{100}{2}(1 + 100) \log x &= 5050 \\ \log x &= 1 \\ x &= 10.\end{aligned}$$

Az egyenlet megoldáshalmaza $M = \{10\}$.

4. Határozzuk meg a $3 \cdot 2^{\log_x(3x-2)} + 2 \cdot 3^{\log_x(3x-2)} - 5 \cdot 6^{\log_{x^2}(3x-2)} = 0$ egyenlet megoldásait.

Megoldás. A kikötések ebben az esetben a következők:

$$3x - 2 > 0 \quad \text{és} \quad x > 0 \quad \text{és} \quad x \neq 1,$$

amelyek alapján a feladat értelmezési tartománya $D = \left(\frac{2}{3}, 1\right) \cup (1, \infty)$.

Vezessük be a $\log_{x^2}(3x-2) = y$ helyettesítést, ahonnan $\log_x(3x-2) = 2y$, az eredeti egyenlet pedig ekvivalens a

$$3 \cdot 2^{2y} + 2 \cdot 3^{2y} - 5 \cdot 6^y = 0$$

exponenciális egyenlettel. Osszuk most el ezt a egyenletet a 3^{2y} kifejezéssel. Ekkor

$$3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2y} - 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^y + 2 = 0.$$

Vezessük most be a $\left(\frac{2}{3}\right)^y = t$ helyettesítést, amely a $3t^2 - 5t + 2 = 0$ másodfokú egyenlethez vezet, amelynek megoldásai $t_1 = 1$ és $t_2 = \frac{2}{3}$. Visszahelyettesítés után kapjuk, hogy

$$\left(\frac{2}{3}\right)^y = 1 \quad \text{vagy} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^y = \frac{2}{3},$$

vagyis hogy $y_1 = 0$ és $y_2 = 1$. Így adódik, hogy

$$\log_{x^2}(3x-2) = 0 \quad \text{vagy} \quad \log_{x^2}(3x-2) = 1,$$

ahonnan $3x - 2 = 1$ vagy $3x - 2 = x^2$ következik, amely egyenletek megoldásai $x_1 = 1$, amely nem eleme a D értelmezési tartománynak, illetve $x_2 = 2$ és $x_3 = 1$, ahol x_3 szintén nem eleme a D értelmezési tartománynak. Így az egyetlen megoldás az $x = 2$, az egyenlet megoldáshalmaza pedig $M = \{2\}$.

5. Oldjuk meg a $\log_2(x^2 + 2x - 7) = \frac{1}{\log_{(9-6x+x^2)} 4}$ egyenletet a valós számok halmazán.

Megoldás. Az egyenletre a következő kikötéseket tehetjük:

$$x^2 + 2x - 7 > 0 \quad \text{és} \quad x^2 + 2x - 7 \neq 1 \quad \text{és} \quad x \neq 3.$$

A fenti egyenlőtlenségrendszer teljesül, ha $x < -1 - 2\sqrt{2}$ vagy $x > -1 + 2\sqrt{2}$, de azzal a feltétellel, hogy $x \neq 2$ és $x \neq -4$ és $x \neq 3$. Az értelmezési tartomány tehát

$$D = (-\infty, -4) \cup (-4, -1 - 2\sqrt{2}) \cup (-1 + 2\sqrt{2}, 2) \cup (2, 3) \cup (3, \infty).$$

Mivel $9 - 6x + x^2 = (3 - x)^2$ és $\log_{(9-6x+x^2)} 4 = \frac{\log_2 2^2}{\log_2 (3-x)^2} = \frac{2}{\log_2 (3-x)^2}$, így az eredeti egyenlet felírható a

$$\log_2(x^2 + 2x - 7) = \frac{1}{2} \log_2(3 - x)^2$$

ekvivalens alakban, ahonnan a logaritmusfüggvény szigorú monotonitása alapján következik, hogy

$$x^2 + 2x - 7 = |3 - x|.$$

Két esetet veszünk figyelembe.

1° $x < 3$ esetén $3 - x > 0$, s így az egyenlet $x^2 + 2x - 7 = 3 - x$, azaz $x^2 + 3x - 10 = 0$, amelynek megoldása $x_1 = 2$ és $x_2 = -5$, amelyek közül x_1 nincs benne az értelmezési tartományban.

2° $x \geq 3$ esetén $3 - x \leq 0$, s így az egyenlet $x^2 + 2x - 7 = x - 3$, azaz $x^2 + x - 4 = 0$, amelynek megoldása $x_3 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$ és $x_4 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$, amelyek közül egyik se nincs benne az értelmezési tartományban.

Így a megoldáshalmaz $M = \{-5\}$.

6. Oldjuk meg a $\log_{2-x}(-x^3 + 3x^2 + 6x) \cdot \log_{-x}(2 - x) = 3$ egyenletet a valós számok halmazán.

Megoldás. Az egyenlet értelmezett, ha

$$2 - x > 0 \quad \text{és} \quad 2 - x \neq 1 \quad \text{és} \quad -x > 0 \quad \text{és} \quad -x \neq 1 \quad \text{és} \quad -x^3 + 3x^2 + 6x > 0.$$

A kapott egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmaza az egyenlet értelmezési tartománya, amely ebben az esetben $D = \left(-\infty, \frac{3 - \sqrt{33}}{2}\right)$.

Az egyenlőtlenségen végezzük el a következő ekvivalens átalakításokat:

$$\begin{aligned} \log_{2-x}(-x^3 + 3x^2 + 6x) \cdot \log_{-x}(2 - x) &= 3 \\ \log_{2-x}(-x^3 + 3x^2 + 6x) &= \frac{3}{\log_{-x}(2 - x)} \\ \log_{2-x}(-x^3 + 3x^2 + 6x) &= 3 \log_{2-x}(-x) \\ \log_{2-x}(-x^3 + 3x^2 + 6x) &= \log_{2-x}(-x^3) \\ -x^3 + 3x^2 + 6x &= -x^3 \\ 3x(x + 2) &= 0. \end{aligned}$$

Egy szorzat akkor nulla, ha legalább egyik tényezője nulla, így $x = 0$ vagy $x = -2$. Ebből a két lehetőségből a 0 nincs benne a D értelmezési tartományban, tehát az egyetlen megoldás az $x = -2$, a megoldáshalmaz pedig $M = \{-2\}$.

7. Oldjuk meg a $\log_{(3x+7)}(9 + 12x + 4x^2) + \log_{(2x+3)}(6x^2 + 23x + 21) = 4$ egyenletet a valós számok halmazán.

Megoldás. Vegyük észre, hogy $9 + 12x + 4x^2 = (2x + 3)^2$ és $6x^2 + 23x + 21 = (3x + 7)(2x + 3)$. Az értelmezési tartomány meghatározásához a kikötések:

$$3x + 7 > 0 \quad \text{és} \quad 3x + 7 \neq 1 \quad \text{és} \quad 2x + 3 > 0 \quad \text{és} \quad 2x + 3 \neq 1,$$

amelynek megoldása $x > -\frac{3}{2}$ és $x \neq -1$, ahonnan az értelmezési tartomány

$$D = \left(-\frac{3}{2}, -1\right) \cup (-1, \infty).$$

Rendezzük az adott egyenletet a

$$2\log_{(3x+7)}(2x + 3) + \log_{(2x+3)}(2x + 3) + \log_{(2x+3)}(3x + 7) = 4$$

ekvivalens alakba, majd vezessük be a $y = \log_{(3x+7)}(2x + 3)$ helyettesítést. Ekkor a $2y + 1 + \frac{1}{y} = 4$, azaz $2y^2 - 3y + 1 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek megoldásai $y_1 = 1$ és $y_2 = \frac{1}{2}$. Visszahelyettesítés után kapjuk, hogy

$$\log_{(3x+7)}(2x + 3) = 1, \quad \text{ahonnan} \quad 2x + 3 = 3x + 7, \quad \text{illetve} \quad x_1 = -4,$$

de ez a megoldás nincs benne az értelmezési tartományban. A másik esetben

$$\log_{(3x+7)}(2x + 3) = \frac{1}{2}, \quad \text{ahonnan} \quad (2x + 3)^2 = 3x + 7, \quad \text{illetve} \quad x_2 = -\frac{1}{4}, \quad x_3 = -2,$$

de a két megoldás közül x_3 nincs benne az értelmezési tartományban, így az egyenlet megoldáshalmaza $M = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$.

8. Határozzuk meg a $\log_7(6 + 7^{-x}) = x + 1$ egyenlet valós megoldásait.

Megoldás. Rendezzük az egyenletet a

$$\log_7(6 + 7^{-x}) = \log_7 7^{x+1}$$

ekvivalens alakba, ahonnan az $y = 7^x$ exponenciális függvény szigorúan monoton növekvő tulajdonságából következik, hogy

$$6 + 7^{-x} = 7^{x+1}.$$

Rendezzük a kapott exponenciális egyenletet a $7 \cdot 7^{2x} - 6 \cdot 7^x - 1 = 0$ ekvivalens alakba, majd vezessük be a $7^x = t$ helyettesítést. Ekkor a $7t^2 - 6t - 1 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek megoldásai $t_1 = 1$ és $t_2 = -\frac{1}{7}$. Mivel exponenciális kifejezést helyettesítettünk t -vel, így $t > 0$ kell legyen, ezért a t_2 megoldást kizárjuk. Ekkor

$$7^x = 1, \quad \text{ahonnan} \quad 7^x = 7^0, \quad \text{ebből pedig} \quad x = 0.$$

Az egyenlet megoldáshalmaza tehát $M = \{0\}$.

9. Határozzuk meg a $\log_3(9^x - 27) - \frac{2}{\log_2 9} = x + 1$ egyenlet megoldásait a valós számok halmazában.

Megoldás. Határozzuk meg először az egyenlet D értelmezési tartományát. A kikötés ebben az esetben az, hogy $9^x - 27 > 0$. Oldjuk meg ezt az egyenlőtlenséget.

$$\begin{aligned} 9^x - 27 > 0 &\iff 9^x > 27 \\ &\iff 3^{2x} > 3^3 \\ (f(x) = 3^x \text{ szigorúan monoton növekvő}) &\iff 2x > 3 \\ &\iff x > \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Az értelmezési tartomány a $D = \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$ intervallum. Végezzük el most az adott egyenlet ekvivalens átalakításait.

$$\begin{aligned} \log_3(9^x - 27) - \frac{2}{\log_2 9} = x + 1 &\iff \log_3(9^x - 27) - \log_3 2 = \log_3 3^{x+1} \\ &\iff \log_3 \frac{9^x - 27}{2} = \log_3 3^{x+1} \\ (f(x) = \log_3 x \text{ szigorúan monoton}) &\iff \frac{9^x - 27}{2} = 3^{x+1} \\ &\iff 9^x - 27 = 2 \cdot 3^{x+1} \\ &\iff (3^x)^2 - 6 \cdot 3^x - 27 = 0. \end{aligned}$$

A $3^x = t$ helyettesítés után a $t^2 - 6t - 27 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek gyökei $t_1 = -3$ és $t_2 = 9$. Visszahelyettesítés után a

$$3^x = -3 \quad \text{és} \quad 3^x = 9$$

exponenciális egyenleteket kapjuk, amelyek közül csak az $3^x = 9$ egyenletnek van valós megoldása, ez pedig $x = 2$. Mivel $2 \in D$, így ez a megoldás benne van az értelmezési tartományban, s az egyenlet megoldáshalmaza $M = \{2\}$.

10. Oldjuk meg a $\frac{1}{\sqrt{3x-5}} = (3x-5)^{\log_{\frac{1}{25}}(2+5x-x^2)}$ logaritmikus egyenletet.

Megoldás. Írjuk fel az egyenlet bal oldalát hatvány formájában. Ekkor

$$(3x-5)^{-\frac{1}{2}} = (3x-5)^{\log_{\frac{1}{25}}(2+5x-x^2)}.$$

Ha $3x-5 = 1$, akkor $x = 2$. Ha viszont $3x-5 > 0$ és $3x-5 \neq 1$, azaz $x > \frac{5}{3}$ és $x \neq 2$, akkor az exponenciálisfüggvény szigorú monotonitása miatt kiegyenlíthetők a kitevők, s így a

$$\log_{5^{-2}}(2+5x-x^2) = -\frac{1}{2}, \quad \text{majd} \quad \log_5(2+5x-x^2) = 1$$

ekvivalens logaritmikus egyenletet kapjuk. A kapott egyenletből a logaritmus definíciója alapján $2+5x-x^2 = 5$, ahonnan az $x^2 - 5x + 3 = 0$ másodfokú egyenletet nyerjük,

ennek megoldásai pedig $x_1 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \approx 4,3$ és $x_2 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \approx 0,7$. Mivel az $x > \frac{5}{3}$ feltételt csak x_1 elégíti ki, így az adott egyenlet megoldáshalmaza

$$M = \left\{ 2, \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \right\}.$$

11. Határozzuk meg a $\log_{\sqrt{2} \sin x} (1 + \cos x) = 2$ logaritmusos egyenlet megoldáshalmazát.

Megoldás. Az egyenlet értelmezett, ha

$$\sin x > 0 \quad \text{és} \quad \sin x \neq 1 \quad \text{és} \quad 1 + \cos x > 0,$$

illetve ha $x \in \left(0 + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$ így az egyenlet értelmezési tartománya

$$D = \left(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

A logaritmus definíciója alapján az adott egyenletből a

$$\left(\sqrt{2} \sin x\right)^2 = 1 + \cos x$$

trigonometrikus egyenletet nyerjük, amelynek ekvivalens alakja

$$2 \sin^2 x = 1 + \cos x, \quad \text{illetve} \quad 2 - 2 \cos^2 x = 1 + \cos x.$$

A kapott egyenletből a $\cos x = t$ helyettesítés alkalmazásával a $2t^2 + t - 1 = 0$ másodfokú egyenlet adódik, amelynek megoldásai $t_1 = \frac{1}{2}$ és $t_2 = -1$.

Visszahelyettesítés után a

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad \cos x = -1$$

trigonometrikus egyenleteket kapjuk. Az első egyenlet megoldásai $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ és $x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, de ebből x_2 nem fogadható el, mert a $\sin x > 0$ feltétel miatt nincs benne az értelmezési tartományban. A második egyenlet ekvivalens az $1 + \cos x = 0$ egyenlettel, amelynek megoldásait szintén kizártuk az értelmezési tartományból.

Az eredeti egyenlet megoldáshalmaza tehát $M = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$.

12. Keressük meg a $3^{(\log_3 x)^2} + x^{\log_3 x} = 162$ logaritmusos egyenlet megoldásait.

Megoldás. Az egyenlet a következő ekvivalens átalakításokkal oldható meg:

$$\begin{aligned} 3^{(\log_3 x)^2} + x^{\log_3 x} = 162 &\iff 3^{\log_3 x \cdot \log_3 x} + x^{\log_3 x} = 162 \\ &\iff \left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = 162 \\ &\iff x^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = 162 \\ &\iff 2 \cdot x^{\log_3 x} = 162 \\ &\iff x^{\log_3 x} = 81. \end{aligned}$$

Logaritmáljuk most a kapott egyenlet mindkét oldalát 3-as alapú logaritmussal. Ekkor a következő ekvivalens átalakítások vezetnek a megoldáshoz:

$$\begin{aligned} x^{\log_3 x} = 81 &\iff \log_3 x^{\log_3 x} = \log_3 81 \\ &\iff \log_3 x \cdot \log_3 x = 4 \\ &\iff (\log_3 x)^2 = 4 \\ &\iff \log_3 x = 2 \quad \text{vagy} \quad \log_3 x = -2. \end{aligned}$$

A most kapott logaritmusos egyenletek megoldásai $x_1 = 9$ és $x_1 = \frac{1}{9}$. Az egyenlet akkor értelmezett, ha $x > 0$, tehát mindkét megoldás elfogadható.

Az eredeti egyenlet megoldáshalmaza tehát $M = \left\{ \frac{1}{9}, 9 \right\}$.

13. Oldjuk meg a $\log_{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{1}{2} \right) + \log_{\frac{1}{2}} (x - 1) \geq 1$ logaritmusos egyenlőtlenséget.

Megoldás. Az egyenlőtlenség értelmezett, ha

$$x - \frac{1}{2} > 0 \quad \text{és} \quad x - 1 > 0, \quad \text{illetve} \quad x > \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad x > 1$$

teljesül. Az értelmezési tartomány tehát a $D = (1, \infty)$ intervallum.

Alakítsuk át az adott egyenlőtlenséget a következő ekvivalens formára:

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{1}{2} \right) (x - 1) \geq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}.$$

Felhasználva az $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ függvény szigorú monotonitási tulajdonságát kapjuk az

$$x^2 - x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}, \quad \text{illetve} \quad x^2 - \frac{3}{2}x \leq 0$$

másodfokú egyenlőtlenséget, amelynek megoldása az $M_1 = \left[0, \frac{3}{2} \right]$ zárt intervallum.

Figyelembe véve az eredeti egyenlőtlenség értelmezési tartományát adódik, hogy a megoldáshalmaz

$$M = M_1 \cap D = \left[0, \frac{3}{2} \right] \cap (1, \infty) = \left(1, \frac{3}{2} \right].$$

14. Határozzuk meg a $(\log_5 (6 - x))^2 + 2 \log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} (6 - x) + \log_3 27 \geq 0$ logaritmusos egyenlőtlenség megoldáshalmazát.

Megoldás. Az egyenlőtlenség értelmezett, ha $6 - x > 0$, tehát az értelmezési tartomány a $D = (-\infty, 6)$ nyitott intervallum.

Mivel $\log_3 27 = 3$, így az 5-ös alapú logaritmusra hozás után a

$$(\log_5 (6 - x))^2 + 2 \frac{\log_5 (6 - x)}{-\frac{1}{2}} + 3 \geq 0, \quad \text{azaz} \quad (\log_5 (6 - x))^2 - 4 \log_5 (6 - x) + 3 \geq 0$$

ekvivalens egyenlőtlenséget kapjuk, amelyben $\log_5(6-x) = t$ helyettesítést alkalmazva adódik a $t^2 - 4t + 3 \geq 0$ másodfokú egyenlőtlenség, amelynek megoldása a $t \leq 1$ vagy $t \geq 3$ valós számok. Visszahelyettesítés után kapjuk a

$$\log_5(6-x) \leq 1 \quad \text{vagy} \quad \log_5(6-x) \geq 3,$$

illetve némi átalakítás után a

$$\log_5(6-x) \leq \log_5 5 \quad \text{vagy} \quad \log_5(6-x) \geq \log_5 125$$

logaritmusos egyenlőtlenségeket. Az $f(x) = \log_5 x$ függvény szigorú monotonitási tulajdonságából következik, hogy a megfelelő függvény argumentumokra is ugyanazok a relációk érvényesek, azaz felírható, hogy

$$6-x \leq 5 \quad \text{vagy} \quad 6-x \geq 125, \quad \text{illetve} \quad x \geq 1 \quad \text{vagy} \quad x \leq -119.$$

Ez azt jelenti, hogy a megoldások az $M_1 = (-\infty, -119] \cup [1, \infty)$ intervallumban levő számok. Figyelembe véve az adott egyenlőtlenség értelmezési tartományát, a megoldáshalmaz

$$M = M_1 \cap D = ((-\infty, -119] \cup [1, \infty)) \cap (-\infty, 6) = (-\infty, -119] \cup [1, 6).$$

15. Keressük meg a $\log_x \frac{62x^2 - 35x + 6}{35 - 6x} \geq 3$ logaritmusos egyenlőtlenség megoldásait.

Megoldás. Az egyenlőtlenség értelmezett, ha

$$x > 0 \quad \text{és} \quad x \neq 1 \quad \text{és} \quad \frac{62x^2 - 35x + 6}{35 - 6x} > 0.$$

Mivel $62x^2 - 35x + 6 > 0$ minden $x \in \mathbf{R}$ esetén (az $f(x) = 62x^2 - 35x + 6$ függvénynek nincsenek valós gyökei, mert a megfelelő másodfokú egyenlet diszkriminánsa negatív, viszont az adott parabolának minimuma van, így minden valós x esetén szigorúan pozitív), ezért a harmadik egyenlőtlenség igaz, ha

$$35 - 6x > 0, \quad \text{vagyis} \quad x < \frac{35}{6},$$

így az adott egyenlőtlenség értelmezési tartománya:

$$D = (0, 1) \cup \left(1, \frac{35}{6}\right).$$

Írjuk fel az adott egyenlőtlenséget a

$$\log_x \frac{62x^2 - 35x + 6}{35 - 6x} \geq \log_x x^3$$

ekvivalens alakban, majd a továbbiakban tekintsünk két esetet:

1. eset. Ha $x > 1$, akkor felírható a

$$\frac{62x^2 - 35x + 6}{35 - 6x} \geq x^3, \quad \text{illetve} \quad \frac{62x^2 - 35x + 6}{35 - 6x} - x^3 \geq 0$$

ekvivalens egyenlőtlenség. Rendezés után nyerjük a

$$\frac{6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6}{35 - 6x} \geq 0$$

egyenlőtlenséget. Mivel a $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$ szimmetrikus egyenlet megoldásai az $\left\{\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3\right\}$ halmaz elemei, így az egyenlőtlenség

$$\frac{6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 2)(x - 3)}{35 - 6x} \geq 0$$

ekvivalens alakban is felírható, melynek táblázatos módszerrel kapott megoldásai a $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 2\right] \cup \left[3, \frac{35}{6}\right]$ intervallum elemei.

Figyelembe véve az értelmezési tartományt és az $x > 1$ feltételt, a megoldáshalmaz ebben az esetben:

$$M_1 = (1, 2] \cup \left[3, \frac{35}{6}\right].$$

2. eset. Ha $0 < x < 1$, akkor felírható a

$$\frac{62x^2 - 35x + 6}{35 - 6x} \leq x^3, \quad \text{illetve} \quad \frac{62x^2 - 35x + 6}{35 - 6x} - x^3 \leq 0$$

ekvivalens egyenlőtlenség. Az 1. esettel analóg módon rendezés után nyerjük a

$$\frac{6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6}{35 - 6x} \leq 0$$

egyenlőtlenséget, amely a

$$\frac{6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 2)(x - 3)}{35 - 6x} \geq 0$$

ekvivalens alakban is felírható. Táblázatos módszerrel a kapott egyenlőtlenség megoldásai a $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \cup [2, 3] \cup \left[\frac{35}{6}, \infty\right)$ intervallum elemei.

Figyelembe véve az értelmezési tartományt és a $0 < x < 1$ feltételt, a megoldáshalmaz ebben az esetben:

$$M_2 = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right].$$

Az eredeti egyenlőtlenség megoldáshalmaza tehát

$$M = M_1 \cup M_2 = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \cup (1, 2] \cup \left[3, \frac{35}{6}\right].$$

16. Az a valós paraméter mely értékeire lesz igaz az

$$1 - \log_{\frac{1}{7}}(x^2 + 1) \geq \log_7(ax^2 + 4x + a)$$

egyenlőtlenség minden x valós számra?

Megoldás. Az egyenlőtlenség értelmezett, ha igaz az $ax^2 + 4x + a > 0$ egyenlőtlenség, amely pontosan akkor igaz, ha a főegyütthatóra $a > 0$, a diszkriminánsra pedig $16 - 4a^2 < 0$, azaz $4 - a^2 < 0$ teljesül. Az így kapott egyenlőtlenségrendszer megoldása a $(2, \infty)$ intervallum, ezért a feladat értelmezési tartománya $D = (2, \infty)$.

Az egyenlőtlenségen végezzük el a következő ekvivalens átalakításokat:

$$\begin{aligned} 1 - \log_{\frac{1}{7}}(x^2 + 1) &\geq \log_7(ax^2 + 4x + a) \\ \log_7 7 + \log_7(x^2 + 1) &\geq \log_7(ax^2 + 4x + a) \\ \log_7(7x^2 + 7) &\geq \log_7(ax^2 + 4x + a) \\ (f(x) = \log_7 x \text{ szig. mon. növekvő}) \quad 7x^2 + 7 &\geq ax^2 + 4x + a \\ (7 - a)x^2 - 4x + (7 - a) &\geq 0. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $7 - a > 0$ és $16 - 4(7 - a)^2 \leq 0$. A kapott egyenlőtlenségrendszer megoldása a $(-\infty, 7)$ és $(-\infty, 5] \cup [9, \infty)$ intervallumok metszete, azaz a $(-\infty, 5]$ intervallum. A kapott intervallum és az értelmezési tartomány metszete adja a megoldáshalmazt, azaz

$$M = D \cap (-\infty, 5] = (2, 5].$$

17. A p valós paraméter mely értékeire lesz a

$$\left(2 - \log_2 \frac{p}{p+1}\right)x^2 + 2\left(1 + \log_2 \frac{p}{p+1}\right)x - 2\left(1 + \log_2 \frac{p}{p+1}\right) > 0$$

egyenlőtlenség igaz minden $x \in \mathbf{R}$ esetén?

Megoldás. Vezessük be a $\log_2 \frac{p}{p+1} = t$ helyettesítést. Az egyenlőtlenség igaz, ha az $y = (2 - t)x^2 + 2(1 + t)x - 2(1 + t)$ parabolára teljesül, hogy a főegyütthatója pozitív, a diszkriminánsa pedig negatív, azaz

$$2 - t > 0 \quad \text{és} \quad 4(1 + t)^2 + 8(2 - t)(1 + t) < 0.$$

A fenti egyenlőtlenségrendszer ekvivalens a

$$2 - t > 0 \quad \text{és} \quad (1 + t)(5 - t) < 0$$

egyenlőtlenségrendszerrel, amelynek megoldáshalmaza a $(-\infty, -1)$ intervallum.

Most még teljesülnie kell a $\log_2 \frac{p}{p+1} < -1$ egyenlőtlenségnek, amely ekvivalens a

$0 < \frac{p}{p+1} < \frac{1}{2}$, illetve $p(p+1) > 0$ és $p^2 - 1 < 0$ egyenlőtlenségrendszerrel. A megoldáshalmaz most a $(0, 1)$ intervallum, vagyis $0 < p < 1$.

18. Az m valós paraméter mely értékeire lesz $y < 0$ minden $x \in \mathbf{R}$ esetén, ha

$$y = \left(\log_{\frac{1}{3}} \frac{m-1}{m+1} - 2 \right) x^2 - 2 \left(2 + \log_{\frac{1}{3}} \frac{m-1}{m+1} \right) x + 2 + \log_{\frac{1}{3}} \frac{m-1}{m+1}.$$

Megoldás. Vezessük be a $\log_{\frac{1}{3}} \frac{m-1}{m+1} = t$ helyettesítést.

Az $y < 0$ egyenlőtlenség minden x valós számra teljesül, ha az

$$f(x) = (t-2)x^2 - 2(2+t)x + (2+t)$$

másodfokú polinom főegyütthatója és diszkriminánsa is negatív, azaz ha

$$t-2 < 0 \quad \text{és} \quad 4(2+t)^2 - 4(t-2)(t+2) < 0.$$

A fenti egyenlőtlenségrendszer ekvivalens a $t-2 < 0$ és $2+t < 0$ egyenlőtlenségrendszerrel, amelynek megoldáshalmaza a $(-\infty, -2)$ intervallum.

Most teljesülnie kell a $\log_{\frac{1}{3}} \frac{m-1}{m+1} < -2$ egyenlőtlenségnek, amely ekvivalens az $\frac{m-1}{m+1} > 0$ és $\frac{m-1}{m+1} > \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ egyenlőtlenségrendszerrel, amely az $\frac{m-1}{m+1} > 9$ egyenlőtlenséggel ekvivalens.

A kapott egyenlőtlenség megoldáshalmaza a $\left(-\frac{5}{4}, -1\right)$ intervallum.

19. Oldjuk meg a következő logaritmusos egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 8^{\log_9(x-4y)} &= 1, \\ 4^{x-2y} - 7 \cdot 2^{x-2y} &= 8. \end{aligned}$$

Megoldás. Az egyenletrendszer értelmezett, ha $x+4y > 0$, illetve ha $x > 4y$.

Az első egyenlet felírható $8^{\log_9(x-4y)} = 8^0$ alakban, ahonnan az $f(x) = 8^x$ exponenciális függvény szigorú monotonitása alapján kiegyenlíthetők a hatványkitevők, azaz felírható, hogy $\log_9(x-4y) = 0$, vagyis $\log_9(x-4y) = \log_9 1$. Most az $f(x) = \log_9 x$ logaritmus függvény szigorú monotonitása alapján egyenlíthetők ki a megfelelő logaritmusok argumentumai, azaz felírható, hogy $x-4y = 1$, ahonnan $x = 1 + 4y$. A kapott kifejezést behelyettesítve a rendszer második egyenletébe adódik a

$$4^{1+4y-2y} - 7 \cdot 2^{1+4y-2y} - 8 = 0, \quad \text{illetve} \quad 4^{2y+1} - 7 \cdot 2^{2y+1} - 8 = 0$$

exponenciális egyenlet. A $2^{2y+1} = t$ helyettesítés bevezetésével a $t^2 - 7t - 8 = 0$ másodfokú egyenletet nyerjük, amelynek megoldásai $t_1 = -1$ és $t_2 = 8$.

Visszahelyettesítés után a $2^{2y+1} = -1$ egyenletnek nincs megoldása, míg a $2^{2y+1} = 8$ egyenletből $2y+1 = 3$, illetve $y = 1$ következik, ahonnan $x = 5$.

Az $(5; 1)$ rendezett pár eleget tesz az $x > 4y$ feltételnek, így az egyenletrendszer megoldáshalmaza

$$M = \{(5; 1)\}.$$

20. Adjuk meg a következő logaritmusos egyenletrendszer megoldáshalmazát:

$$\begin{aligned}y \cdot x^{\log_y x} &= x^{\frac{5}{2}}, \\ \log_4 y \cdot \log_y(3x - y) &= 1.\end{aligned}$$

Megoldás. Az egyenletrendszer értelmezett, ha

$$x > 0 \quad \text{és} \quad y > 0 \quad \text{és} \quad y \neq 1 \quad \text{és} \quad 3x - y > 0.$$

Logaritmáljuk az első egyenlet mindkét oldalát y alapon, majd hozzuk közös logaritmusra a második egyenlet bal oldalát. Ekkor a következő ekvivalens egyenletrendszereket kapjuk:

$$\begin{aligned}\log_y y + \log_y x^{\log_y x} &= \log_y x^{\frac{5}{2}}, \\ \frac{1}{\log_y 4} \cdot \log_y(3x - y) &= 1, \\ \hline 1 + \log_y x \cdot \log_y x &= \frac{5}{2} \log_y x, \\ \log_y(3x - y) &= \log_y 4, \\ \hline (\log_y x)^2 - \frac{5}{2} \log_y x + 1 &= 0, \\ 3x - y &= 4,\end{aligned}$$

ahol az utolsó lépésben felhasználtuk az $f(x) = \log_y x$ logaritmus függvény szigorú monotonitási tulajdonságát. Alkalmazzuk az első egyenletben a $\log_y x = t$ helyettesítést, a másodikból pedig fejezzük ki y -t. Ekkor $y = 3x - 4$, a kapott másodfokú egyenlet pedig $2t^2 - 5t + 2 = 0$, amelynek gyökei $t_1 = 2$ és $t_2 = \frac{1}{2}$. Visszahelyettesítés után a

$$\log_y x = 2 \quad \text{és} \quad \log_y x = \frac{1}{2}$$

logaritmusos egyenleteket kapjuk, ahonnan az $x = y^2$ és $x = \sqrt{y}$ egyenletek, ezek segítségével pedig két lineáris egyenletrendszer nyerhető. Ezek közül az első

$$y = 3x - 4, \quad x = y^2.$$

Behelyettesítve a második egyenletet az elsőbe adódik a $3y^2 - y - 4 = 0$ másodfokú egyenlet, amelynek megoldásai $y_1 = -1$ és $y_2 = \frac{4}{3}$, megfelelő párjaik pedig $x_1 = 1$ és $x_2 = \frac{16}{9}$. Az $(1, -1)$ rendezett pár nem tesz eleget az $y > 0$ feltételnek, tehát ez nem megoldás. A $\left(\frac{16}{9}, \frac{4}{3}\right)$ rendezett pár megoldása az egyenletrendszernek.

A második egyenletrendszer:

$$y = 3x - 4, \quad x = \sqrt{y},$$

s ennek nincs valós megoldása. Az eredeti egyenletrendszer megoldáshalmaza tehát

$$M = \left\{ \left(\frac{16}{9}, \frac{4}{3} \right) \right\}.$$

9. Kombinatorika

9.1. Kombinatorikai alapfogalmak

A kombinatorika, noha az általa tárgyalt problémák között egészen egyszerűek is akadnak, viszonylag későn jelent meg a matematikában. A matematikatörténet az első művelői között Pierre Fermat-t (1601–1665) és Blaise Pascalt (1623–1662) említi, akik valószínűség-számítási problémák részeként foglalkoztak kombinatorikával. A XX. század hozta meg a kombinatorika számára azt az áttörést, amelynek révén a matematika egyik dinamikusan fejlődő ágává vált. Ma már nem csak a valószínűség-számítás támaszkodik a kombinatorikára (lásd kombinatorikus valószínűség), hanem a matematika más ágai is.

Az általános iskolában tanult matematikában már megjelentek olyan problémák, amelyek a kombinatorika témakörébe tartoznak. E fejezet célja, hogy az alapvető kombinatorikai fogalmakat megalapozza, és a hozzájuk fűződő problémáknak egy rendszerezését adja. A legtöbb kombinatorikai probléma egy véges elemszámú halmaz valahány elemének a kiválasztásáról szól valamilyen feltételek között. Ilyen problémákat fogunk tárgyalni a következőkben.

9.1.1. Logikai szita

9.1. Példa. Keresztespók iskolát nyitott a kispókoknak a fűzfa egyik ágán. Légyfogásból és pókhálószővésből lehet leckét venni tőle. 7 kispók jár a légyfogásórára, 9 pedig a pókhálószővésre. Csak négyen vannak, akik mindkét órán részt vesznek. Hány tanítványa van Keresztespóknak, ha a kispókok közül mindegyik jár valamilyen órára?

Egyik fajta órára 7-en, a másik fajta órára 9-en járnak. A kettő összege 16, de most kétszer számoltuk azokat, akik mindkét órára járnak, ezért négyet ki kell vonnunk a 16-ból. Összesen 12 kispók jár Keresztespók iskolájába.

A fenti feladat nem a nehézsége miatt érdekes. Ha A -val jelöljük a légyfogást tanulók halmazát és B -vel a pókhálószővést tanulókét, akkor a feladat az $A \cup B$ halmaz számosságára kérdez rá. Ekkor a bevezetett halmazjelöléseket alkalmazva számításunkat így írhatjuk:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

A fenti gondolkodásmód alapján belátható a következő tétel:

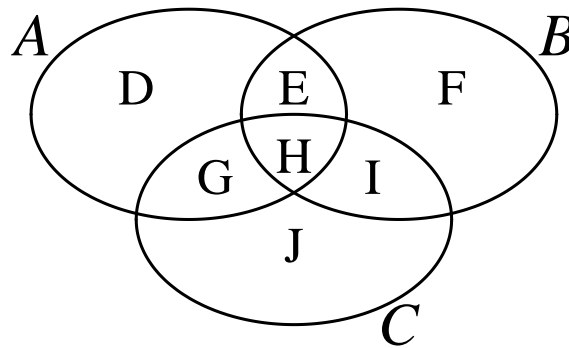
9.1. Tétel. *Legyen A és B két véges halmaz. Ekkor uniójuk elemszáma*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Nézzük a következő példát, amelyben azt vizsgáljuk, hogy vajon hogyan módosul a képlet három halmaz esetén.

9.2. Példa. Egy régebbi felmérés során 100 embert megkérdeztek, hogy milyen forrásból szerzi a híreket. A következő válaszokat adták: tévéből 35, rádióból 38, újságból 39, tévéből és rádióból 20, tévéből és újságból 20, rádióból és újságból 9, tévéből, rádióból és újságból 6. Hányan vannak, akik a felsoroltak közül egyik forrásból sem szerzik a híreket? (A felmérés készítésekor internet még nem volt.)

Jelöljük a tévéből tájékozódók halmazát A -val, a rádióból tájékozódókét B -vel, az újságból tájékozódókét C -vel. Ha ismernénk az $A \cup B \cup C$ számosságát, akkor azt 100-ból kivonva megkapnánk a feltett kérdésre a választ. Számoljuk hát meg $A \cup B \cup C$ elemeit! A feladat szövegét átolvasva és a bevezetett jelöléseket figyelembe véve láthatjuk, hogy az $A, B, C, A \cap B, A \cap C, B \cap C, A \cap B \cap C$ halmazok számosságát ismerjük, ezeknek a segítségével kellene kifejeznünk a három halmaz unióját. Először jelöljük meg a keletkező diszjunkt halmazrészeket az ábra szerint.



Az ábra alapján fennáll a következő egyenlőség:

$$\begin{aligned} |A| + |B| + |C| &= (|D| + |E| + |G| + |H|) + (|E| + |F| + |H| + |I|) + (|G| + |H| + |I| + |J|) = \\ &= |D| + 2|E| + |F| + 2|G| + 3|H| + 2|I| + |J|. \end{aligned}$$

Látjuk, hogy az összeg nem a kívánt eredményt adja, mert egyes halmazok többször is szerepelnek az összegben, és így a bennük lévő elemeket többször is megszámoltuk. Próbáljuk meg az összegben résztvevő E, G, H és I halmazok számát csökkenteni a következő módon:

$$\begin{aligned} |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| &= (|D| + |E| + |G| + |H|) + \\ &+ (|E| + |F| + |H| + |I|) + (|G| + |H| + |I| + |J|) - (|E| + |H|) - (|H| + |G|) - (|H| + |I|) = \\ &= |D| + |E| + |F| + |G| + |I| + |J|. \end{aligned}$$

Jó úton járunk, hisz ebben az összegben minden halmaz pontosan egyszer szerepel, csak éppen hiányzik a H halmaz számossága. Ezen könnyen segíthetünk, mert az éppen a három halmaz metszete, amelynek számosságát megadták a feladatban. Így összeállt a következő képlet:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

A háromféle hírforrásból tehát a 100 megkérdezett közül összesen

$$65 + 38 + 39 - 20 - 20 - 9 + 6 = 99$$

fő tájékozódik, tehát egyetlen ember van, aki nem néz tévét, nem hallgat rádiót és nem olvas újságot sem.

A fentiek alapján felírható a következő tétel:

9.2. Tétel. *Legyenek A , B és C véges halmazok. Ekkor uniójuk elemszáma*

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Ha a 9.2. Példa által említett kutatást ma végeznék, akkor az internethasználókkal is számolni kellene, tehát nem három, hanem négy halmazunk lenne. Foglaljuk össze eddigi tudásunkat és fogalmazzuk meg hogyan alakulna a képlet ebben az esetben.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

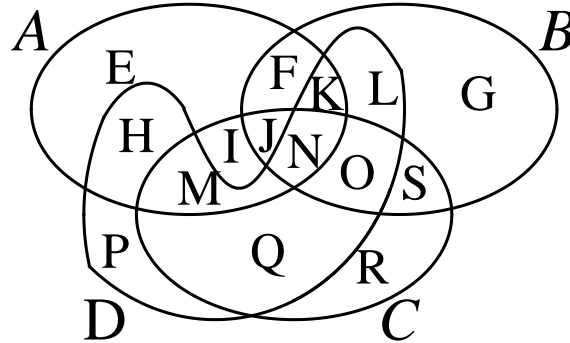
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Keressük, hogy mennyi $|A \cup B \cup C \cup D|$.

9.3. Tétel. *Legyenek A , B , C és D véges halmazok. Ekkor uniójuk elemszáma*

$$|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D|.$$

Bizonyítás. A háromhalmazos esethez hasonlóan itt is vezessünk be újabb jelöléseket az ábra szerint:



A tételben szereplő egyenlet bal és jobb oldalát felbontva az ábra szerinti diszjunkt halmazokra, azt kapjuk, hogy a két oldal egyenlő. \diamond

A 9.1. Tételben, a 9.2. Tételben és a 9.3. Tételben szereplő képleteket szitaformulának nevezzük. Bizonyítás nélkül megfogalmazzuk a szitaformula általánosítását:

9.4. Tétel. *Legyenek az A_1, A_2, \dots, A_n halmazok végesek. Ekkor az uniójuk számossága:*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|.$$

A bal oldalt is lehet rövidebben írni: $\bigcup_{i=1}^n A_i$.

A tételben szereplő formula jobb oldalán a $\sum_{i=1}^n |A_i|$ kifejezés összegezi az A_i halmazok elemszámát, a $\sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j|$ kifejezés szerint össze kell adni az összes olyan halmaz elemszámát, amelyek két halmaz metszeteként állnak elő, a $\sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k|$ kifejezés az összes olyan halmaz elemszámának az összege, amely előáll három halmaz metszeteként, és így tovább.

Ha a tételben szereplő halmazok páronként diszjunktak, azaz minden $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ és $i \neq j$ esetén $A_i \cap A_j = \emptyset$, akkor a tételben szereplő összegzések közül csak az első lesz nullától különböző, azaz

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^n |A_i|.$$

Ezt az összefüggést *összeadási szabálynak* szokták nevezni. Vegyük észre, hogy az összeadási szabály tulajdonképpen azt a nyilvánvaló eljárást igazolja, hogy egy halmaz elemeinek a megszámlálásakor a halmaz elemeit csoportosítva először a keletkező csoportok számosságát állapítjuk meg, majd ezeket a részösszegeket összegezve kapjuk meg a halmaz számosságát.

9.1.2. Permutáció

9.3. Példa. Egy irodalmi esten 5 vers hangzik el. Hányféleképpen követhetik a versek egymást?

Jelöljük a verseket A -val, B -vel, C -vel, D -vel és E -vel. (A feladat most úgy is megfogalmazható, hogy az $ABCDE$ betűknek hányféle sorrendje van). Az első vers az öt közül lehet bármelyik. A lehetséges esetek:

A ____, B ____, C ____, D ____, E _____.

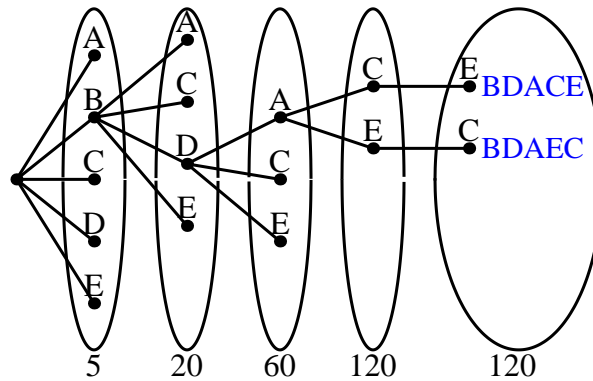
Az A — esetben az A vers után következhet a B , a C , a D és az E is, tehát négyféle folytatás lehetséges. Mivel mind az öt esetben négy folytatás lehetséges, így a lehetőségek száma $5 \cdot 4 = 20$.

$$\begin{array}{ccccc} AB___, & BA___, & CA___, & DA___, & EA___. \\ AC___, & BC___, & CB___, & DB___, & EB___. \\ AD___, & BD___, & CD___, & DC___, & EC___. \\ AE___, & BE___, & CE___, & DE___, & ED___. \end{array}$$

Határozzuk meg most azt a verset, amely harmadikként hangzik el. Vegyük az $AB_$ esetet. Nyilvánvaló, hogy $ABC_$, $ABD_$ és $ABE_$ egyaránt lehetséges, vagyis a fenti 20 eset mindegyike háromféleképpen folytatható. Vagyis az első három vers $20 \cdot 3 = 60$ lehetséges sorrendben tűzhető műsorra.

Térjünk most rá a negyedik versre. Az eddigi 60 lehetőségből válasszunk ki egyet. Legyen ez az $ABC_$ sorrend. Ez kétféleképpen folytatható: $ABCD_$ vagy $ABCE_$. Igaz ez mind a 60 esetre, így az első négy vers lehetséges sorrendje $60 \cdot 2 = 120$. Ha az első négy verset meghatároztuk, akkor ötödiknek csak az egyetlen eddig ki nem jelölt verset tehetjük, így a lehetőségek száma tovább már nem szaporodik.

A fenti gondolatmenetet jól szemlélteti az alábbi gráf:



A jobb szélső halmaz elemszámát kellene megállapítanunk. A rajzon is jól nyomonkövethető, hogy az első verset 5 versből választhatjuk ki, így az első két versnek $5 \cdot 4$, az első háromnak $5 \cdot 4 \cdot 3$, az első négynek $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$, az öt versnek pedig $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ lehetséges sorrendet jelölhetünk ki az irodalmi estre.

Mivel az $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ típusú szorzat gyakran elő fog fordulni, ezért célszerű egy külön jelölést bevezetni rá.

9.1. Definíció. A pozitív egész számok szorzatát 1-től n -ig „ n faktoriális”-nak nevezzük, és így jelöljük: $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = n!$. Definíció szerint $0! = 1$.

A 9.3. Példa valójában egy ötelemű halmaz elemei lehetséges sorrendjeinek a megszámlálásáról szól. A továbbiakban n mindig egy pozitív egészet jelöl.

9.2. Definíció. Egy n -elemű halmaz elemeinek egy lehetséges sorrendjét permutációnak nevezzük.

9.5. Tétel. n különböző elem összes permutációjának a száma $n!$. Jele: P^n .

Bizonyítás. Teljes indukcióval. Ha $n = 1$, azaz a halmaz egyelemű, akkor valóban elemeinek sorbarendezésére egyetlen lehetőség van. Tegyük föl, hogy $n = k$ esetén $k!$ sorrend létezik. Bizonyítsuk a tétel állítását $n = k + 1$ -re.

Vegyük a halmaz első k elemének egy konkrét sorrendjét: $A_1 A_2 A_3 \dots A_k$. A $k + 1$. elem hozzávételével éppen $k + 1$ sorrendet tudunk előállítani a következő módon:

$$\begin{array}{cccccc}
 A_{k+1} & A_1 & A_2 & \dots & A_{k-1} & A_k \\
 A_1 & A_{k+1} & A_2 & \dots & A_{k-1} & A_k \\
 A_1 & A_2 & A_{k+1} & \dots & A_{k-1} & A_k \\
 \vdots & & & & & \\
 A_1 & A_2 & \dots & A_{k+1} & A_{k-1} & A_k \\
 A_1 & A_2 & \dots & A_{k-1} & A_{k+1} & A_k \\
 A_1 & A_2 & \dots & A_{k-1} & A_k & A_{k+1}
 \end{array}$$

Tehát k elem egy adott sorrendjéből $k+1$ új sorrend lesz, k elem pedig $k!$ sorrendben helyezhető el, így $k + 1$ elemnek $k! \cdot (k + 1) = (k + 1)!$ permutációja létezik. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. \diamond

A $0! = 1$ megállapodást is erősíti a fenti tétel, mert 0 darab elem egyféleképpen helyezhető sorrendbe: sehogyan sem. A tétel bizonyításában rejlő gondolat az $n!$ rekurzív definiálásának a lehetőségét is tartalmazza: Legyen $1! = 1$, és ha $n > 1$, akkor $n! = (n - 1) \cdot n$. A $0! = 1$ eset itt is külön kezelendő.

Végezetül tekintsük a permutáció egy különleges fajtáját.

9.4. Példa. Tegyük föl, hogy a 9.3. Példa szerinti öt verset szavaló diákat egy kerekasztalhoz szeretnénk leültetni. A kerekasztal ülésrendjében nem különböztetjük meg azokat, amelyekben minden személynek ugyanaz a jobb és a bal oldali szomszédja. Látjuk tehát, hogy bizonyos sorrendek, amelyek a versek elhangzásakor különbözőknek számítanak, a kerekasztalnál nem különböznek. Például az $ABCDE$ és az $EABCD$ sorrend az irodalmi esten különbözik, a kerekasztalnál nem, mert olyan, mintha mindenki a saját jobb oldali szomszédjának a helyére ülne át, azaz a szomszédsági viszonyok nem változnak. Ezek szerint az $5! = 120$ lehetőség többszöröse a kerekasztalnál létező össz ülésrendek számánál. Figyeljük meg, hogy az

$$ABCDE, \quad EABCD, \quad DEABC, \quad CDEAB \text{ és } BCDEA$$

sorrendek a kerekasztal ülésrendjében azonosak, tehát az $5!$ éppen ötszöröse a keresett számnak, ezért 5 ember egy kerekasztalhoz

$$\frac{5!}{5} = \frac{120}{5} = 20$$

lehetséges módon ültethető le.

9.1. Megjegyzés. A fenti permutációt *ciklikus permutációnak* nevezzük. n elem *ciklikus permutációinak a száma*

$$\frac{n!}{n}.$$

A szorzási szabály

A 9.3. Példa szerint olyan rendezett (a, b, c, d, e) ötösöket kell összeszámlálnunk, amelyeknek az első tagja egy ötelemű, a második tagja egy négyelemű, a harmadik tagja egy háromelemű, a negyedik tagja egy kételemű, az ötödik tagja pedig egy egyelemű halmazból kerül ki, azaz a $A \times B \times C \times D \times E$ halmaz számosságát keressük, ahol $|A| = 5$, $|B| = 4$, $|C| = 3$, $|D| = 2$, $|E| = 1$. A feladat megoldásában láttuk, hogy

$$|A \times B \times C \times D \times E| = |A| \cdot |B| \cdot |C| \cdot |D| \cdot |E|.$$

A fenti formula általános alakját, amelyet szokás *szorzási szabálynak* is nevezni, az alábbi tételben adjuk meg bizonyítás nélkül.

9.6. Tétel. Legyenek az A_1, A_2, \dots, A_n halmazok végesek. Ekkor

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| |A_2| \dots |A_n|.$$

9.5. Példa. Legyen e, f és g három közös kezdőpontú félegyenes. Az e félegyenesen kijelölünk 3, az f félegyenesen 4, a g félegyenesen 5 pontot. (Egyik pont se legyen a közös kezdőpont.) Hány olyan háromszöget határoznak meg a pontok, amelyek mindegyik csúcsa különböző félegyeneseken van?

Jelölje az e félegyenes 3 kiválasztott pontjának halmazát E . Hasonlóan definiáljuk az F és a G halmazt is. Ekkor az $E \times F \times G$ Descartes-szorzat minden egyes eleme egy keresett háromszöget határoz meg, és fordítva, minden háromszöghöz hozzárendelhető egyértelműen egy ilyen rendezett hármas. A szorzási szabály szerint a keresett háromszögek száma: $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.

Ismétléses permutáció

A 9.3. Példa szövegében nem hangsúlyoztuk ki, hogy az elhangzó versek mind különbözőek, hiszen ez magától értetődő. Vannak azonban olyan esetek is, amikor olyan elemeket kell sorbarendeznünk (permutálnunk), amelyek között vannak egyformák is.

9.3. Definíció. Ha n darab elem között vannak egyformák is, amelyeket nem különböztetünk meg, akkor az n elem egy sorrendjét ismétléses permutációnak nevezzük.

9.6. Példa. Hányféleképpen lehet sorbarakni 3 piros, 1 kék és 1 fehér golyót?

Tegyük föl, hogy a 3 piros golyót ceruzával megszámozzuk. A golyókat jelöljük így: p_1, p_2, p_3, k, f . Öt golyót $5! = 120$ -féleképp lehet sorbarakni. De mi van akkor, ha a p_1, p_2, p_3 golyókat nem különböztetjük meg? Bizonyos eseteket így a szükségesnél többször vettünk számba, mert például a $pfkpp$ esetet hatszor számoltuk:

$$p_1 f k p_2 p_3, \quad p_1 f k p_3 p_2, \quad p_2 f k p_1 p_3, \quad p_2 f k p_3 p_1, \quad p_3 f k p_1 p_2, \quad p_3 f k p_2 p_1,$$

Még hozzá azért éppen hatszor, mert a p_1, p_2, p_3 elemeknek éppen ennyiféle permutációja létezik. A 120 tehát hatszorosa a keresett számnak, így $\frac{5!}{3!} = 20$ különböző permutáció létezik.

9.7. Példa. Vizsgáljuk ki, hogy hányféleképpen lehet sorbarakni 3 piros, 2 kék és 1 fehér golyót. Ha a két kék golyót különbözőnek tekintjük, akkor összesen $\frac{6!}{3!}$ sorrend van. Az előző példában láttuk, hogy ha a két kéket is megkülönböztetjük, akkor a kapott számot osztanunk kell még 2!-sal, vagyis a keresett szám: $\frac{6!}{3!2!} = 60$.

Most már elég tapasztalatunk van arra, hogy általánosítsunk.

9.7. Tétel. Legyenek n , r , valamint k_1, k_2, \dots, k_r adott természetes számok, úgy, hogy $r \leq n$ és $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$. Ha n elem között k_1, k_2, \dots, k_r darab egyforma elem van, akkor ezek permutációinak a száma $\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_r!}$. Jele: $\overline{P}_{k_1, k_2, \dots, k_r}^n$.

Vegyük észre, hogy ha minden elemből egyetlen darab van, akkor a nevezőben $1! = 1$ miatt 1 lesz, vagyis visszkapjuk az ismétlés nélküli permutáció képletét.

Nem lenne szükséges a bevezetett jelölésben felülvonást alkalmazni, hiszen a paraméterek egyértelműen mutatják, hogy a permutáció ismétléses fajtájáról van szó, mi azonban a különböző kombinatorikai fogalmak ismétléses fajtáit mindig felülvonással fogjuk jelölni, szövegben pedig az „ismétléses” szóval fogjuk megkülönböztetni a nem ismétlésestől, azaz ismétlés nélkülitől.

Az eddigiekből kiderült, hogy egy szám faktoriálisának a kiszámítása fontos tényezője a kombinatorikai feladatok sikeres megoldásának. Habár a számológépen is van ilyen funkció, számoláskor mégis nagy nehezségekbe ütközhetünk, melynek oka az, hogy a faktoriális művelet már viszonylag kis számokra is viszonylag nagy eredményeket ad.

$$0! = 1$$

n	$n!$
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040

n	$n!$
8	40320
9	362880
10	3628800
11	39916800
12	479001600
13	6227020800
14	87178291200

Ezek után a $\frac{97!}{95!}$ kiszámítása szinte lehetetlen vállalkozásnak tűnhet, de nem az:

$$\frac{97!}{95!} = \frac{1 \cdot 2 \cdots 95 \cdot 96 \cdot 97}{1 \cdot 2 \cdots 95} = \frac{95! \cdot 96 \cdot 97}{95!} = \frac{96 \cdot 97}{1} = 9312.$$

Nem csak konkrét számokat tartalmazó kifejezések egyszerűsíthetők ezzel a fogással, hanem betűket tartalmazó kifejezések is. Például a 9.1. Megjegyzésben szereplő képlet is egyszerűbb alakra hozható:

$$\frac{n!}{n} = \frac{1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n}{n} = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) = (n-1)!,$$

vagyis n elem ciklikus permutációinak a száma $(n-1)!$.

9.8. Példa. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést:

$$\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}.$$

A faktoriális definíciója szerint kiírva a szorzatokat, majd közös nevezőre hozva a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} &= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots (n-1)} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots n} = \\ &= \frac{n}{1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n} = \frac{n-1}{n!}. \end{aligned}$$

Fontos megjegyezni, hogy a faktoriális segítségével a természetes számok sorozatának bármely szeletét kiválasztva könnyen fölírhatjuk a szorzatot. Például

$$5 \cdot 6 \cdots 11 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{11!}{4!}.$$

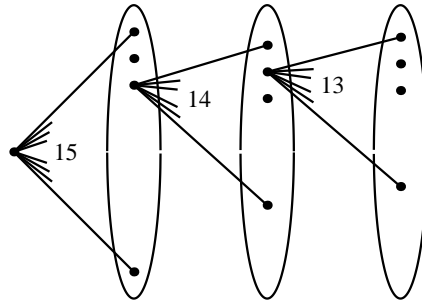
9.8. Tétel. Legyen n és k két olyan természetes szám, amelyekre $n > k$. Ekkor

$$(n-k+1) \cdot (n-k+2) \cdots (n-1) \cdot n = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

9.1.3. Variáció

9.9. Példa. Egy futóversenyen 15 tanuló vesz részt. Hányféleképpen alakulhat az első 3 hely sorsa, ha tudjuk, hogy nem lesz holtverseny?

A 9.3. Példa megoldásához hasonlóan járhatunk el, gondolhatunk gráfokra, de akár a szorzási szabályra is. Mi a szemléltetés kedvéért a gráfos megoldást választjuk.



Jól látható, hogy az első helyezett kiválasztása 15-féleképpen történhet. Mind a 15 esetben 14 második helyezett választható, és mind a $15 \cdot 14$ esetben a harmadik helyezett kiválasztása 13-féleképpen lehetséges. Az első három díjat tehát $15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730$ -féleképpen oszthatják ki.

A 9.8. Tétel alapján, ha $n = 15$ mellett $k = 3$, akkor éppen a $15 \cdot 14 \cdot 13$ szorzatot kapjuk, vagyis a megoldás fölírható $\frac{15!}{(15-3)!}$ alakban, és éppen 15 futóból akartunk 3-at kiválasztani.

A fenti gondolatmenetben előforduló új fogalmakat és állításokat a következő definícióban és tételben általánosan is megfogalmazzuk:

9.4. Definíció. Ha egy n elemű halmazból k darab elemet szeretnénk kiválasztani és sorba rendezni, akkor azt n elem k -ad osztályú variációjának nevezzük. Jele: V_k^n .

9.9. Tétel. n elem k -ad osztályú variációinak a száma:

$$V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

A tétel összhangban van eddigi ismereteinkkel, ugyanis ha a $k = n$, akkor az összes elemet sorbarendezzük, ami permutációnak felel meg, és valóban, ebben az esetben a variáció képlete is a $0! = 1$ nevező miatt a permutáció képletébe megy át.

Ismétléses variáció

A 9.9. Példa szövegéből adódott, hogy a 15 futóból az első három kiválasztásánál egy adott futót csak egyszer választhatunk, mert nem végezhet valaki egy versenyen több helyen is, vagyis például aki első lett, az nem lehet második is vagy harmadik. A következő példa egy olyan szituációt ír le, ahol egy adott elemet többször is kiválaszthatunk.

9.10. Példa. Egy matematikaórán lefelel az osztály névsor szerinti első hat tanulója. Mindenki kettő és öt között kaphat valamilyen osztályzatot. (Nincs egyes mert mindenki biztosan tud legalább kettesre.) Hányféleképpen alakulhatnak az osztályzatok?

A lehetséges sorozatok nagyság szerint sorbarendezve:

111111, 111112, ..., 111115, 111121, 111122, ..., 555555.

Nehéz lenne mindet felsorolni, de nem is szükséges, a szorzási szabály (9.6. Tétel) a segítségünkre lehet. Legyen $A = \{2, 3, 4, 5\}$. Egy lehetséges sorrend legyen (a, b, c, d, e, f) . Az $A \times A \times A \times A \times A \times A$ halmaz bármelyik eleme egy lehetséges sorrend, és bármely lehetséges sorrend mint rendezett hatos eleme az A^6 halmaznak. Tehát A^6 elemszáma a megoldás, az pedig az említett szorzási szabály szerint $4^6 = 4096$.

Láttuk tehát, hogy egy négy elemű halmazból hat elem kiválasztására a sorrend figyelembe vételével 4^6 -féleképpen lehetséges. Ezt az eredményünket fogjuk általánosítani a következő definíció után.

9.5. Definíció. *Ha egy n elemű halmazból k darab elemet szeretnénk kiválasztani és sorba rendezni úgy, hogy a kiválasztás során egy elemet akár többször is választhatunk, akkor azt n elem k -ad osztályú ismétléses variációjának nevezzük. Jele: \overline{V}_k^n .*

Az ismétlés nélküli variáció definíciójából (és tételéből is) következett, hogy n nem lehetett kisebb k -nál. Itt, az ismétléses esetben, ennek nincs akadálya.

9.10. Tétel. *n elem k -ad osztályú ismétléses variációinak a száma: $\overline{V}_k^n = n^k$.*

9.1.4. Kombináció

Az eddigi példákban mindig sorbarendezéseket számoltunk meg. A továbbiakban olyan problémákkal foglalkozunk, melyekben egy halmaz elemeiből kiválasztunk valahányat, de a kiválasztás sorrendje nem számít. Tekinthejük úgy, hogy a halmazból részhalmazt választunk ki. (A halmaz elemeinek nem tulajdonítunk sorrendet.)

9.6. Definíció. *Ha egy n elemű halmazból kiválasztunk k darab elemet úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendjére nem figyelünk (azaz kiválasztunk egy k -elemű részhalmazt), akkor n elem k -ad osztályú kombinációjáról beszélünk. Jele: C_k^n .*

9.11. Példa. Egy városban az autóbuszokon a jegyeket olyan lyukasztókkal kezelik, melyek az ábrán látható négyzethálózathoz pontosan 3 mezőt lyukasztanak ki. Hányféleképpen állíthatók be a lyukasztók a követelményeknek megfelelően?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Tegyük föl először, hogy a lyukasztó a három számot valamilyen sorrendben lyukasztja ki, amelyre mi odafigyelünk. Ebben az esetben kilenc elem harmadosztályú variációját kell kiszámolnunk, ami a képlet szerint: $\frac{9!}{(9-3)!}$. Ez a szám azonban nagyobb a keresett számnál, mert például az $(1, 5, 6)$ kombinációt annyiszor számoltuk, ahány sorrendben előfordul a három szám, vagyis $3!$ -szor. Ez igaz mindegyik kombinációra, ezért a $\frac{9!}{(9-3)!}$ szám a hatszorosa a keresettnek. Ezek alapján a kilenc számból $\frac{9!}{(9-3)! \cdot 3!}$ -féleképpen lehet kiválasztani 3-at a sorrendet nem tekintve.

A fenti példa eredményét általánosítva kapjuk a következő tételt.

9.11. Tétel. n elem k -ad osztályú összes kombinációjának a száma:

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

A kombináció és az ismétléses permutáció között szoros kapcsolat van. A 9.11. Példa szövegében szereplő autóbusszjegy kilenc számát jelöljük fehér körökkel, a kiválasztott hármat pedig feketével. Például az 1, 5, 6 számok kilyukasztása legyen:

● ○ ○ ○ ● ● ○ ○ ○.

A 9.11. Példa azt mutatta meg, hogy a kilenc köröskéből hányféleképpen tudjuk kiválasztani a három feketetét. Minden ilyen kiválasztás pontosan a hat fehér és a három fekete kör egy sorrendjét jelenti és fordítva, minden sorrend egy kiválasztásnak felel meg. Ezek alapján felírható, hogy

$$\overline{P}_{6,3}^9 = C_3^9, \quad \text{általánosan pedig} \quad \overline{P}_{n,n-k}^n = C_k^n.$$

A fenti tételben szereplő képlet rövidítésére ad módot a következő jelölés bevezetése.

9.7. Definíció. Jelölje $\binom{n}{k}$ (olvasd: „ n alatt a k ”) n elem k -ad osztályú kombinációját.

Az előzőek alapján felírható, hogy

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

Ismétléses kombináció

9.12. Példa. Egy ötfős társaság telefonon pizzát rendel, mindenki egyet. Háromféle pizzából lehet választani: sajtos, sonkás és tonhalas. Hányféle összetételű lehet pizzafajták szempontjából a rendelésük?

A különböző összetételű rendelésekhez rendeljünk hozzá egy-egy jelsorozatot. Például a ○ ● ○ ● ○ ○ ○ jelsorozatban a fehér karikák jelentsék a rendelések számát, a sötét karikák pedig pedig az egyes pizzafajtákat határolják el egymástól. Az alábbi táblázatban néhány konkrét példa található erre a furcsa kódolásra:

1 sajtos, 3 sonkás, 1 tonhalas	○ ● ○ ○ ○ ● ○
2 sajtos, 3 sonkás, 0 tonhalas	○ ○ ● ○ ○ ○ ●
0 sajtos, 0 sonkás, 5 tonhalas	● ● ○ ○ ○ ○ ○
3 sajtos, 0 sonkás, 2 tonhalas	○ ○ ○ ● ● ○ ○

Minden összetételnek megfelel pontosan egy kód, és minden kódnak megfelel pontosan egy összetételű rendelés. Ezek alapján pontosan annyiféle összetételű rendelést lehet leadni, ahányféle 5 fehér és 2 fekete körből álló jelsorozat létezik. Ezekből pedig éppen annyi van, ahányféleképp ki lehet választani 7 körből 5-öt (amelyek fehérek lesznek). Kiszámolandó a hét elem ötöd osztályú kombinációja: $\binom{7}{5} = 42$.

Tegyük most föl, hogy n fajta pizza van, és egy k -fős társaság szeretné leadni a rendelését. A rendelésük kódolásában lesz k fehér köröcske és $n - 1$ fekete (n pizzafajtát $n - 1$ kör választ szét). Ebből kell kiválasztani a k darab fehérét.

9.8. Definíció. Ha n elemből kiválasztunk k darab elemet úgy, hogy minden elemet akár többször is válszthatunk és a kiválasztás sorrendje nem számít, akkor azt n elem k -ad osztályú ismétléses kombinációjának nevezzük. Jele: \overline{C}_k^n

Az előző példa megoldása és általánosítása alapján kimondható a következő tétel.

9.12. Tétel. n elem k -ad osztályú ismétléses kombinációinak a száma

$$\overline{C}_k^n = \binom{n+k-1}{k}, \quad \text{amely} \quad \overline{C}_k^n = \binom{n+k-1}{n-1}$$

alakban is felírható.

A tétel kimondása előtti gondolatmenetből is következik, ha az $n + k - 1$ körből nem a fehéreket, hanem a feketéket szeretnénk az összes lehetséges módon kiválasztani. A fekete körök száma: összes – fehér = $(n + k - 1) - k = n - 1$.

FELADATOK

1. Hány 100-nál kisebb természetes szám van, amely a 2, a 3 és az 5 számok egyikével sem osztható?

Megoldás. Legyen A a kettővel, B a hárommal és C az öttel osztható 100-nál kisebb természetes számok halmaza. Ekkor

$$|A| = 49, \quad |B| = 33, \quad |C| = 19.$$

Azoknak a számoknak a számát kell meghatározni, amelyek 100-nál kisebbek, de egyik halmazban sincsenek benne, azaz keresendő a $99 - |A \cup B \cup C|$ szám. Ennek megállapításában a szita formula (9.2. Tétel) lesz segítségünkre. Mivel $A \cap B$ a hattal, $A \cap C$ a tízzel, a $B \cap C$ a tizentöttemmel és $A \cap B \cap C$ pedig a harminccal osztható 100-nál kisebb számok halmaza, így

$$|A \cap B| = 16, \quad |A \cap C| = 9, \quad |B \cap C| = 6 \quad \text{és} \quad |A \cap B \cap C| = 3,$$

vagyis a keresett szám: $99 - |A \cup B \cup C| = 99 - ((49 + 33 + 19) - (16 + 9 + 6) + 3) = 99 - 101 + 31 - 3 = 26$.

2. Hány olyan 1000-nél kisebb természetes szám van, amely a 2, a 3, az 5 és a 7 egyikével sem osztható?

Megoldás. Az előző feladathoz hasonló jelölések bevezetése után kapjuk, hogy

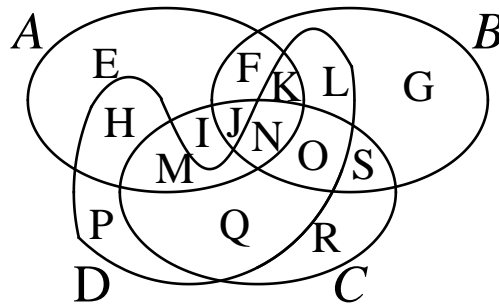
$$\begin{aligned} |A| &= 499, & |B| &= 333, & |C| &= 199, & |D| &= 14, & |A \cap B| &= 166, & |A \cap C| &= 99, \\ |A \cap D| &= 71 & |B \cap C| &= 66, & |B \cap D| &= 47, & |C \cap D| &= 28, & |A \cap B \cap C| &= 33, \\ |A \cap B \cap D| &= 23, & |A \cap C \cap D| &= 14, & |B \cap C \cap D| &= 9 \quad \text{és} \quad |A \cap B \cap C \cap D| &= 4. \end{aligned}$$

A végeredményt a 9.3. Tétel szerint a következő számolás adja:

$$\begin{aligned} 999 - ((499 + 333 + 199 + 14) - (166 + 99 + 71 + 66 + 47 + 28) + (33 + 23 + 14 + 9) - 4) = \\ = 999 - (1045 - 477 + 79 - 4) = 999 - 643 = 356. \end{aligned}$$

3. Anna, Béla, Csaba és Dóra az osztálykiránduláson egy ódon kastély tornyába szeretnének fölmenni, ahova egy 1020 lépcsőből álló csigalépcső vezet föl. Hogy érdekesebb legyen a lépcsőzés, elhatározzák, hogy Anna kettesével, Béla hármassával, Csaba négyesével és Dóra ötösével veszi a lépcsőket. (Csaba és Dóra idősebbek a többiek-nél, meg sem kottyán nekik.) Hány olyan lépcső lesz, amelyre pontosan két gyerek lépett?

I. Megoldás. Jelölje A, B, C, D azoknak a lépcsőknek a halmazát, amelyekre rendre Anna, Béla, Csaba és Dóra lépett. Kiszámítandó azon halmazok uniójának a számossága, amelyek az adott halmazok közül pontosan kettőnek a metszetei, tehát kiszámítandó az alábbi rajz szerinta a következő összeg: $|F| + |H| + |I| + |L| + |Q| + |S|$.



Adjuk össze külön-külön az összes két- és háromelemű halmazt:

$$\begin{aligned} |A \cap B| &= |F| + |J| + |K| + |N| \\ |A \cap C| &= |M| + |I| + |J| + |N| \\ |A \cap D| &= |H| + |M| + |N| + |K| \\ |B \cap C| &= |J| + |N| + |O| + |S| \\ |B \cap D| &= |N| + |K| + |L| + |O| \\ |C \cap D| &= |Q| + |Q| + |N| + |M| \end{aligned}$$

$$|F| + |I| + |S| + |L| + |Q| + |H| + 3(|J| + |K| + |M| + |O|) + 6|N|$$

és

$$\begin{aligned} |A \cap B \cap C| &= |J| + |N| \\ |A \cap B \cap D| &= |N| + |K| \\ |A \cap C \cap D| &= |M| + |N| \\ |B \cap C \cap D| &= |N| + |O| \end{aligned}$$

$$|J| + |K| + |M| + |O| + 4|N|.$$

Észrevehetjük, hogy ha összeadjuk azoknak a halmazoknak a számosságát, amelyek két halmaz metszeteként keletkeznek, és kivonjuk a három halmaz metszetébe eső halmazok számosságának az összegének a háromszorosát, akkor $-6|N|$ -t kapunk, vagyis hozzá kell adni $6|A \cap B \cap C \cup D|$ -t, hogy ez a tag is kiessen, és maradjon csak a $|F| + |H| + |I| + |L| + |Q| + |S|$. Eszerint a

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 4} |A_i \cap A_j| - 3 \cdot \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} |A_i \cap A_j \cap A_k| + 6|A \cap B \cap C \cup D|$$

képlettel számolva megkapjuk a megoldást.

Számoljuk ki most a kérdéses halmazok elemszámát:

$$\begin{aligned} |A \cap B| &= 170, & |A \cap C| &= 255, & |A \cap D| &= 102, \\ |B \cap C| &= 85, & |B \cap D| &= 68, & |C \cap D| &= 51. \end{aligned}$$

Ez összesen: 731.

$$|A \cap B \cap C| = 85, \quad |A \cap B \cap D| = 34, \quad |A \cap C \cap D| = 51, \quad |B \cap C \cap D| = 17.$$

Ez összesen: 187. Továbbá: $|A \cap B \cap C \cap D| = 17$. A végeredmény így

$$731 - 3 \cdot 187 + 6 \cdot 17 = 272.$$

II. Megoldás. A négy szám legkisebb közös többszöröse a 60. A 60 az 1020-ban 17-szer van meg. Elég az első hatvan szám között megszámlálni azokat, amelyek pontosan két számmal oszthatók a négy közül, és a kapott számot megszorozni 17-tel. A pontosan két osztóval rendelkező számok a 4, 6, 8, 10, 15, 16, 18, 28, 32, 42, 44, 45, 50, 52, 54, 56. Ez 16 darab, és $16 \cdot 17 = 272$.

4. Áginak 7 szoknyája van. Hányféle sorrendben veheti fel ezeket a hét folyamán, ha minden szoknyát csak egyszer vesz fel?

Megoldás. 7 elem permutációja: $P^7 = 7! = 5040$.

5. Hat diák felkeresett egy vendéglőst, és a következő ajánlatot tették: „Mi hatan szeretnénk minden nap itt ebédelni azzal a kikötéssel, hogy az asztal mellett álló hosszú lócán mindig más ülésrendet választhassunk. Akkor fizetünk, ha már nincs olyan ülésrend, amelyikkel még nem ültünk ebédhez.” A vendéglős belement az üzletbe. Hány év múlva kellett a diákoknak fizetniük?

Megoldás. A 6 diák összesen $P^6 = 6! = 720$ -féleképpen tud asztalhoz ülni, tehát szűk két év múlva kell majd rendezniük a számlát.

6. A 2, 3, 4, 5, 7 számjegyek egyszeri felhasználásával képezzünk ötjegyű számokat!
- Hány számot képezhetünk?
 - Hány páros van közöttük?
 - Hány olyan van, amely osztható négygyel?

Megoldás. a) $P^5 = 5! = 120$, tehát 120-at.

b) A kettesre végződők száma $P^4 = 4! = 24$, és a 4-esre végződők száma is ugyanennyi, vagyis az összes páros szám száma $24 + 24 = 48$. Gondolkodhattunk volna úgy is, hogy a 120 szám háromötöde végződik páratlan, kétötöde pedig páros számra. Így is 24-et kapunk.

c) A négygel való oszthatóságnál az utolsó két számjegyre kell odafigyelnünk, ugyanis a belőlük képzett kétjegyű számnak oszthatónak kell lennie négygel. A következő végzések lehetségesek: 24, 32, 52, 72. Mindegyik elé $P^3 = 3! = 6$ -féleképpen lehet beírni a megmaradt 3 számjegyet, így a négygel osztható számok száma $4 \cdot 6 = 24$.

7. Hány 5-tel osztható hatjegyű szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4, 5 számokból, ha minden számjegyet csak egyszer szerepelhet?

Megoldás. Egy öttel osztható szám csakis 0-ra vagy 5-re végződhet, és ez elég is az oszthatósághoz. Ha a szám nullára végződik, akkor a megmaradt öt számjegyet $P^5 = 5! = 120$ -féleképpen írhatjuk elé. Ha a szám ötre végződik, akkor szintén 120-féleképpen írhatjuk elé a többi számjegyet, csak ebből ki kell vonni azoknak a számoknak a számát, amelyek nullával kezdődnek.

A megoldás: $P^5 + P^5 - P^4 = 2 \cdot 120 - 24 = 216$.

Úgy is gondolkodhattunk volna, hogy ha az utolsó helyre ötöst írunk, akkor az első helyre – mivel oda nullát nem írhatunk – négyféle számot írhatunk, a második helyre – most már a nulla is szóbajöhet – szintén négyfélét, a harmadik helyre három számból választhatunk, a negyedikre már csak kettőből, az ötödik helyre pedig a megmaradt számjegyet írhatjuk be, azaz $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$ szám végződik ötösre. A 120-at hozzáadva megkaptuk a 216-ot.

8. Permutáljuk az 1234 szám számjegyeit, és állítsuk az így kapott számokat nagyság szerinti sorrendbe. Hányadik ebben a sorban a 3214?

Megoldás. Számoljuk meg, hány szám előzi meg a 3214-et! Megelőzi az összes 1-gyel kezdődő (P^3), az összes 2-vel kezdődő (P^3), a 3-mal kezdődők közül megelőzi az összes 31 kezdetű (P^2), és több nem, mert a 32-vel kezdődők között a 3214 az első. Az alábbiakban sematikusán ábrázoljuk eddigi gondolatmenetünket.

$$\begin{array}{ll} 1___ & P^3 = 6 \\ 2___ & P^3 = 6 \\ 31__ & P^2 = 2 \end{array}$$

A 3214-et összesen 14 szám előzi meg, így ő a 15. Az alábbi táblázatból meggyőződhetünk arról, hogy ez valóban így van:

1234	1342	2134	2341	3124
1243	1432	2143	2413	3142
1324	1432	2314	2431	3214 .

9. Az A, B, K, O, R, U betűk egyszeri felhasználásával képezzük az összes hatbetűs „szót”, és írjuk ezeket ábécé sorrendbe! Hányadik helyen szerepel ebben a „szótárban” az UBORKA szó?

Megoldás. Az előző feladathoz hasonlóan vegyük számba az UBORKA szót megelőző szavakat.

$A_ _ _ _$	$P^5 = 120$	$UBA_ _$	$P^3 = 6$
$B_ _ _ _$	$P^5 = 120$	$UBK_ _$	$P^3 = 6$
$K_ _ _ _$	$P^5 = 120$	$UBOA_ _$	$P^2 = 2$
$O_ _ _ _$	$P^5 = 120$	$UBOK_ _$	$P^2 = 2$
$R_ _ _ _$	$P^5 = 120$	$UBORAK$	1
$UA_ _ _$	$P^4 = 24$	$UBORKA$	1

Tehát az UBORKA szó e virtuális szótárban a $5 \cdot 120 + 24 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 2 + 1 + 1 = 642$. helyen szerepel.

10. Hányféleképpen ülhet le négy házaspár egy padra, ha mindenki a házastársa mellett szeretne ülni?

Megoldás. Ha a házastársak elhelyezkedését nem figyeljük, csak a párokat, összesen $P^4 = 4! = 24$ esetet tudunk megszámlálni. Rögzítsük a házaspárok egy sorrendjét, például legyen a sorrend $BCAD$. Azáltal, hogy a B házaspárban a sorrend lehet férfi-nő és nő-ferfi, a lehetséges sorrendeket megdupláztam, ugyanis $BCDA$ helyett lehet $B_f B_n CDA$ és $B_n B_f CDA$. Ugyanígy duplázza a lehetőségeket a többi házaspár tagjainak a megkülönböztetése is, tehát az összes lehetőség száma $P^4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4! \cdot 2^4 = 384$.

11. Nyolc ember – jelöljük őket a -, b -, c -, d -, e -, f -, g - és h -val – leül egy padra. Hányféleképpen helyezkedhetnek el úgy, hogy a és b , valamint g és h ne kerüljön egymás mellé?

Megoldás. Azt a fordított módszert alkalmazzuk, amely szerint az összes sorrend számából kivonjuk azon sorrendek számát, amelyek nem felelnek meg a feltételnek, vagyis amelyekben a és b vagy g és h egymás mellett ülnek. A kapott szám lesz a feltételt kielégítő sorrendek száma.

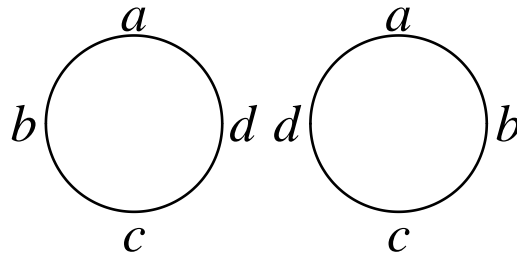
Az összes lehetséges ülésrend száma $P^8 = 8!$. Jelölje A azon sorrendek halmazát, amelyekben a és b egymás mellett ül, B pedig azokét, amelyekben g és h kerül egymás mellé. A feltételt nem kielégítő sorrendek elemei az A vagy a B halmaznak, vagyis az $A \cup B$ halmaznak. Kiszámítandó az $A \cup B$ halmaz számossága. Az A halmaz számosságának megállapításához az előző feladatban látott trükköt alkalmazzuk, azaz A -t és B -t tekintsük egy személynek. Az így kapott 7 személyt $P^7 = 7!$ -féleképpen lehet leültetni a padra. Az a és a b helycseréjével megduplázzhatjuk a lehetséges sorrendek számát, vagyis $|A| = 7! \cdot 2$. Ugyanígy számolható ki a $|B|$ is és ugyanennyi is lesz: $|B| = 7! \cdot 2$. A szita formula (9.1. Tétel) alkalmazásához tudnunk kellene még az $|A \cap B|$ -t, vagyis azon ülésrendek számát, amelyekben az a a b mellett, a g pedig a h mellett ül. Ha mindkét párt egy személynek tekintjük, akkor $P^6 = 6!$ sorrend adódik. Ezek mindegyikében egymás mellett ül a két pár. A párok tagjainak cseréjével (lásd az előző feladatot) megduplázzhatók az ülésrendek, tehát $|A \cap B| = 6! \cdot 2 \cdot 2$. Az összes nem megfelelő sorrend száma: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = (7! \cdot 2) + (7! \cdot 2) - (6! \cdot 2 \cdot 2) = 4 \cdot 7! - 4 \cdot 6! = 17280$. Azon esetek száma, amelyekben az a nem kerül b mellé és g nem kerül h mellé $P^8 - |A \cup B| = 8! - 17280 = 23040$.

12. Nyolc ember – jelöljük őket a -, b -, c -, d -, e -, f -, g - és h -val – leül egy kerek asztalhoz. Hányféleképpen helyezkedhetnek el úgy, hogy a és b egymás mellett üljön?

Megoldás. A szokásos trükk szerint tekintsük a -t és b -t egy személynek, mintha össze lennének kötözve. 7 személyt egy kerekasztal köré $6!$ -féleképpen ültethetünk le (9.1. Megjegyzés). Minden egyes így kapott ülésrendből csinálhatunk egy újabbat, ha a és b helyet cserélnek, vagyis a lehetséges ülésrendek száma $6! \cdot 2 = 1440$.

13. Hányféle sorrendben fűzhető fel négy különböző gyöngy egy nyakláncra?

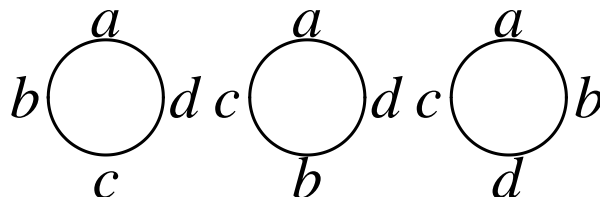
Megoldás. Első ránézésre a kerekasztalos feladatokra hasonlít ez a feladat. Vajon van-e valami különbség?



Az ábrán két kerekasztal-ülésrendet látunk. Egyértelmű, hogy ezek különböznek egymástól, hiszen az egyik rajzon az a jobb oldali szomszédja a b , a másikon a d . De ha a fenti ábrákat úgy tekintem, mintha gyöngysort ábrázolnának, akkor ez ugyanaz a gyöngysor, mert kézbevéve úgy is letehetem az asztalra, ahogy a bal oldali, és úgy is letehetem az asztalra, ahogyan az a jobb oldali ábrán látható. Olyan ez, mintha a kerekasztal alulról is és fölülről is vizsgálható lenne, vagyis két különböző ülésrend a kerekasztalnál, az egy azonos gyöngysort jelent. (Kicsit zavaró lehet, hogy hol ülésrendről, hol meg gyöngysorról beszélünk, de talán érthető a két problémahelyzet közötti kapcsolat.) Ezek szerint adott számú gyöngyből feleannyiféle gyöngysort lehet készíteni, mint ahány különböző ülésrend létezik egy kerekasztal körül az adott számú emberrel. Négy különböző gyöngy esetén tehát

$$\frac{(4-1)!}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

különböző gyöngysor készíthető. Ezeket az alábbi ábrán meg is mutatjuk. A könnyebb összehasonlítás végett mindegyik ábrán az a elem van legföül. Az is világos, hogy ha két azonos négy gyöngyből álló gyöngyfűzéken van két szemközi gyöngy, amely megegyezik (például mindkettőn az a és a b szemben van egymással), akkor az azonos gyöngysor.



14. Hányféle sorrendben húzhatunk ki egy urnából 5 piros és 7 kék gyöngyöt, ha csak azokat a húzásokat tekintjük különbözőeknek, amelyekben a színek más sorrendben következnek?

Megoldás. Ez ismétléses permutáció, tehát $\overline{P}_{5,7}^{12} = \frac{12!}{5! \cdot 7!} = 792$. Megjegyezzük, hogy mint kombinációt is kiszámíthatjuk, ha úgy közelítünk a problémához, hogy a 12 húzásból hányféleképpen választható ki 5 (vagy 7), amelyben a piros (kék) golyókat kihúzzuk.

15. A MATEMATIKA szó betűinek hány permutációja van? Ha az összes permutációt ábécé sorrendbe rendeznénk, akkor hanyadik lenne a MATEMATIKA szó?

Megoldás. A könnyebb áttekinthetőség kedvéért a MATEMATIKA szó betűit rendezzük ábécé sorrendbe: A, A, A, E, I, K, M, M, T, T. Az ismétléses permutáció képlete megadja az első kérdésre a választ:

$$\overline{P}_{3,2,2}^{10} = \frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 151200.$$

A második kérdésre már nehezebb válaszolni. Alkalmazni fogjuk azt a sémát, amelyet az ismétlés nélküli permutációnál is alkalmaztunk, azzal a különbséggel, hogy mindig föltüntetjük azokat a betűket, amelyeknek a permutációit megszámloljuk. Az ismétlés nélküli esetben ennek nem volt értelme, de most tudnunk kell, melyik betűből hány darab maradt. Nézzük hát, hány szó előzi meg a MATEMATIKA szót a képzeletbeli szótárban.

szóalak	kimaradt betűk	permutációk száma
A _____	A, A, E, I, K, M, M, T, T	$\overline{P}_{2,2,2}^9 = \frac{9!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 45360$
E _____	A, A, A, I, K, M, M, T, T	$\overline{P}_{3,2,2}^9 = \frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 15120$
I _____	A, A, A, E, K, M, M, T, T	$\overline{P}_{3,2,2}^9 = \frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 15120$
K _____	A, A, A, E, I, M, M, T, T	$\overline{P}_{3,2,2}^9 = \frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 15120$
M A A _____	A, E, I, K, M, T, T	$\overline{P}_2^7 = \frac{7!}{2!} = 2520$
M A E _____	A, A, I, K, M, T, T	$\overline{P}_{2,2}^7 = \frac{7!}{2! \cdot 2!} = 1260$
M A I _____	A, A, E, K, M, T, T	$\overline{P}_{2,2}^7 = \frac{7!}{2! \cdot 2!} = 1260$
M A K _____	A, A, E, I, M, T, T	$\overline{P}_{2,2}^7 = \frac{7!}{2! \cdot 2!} = 1260$
M A M _____	A, A, E, I, K, T, T	$\overline{P}_{2,2}^7 = \frac{7!}{2! \cdot 2!} = 1260$
M A T A _____	A, E, I, K, M, T	$P^6 = 6! = 720$
M A T E A _____	A, I, K, M, T	$P^5 = 6! = 120$
M A T E I _____	A, A, K, M, T	$\overline{P}_2^5 = \frac{5!}{2!} = 60$
M A T E K _____	A, A, I, M, T	$\overline{P}_2^5 = \frac{5!}{2!} = 60$
M A T E M A I ____	A, K, T	$P^3 = 3! = 6$
M A T E M A K ____	A, I, T	$P^3 = 3! = 6$
M A T E M A T A _	I, K	$P^2 = 2! = 2$
M A T E M A T I A K	–	1
M A T E M A T I K A	–	1

A jobb oldali oszlopba írt számok összege adja a keresett számot:

$$45360 + 3 \cdot 15120 + 2520 + 4 \cdot 1260 + 720 + 120 + 2 \cdot 60 + 2 \cdot 6 + 2 + 1 + 1 = 99254.$$

16. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

$$\text{a) } \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n-1)!} \quad \text{b) } \frac{(n+3)!}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{(n-1)!} \quad \text{c) } \frac{(n+3)!}{(n+2)!} + \frac{(n+1)!}{(n-1)!}$$

Megoldás. a)

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n-1)!} &= \frac{1}{(n+1)!} - \frac{n(n+1)}{(n-1)! \cdot n(n+1)} = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} - \frac{n(n+1)}{(n+1)!} = \frac{1 - n(n+1)}{(n+1)!} = \frac{1 - n^2 - n}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

b)

$$\frac{(n+3)!}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+2)!(n+3)}{(n+2)!} \cdot \frac{(n-1)!n(n+1)}{(n-1)!} = (n+3)n(n+1)$$

c)

$$\begin{aligned} \frac{(n+3)!}{(n+2)!} + \frac{(n+1)!}{(n-1)!} &= \frac{(n+3)!}{(n+2)!} + \frac{(n+1)!n(n+1)(n+2)}{(n-1)!n(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{(n+3)! + (n+1)!n(n+1)(n+2)}{(n+2)!} = \frac{(n+2)!(n+3) + (n+1)!n(n+1)(n+2)}{(n+2)!} = \\ &= \frac{(n+2)!(n+3) + (n+2)!n(n+1)}{(n+2)!} = \frac{(n+2)!((n+3) + n(n+1))}{(n+2)!} = \\ &= (n+3) + n(n+1) = n+3 + n^2 + n = n^2 + 2n + 3. \end{aligned}$$

17. Az $n+2$ elem permutációinak a száma 20-szorosa az n elem permutációi számának. Mennyivel egyenlő az n ?

Megoldás. A megoldandó egyenlet $20 \cdot n! = (n+2)!$ alakú. Innen

$$20 = \frac{(n+2)!}{n!} \iff 20 = \frac{n!(n+1)(n+2)}{n!} \iff 20 = (n+1)(n+2).$$

A kapott egyenlet megoldható mint másodfokú egyenlet, de a megoldás ki is található, ha arra gondolunk, hogy olyan két szomszédos pozitív egész számot keresünk, amelyek szorzata 20. Ez a 4 és az 5, a keresett szám tehát a 3.

18. Hány kétbetűs monogram készíthető az A, B, C, D, E, F betűkből, ha

a) a betűk nem ismétlődhetnek; b) a betűk ismétlődhetnek?

Megoldás. A betűk sorrendje számít, ezért a variáció képletével számolhatunk.

a) $V_2^6 = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{720}{24} = 180$. A variáció képletének alkalmazása nélkül is egyszerűen eljuthatunk a helyes eredményhez a következő gondolatmenettel: a monogram első betűjét hatféle, a második betűjét ötféle betűből választhatjuk ki, azaz $6 \cdot 5 = 30$.

b) az ismétléses variáció képlete alapján $\overline{V}_2^4 = 4^2 = 16$. Az a) rész megoldásában tett megjegyzésünk itt is érvényes.

19. A dó, mi, szó szolmizációs hangokból hányféle hat hangból álló „dallam” komponálható?

Megoldás. A hangok sorrendje számít egy dallamnál. A három hangot nyilván többször is felhasználhatjuk a dallam megalkotásában, különben nem tudnánk hat hang hosszúságú dallamot készíteni. Így az ismétléses variáció képletét fogjuk alkalmazni: $\overline{V}_6^4 = 4^6 = 4096$.

20. Marcinak különböző játékaik vannak. Ha kapna még egyet, akkor 18-cal többféleképpen tudna egyet-egyet adni Áginak és Bélának, mint most. Hány játéka van Marcinak?

Megoldás. Tegyük föl, hogy Marci játékaik száma n . Ekkor Marci Áginak és Bélának $V_2^n = a$ -féleképpen tud játékot adni. Ha eggyel több játéka lenne $(n+1)$, akkor Marci $V_2^{n+1} = a+18$ lehetséges módon adhatna játékot a másik két gyereknek. Az első egyenletet behelyettesítve a másodikba kapjuk, hogy $V_2^{n+1} = V_2^n + 18$. Oldjuk meg az egyenletet.

$$\begin{aligned} V_2^{n+1} = V_2^n + 18 &\iff \frac{(n+1)!}{(n+1-2)!} = \frac{n!}{(n-2)!} + 18 \iff \frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{n!}{(n-2)!} + 18 \iff \\ &\iff n(n+1) = (n-1)n + 18 \iff n^2 + n = n^2 - n + 18 \iff 2n = 18 \iff n = 9. \end{aligned}$$

Tehát Marcinak 9 játéka van és a másik két gyereknek 72-féleképpen tudna játékot ajándékozni, de ha Marcinak 10 játéka lenne, akkor 90-féleképp tudna ajándékot adni Áginak és Bélának.

21. Valahány különböző számjegyből Pista olyan kétjegyű számokat írt fel, amelyekben a számjegyek ismétlődhetek, Robi olyanokat, amelyekben nem ismétlődhetek. Hány számjegy közül válogathattak, ha Pista 8 számmal többet írhatott fel, mint Robi?

Megoldás. Itt is egy egyenlet felállítása a cél. Pista 8 számmal többet tudott fölírni, mint Robi, mert az ő számjegyei ismétlődhetek (és nem azért, mert többet vagy többől választhatott). A rendelkezésükre álló számjegyek számát jelöljük n -nel. Két esetet kell megkülönböztetnünk: a kiválasztható számjegyek között vagy van nulla, vagy nincs nulla.

a) Ha nincs nulla, akkor Robi V_2^n , Pista pedig \overline{V}_2^n számot tudott fölírni. Innen

$$\begin{aligned} V_2^n + 8 = \overline{V}_2^n &\iff \frac{n!}{(n-2)!} + 8 = n^2 \iff (n-1)n + 8 = n^2 \iff \\ &\iff n^2 - n + 8 = n^2 \iff n^2 - n + 8 = n^2 \iff n = 8. \end{aligned}$$

b) Ha a kiválasztható számjegyek között van nulla, akkor Robi a kétjegyű szám első jegyének $n-1$ számjegyből választhat, majd a maradék $n-1$ -ből (amit már kiválasztott, azt nem választhatja megint, de most a 0 már választható). Pista az első számjegyet Robihoz hasonlóan $n-1$ számjegyből választhatja ki, a második számjegynek pedig akármelyiket. Így Robi $(n-1)(n-1)$ -féle, Pista $(n-1)n$ -féle kétjegyű számot állíthat össze. A feladat feltételei alapján:

$$(n-1)(n-1) + 8 = (n-1)n \iff n^2 - 2n + 1 + 8 = n^2 - n \iff n = 9.$$

22. Egy iskolai matematikaverseny döntőjébe hat tanuló került: Anna, Béla, Csilla, Dezső, Endre és Ferenc. A versenyen egy első, egy második és egy harmadik díjat adnak ki. a) Hányféleképpen alakulhat a sorrend a díjak szempontjából?
b) Hány esetben lehet lány az első?
c) Hány esetben lehet Anna a helyezettek között?

Megoldás. a) $V_3^6 = \frac{6!}{(6-3)!} = 120$.

b) Vagy Anna az első, és akárki a második és a harmadik, vagy Csilla az első, és akárki a második meg a harmadik. Tehát: $V_2^5 + V_2^5 = 2 \cdot \frac{5!}{(5-2)!} = 2 \cdot 4 \cdot 5 = 40$.

c) A feladat a) részének az eredményéből kikövetkeztethető a válasz: Ha az első három hely sorsa 120 féleképpen alakulhat 6 tanuló esetén, akkor nyilvánvaló, hogy a 120 esetnek a felében Anna a legjobb három között van, a másik felében meg nincs. Tehát 60 esetben lesz Anna a helyezettek között. Természetesen a b) részben alkalmazott megoldásra is támaszkodhatunk. Szétválogatjuk az eseteket aszerint, hogy Anna első, második vagy harmadik lett, és ekkor kapjuk, hogy $V_2^5 + V_2^5 + V_2^5 = 3 \cdot 20 = 60$.

23. Egy tíztagú társaság tagjai között 4 különböző könyvet sorsolnak ki úgy, hogy egy-egy személy csak egy könyvet nyerhet. Hányféleképpen végződhet a sorsolás?

Megoldás. Első ránézésre nehéz megállapítani, hogy milyen típusú kombinatorikai problémával van dolgunk. Gondolhatunk kombinációra is, de mivel a könyvek különbözőek, ezért a 10 emberből nem elég valahogy kiválasztani 4-et, hanem el is kell dönteni, hogy melyik könyvet ki kapja a kiválasztott négyesből. Így a lehetőségek száma $C_4^{10} \cdot 4! = \frac{10!}{(10-4)!4!} \cdot 4! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$.

Másik lehetőség, hogy megjelöljük az embereket (például a, b, c, \dots), és mindegyik könyvre ráírjuk, hogy kinek szeretnénk odaadni. Például a *gahc* egy lehetséges könyvkiosztás. Ekkor a 10 betűből $V_4^{10} = 5040$ ilyen négyes képezhető.

24. Egy tíztagú társaság tagjai között 4 különböző könyvet sorsolnak ki úgy, hogy egy-egy személy több könyvet is nyerhet. Hányféleképpen végződhet a sorsolás?

Megoldás. Az előző feladatban leírt gondolatmenetek közül alkalmazzuk a másodikat. Jelöljük ismét betűkkel a tíz személyt (a, b, c, \dots). Ekkor például az *fgad* négyes egy lehetséges kiosztást jelöl. Ezzel a „kódolással” azokat az eseteket is tudjuk kezelni, amikor valamelyik személy több könyvet is kap (például az a : *faha*, vagy mind a négy könyvet ugyanaz: *dddd*). Az a kérdés, hogy tíz betűből hányféleképpen tudunk kiválasztani az ismétlődést is megengedve négyet: $V_4^{10} = 10^4 = 10000$.

25. Tükörszámoknak (vagy palindrom számoknak) nevezzük azokat a számokat, amelyek számjegyei előlről hátra és hátulról előre olvasva is ugyanazok, például 12521. Peti azt állítja, hogy 10-szer annyi hétjegyű tükörszám van, mint hatjegyű. Igaza van-e?

Megoldás. A hatjegyű tükörszámok *abccba* alakúak, ahol a különböző betűk nem feltétlenül jelentenek különböző számokat. Mivel a kilencféle, b és c tízféle számjegy lehet, így a lehetőségek száma $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$. Egy hétjegyű tükörszám *abcdcba* alakú. Itt a lehetőségek száma $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$, tehát Petinek igaza van.

26. Írjuk fel a 0, 6, 9 számjegyek (akár többszöri) felhasználásával képezhető összes olyan négyjegyű számot, amely
a) páros; b) 4-gyel osztható; c) 9-cel osztható.

Megoldás. a) Az összes négyjegyű számot összeszámolva $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 54$ -et kapunk. Mivel a három szám közül kettő páros, így a kapott 54 szám kétharmada, azaz 36 páros.

b) A megadott számjegyek felhasználásával a következő „kétjegyű”, négygyel osztható számok írhatók le: 00, 60, 96. Az ezresek helyére 6 vagy 9 írható, a százaskok helyére pedig mind a három. Így az összes lehetőségek száma: $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$, azaz 18 háromjegyű négygyel osztható szám képezhető.

c) Csoportosítsuk a keresett számokat a számjegyeik összege szerint:

9: lehetséges számjegyek: 0,0,0,9. Ezekből 1 négyjegyű szám képezhető;

18: lehetséges számjegyek: 9,9,0,0 vagy 6,6,6,0. Mindkét esetben 3-3 szám képezhető;

27: lehetséges számjegyek: 9,9,9,0 vagy 9,6,6,6. Az első esetben 3, a második esetben 4 szám képezhető;

36: lehetséges számjegyek: 9,9,9,9. Egy ilyen négyjegyű szám van.

Így összesen $1 + 3 + 3 + 3 + 4 + 1 = 15$ számot számoltunk össze.

27. Hány olyan háromjegyű szám van, amelyben a) csupa egyenlő; b) két különböző; c) három különböző számjegy van? Hogyan lehetne egyszerűen leellenőrizni a három eredményt?

Megoldás. a) Az aaa alakú háromjegyű számok száma kilenc, mert $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$.

b) Az aab alakú számból pontosan $9 \cdot 9 = 81$ van, mert az a és a b is kilenc különböző értéket vehet föl, ugyanis az első számjegyet jelölő a nem lehet 0, a b pedig nem lehet egyenlő a -val. Ugyanígy 81-81 darab aba és baa alakú háromjegyű szám van, vagyis a két különböző számjegyet tartalmazó háromjegyű számok száma 243.

c) A csupa különböző számjegyeket tartalmazó számok száma $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

Mivel minden háromjegyű szám az a), b) és c) feladatrészekben leírt típusok közül pontosan az egyikbe esik, ezért az a), b) és c) feladatok eredményeit összeadva 900-at kell kapunk, amennyi az összes háromjegyű szám száma, és ez valóban ki is jön.

28. Egy dobozban 9 cédula van, rendre 1-től 9-ig megszámozva. Sorban egyesével kihúzzunk 3 cédulát úgy, hogy minden húzás után visszatesszük a kihúzott cédulát. Hányféle olyan húzás van (a sorrend is számít), amely során
a) a kihúzott legkisebb szám 5-nél nagyobb; b) a kihúzott legkisebb szám a 7?

Megoldás. a) Az ötnél nagyobb számok: 6, 7, 8, 9, vagyis a kihúzott számhármast e négy számból állíthatjuk össze. Egy szám többször is szerepelhet, mert visszatetés után újra kihúzható. Az összes lehetőség száma $\overline{V}_3^4 = 4^3 = 64$.

b) A feladat feltételét értelemezük úgy, hogy a kihúzott számok között van hetes, de nincs kisebb. (Esetleg érthetné valaki a „legkisebb” szót úgy is, hogy pontosan egy darab hetes van, és nincs kisebb szám. A hétköznapi szóhasználatban ennek is helye van, mert például ha valakinek van három gyermeke, akik 4, 4 és 6 évesek, akkor mondhatjuk azt, hogy nincs közöttük legfiatalabb, mert két négyéves van. A matematikában a „legkisebb” szót általában nem ebben az értelemben használjuk.) A következő eseteket fogjuk megkülönböztetni: 7_ _ 7_ _ 7_ 77_ 7_7 77 777, ahol a vonalakra 8-as vagy 9-es írható. Ezek alapján a lehetőségek száma rendre így alakul: 4, 4, 4, 2, 2, 2, 1, azaz az összes lehetőség száma 19.

29. Egy álláshirdetésre 16-an jelentkeznek, de csak 2 főt vesznek föl. Hányféleképpen választhatják ki a két új alkalmazottat?

Megoldás. A feladat szövege nem említi, hogy a két alkalmazottat egyforma vagy különböző munkahelyre veszik-e föl, ezért nincs okunk az állásokat megkülönböztetni, vagyis a sorrend figyelembevétele nélkül választunk ki két személyt. Így a válasz:

$$C_2^{16} = \binom{16}{2} = \frac{16!}{14! \cdot 2!} = \frac{15 \cdot 16}{2} = 120.$$

30. Picurka ország lakói olyan lottón játszanak, amelyen az 1; 2; ...; 45 számok közül húznak ki hármat. A lakosok kiszámolták, hogy ha az ország minden lakója kitölt egy szelvényt a többiekétől különböző módon, akkor sem biztos, hogy lesz telitalálat. Legfeljebb hány lakosa lehet Picurka országnak, ha a szabályok szerint minden szelvényen három számot kell megjelölni?

Megoldás. Számoljuk össze, hányféleképpen alakulhat a húzás eredménye:

$$\binom{45}{3} = \frac{45!}{42! \cdot 3!} = \frac{43 \cdot 44 \cdot 45}{6} = 14190.$$

Ha az országnak pontosan ennyi lakosa lenne, akkor (ha mindenki egy kombinációt játszik meg) pontosan egy telitalálatos szelvény lenne. Ha ennél kevesebb lakosa lenne, akkor már lenne olyan kombináció, amelyet nem játszott meg senki, vagyis Picurka országnak legfeljebb 14189 lakosa lehet.

31. Egy társaságban mindenki mindenkivel kezét fogott. Hányan voltak a társaságban, ha 136 kézfogásra került sor?

Megoldás. Egy kézfogáshoz két személy kell. A kiválasztás sorrendje nem számít, mivel ab és ba kézfogás ugyanaz a kézfogás. Ha n -nel jelöljük a társaság létszámát, akkor a $C_2^n = 136$ egyenlet megoldását kell kiszámolnunk:

$$\frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = 136, \quad \text{azaz} \quad \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 136 \cdot 2!, \quad \text{illetve} \quad n(n-1) = 272.$$

Ebből az egyenletből pedig többféleképpen is (találgatással, négyzetgyökvonással, a másodfokú egyenlet megoldóképletével) adódik a megoldás: $n = 17$.

32. Egy labdarúgó-bajnokságon kétfordulós körmérkőzések alapján döntik el a helyezéseket. Hány csapat szerepelt a versenyen, ha összesen 240 mérkőzést játszottak?

Megoldás. A körmérkőzés azt jelenti, hogy mindenki játszott mindenkivel – a kétfordulóból kifolyólag – éppen kétszer. Vagyis 120 meccs volt fordulónként. Vajon mennyi lehet a csapatok száma, ha közülük 120 különböző párt lehet kiválasztani? Jelöljük a csapatok számát n -nel. Megoldandó tehát a $C_2^n = 120$ egyenlet. Az előző feladatban látott módon kiszámolható a megoldás: $n = 16$.

33. Hány egyenest határoznak meg egy szabályos 10-oldalú sokszög csúcsai?

Megoldás. Bármely pontpár meghatároz egy egyenest, és különböző pontpárok különböző egyeneseket határoznak meg. Az hát a kérdés, hogy a 10 pontból hány különböző pontpárt tudunk kiválasztani: $C_2^{10} = 45$.

34. Legfeljebb hány metszéspontja lehet 10 egyenesnek?

Megoldás. Egy metszéspont keletkezéséhez két különböző egyenes kell, azaz a metszéspontok maximális száma $C_2^{10} = 45$. Ezt a számot csak akkor érhetjük el, ha nem esik egybe két metszéspont. Ha a 10 egyenes egyazon körnek az érintője, akkor nem esnek egybe a metszéspontok, hiszen a kör síkjának bármely pontjából a körre legfeljebb két érintő húzható. Így a 45 nem elméleti szám, hanem ilyen 10 egyenes valóban meg is adható.

35. Hányféleképpen vehetünk ki egy csomag magyar kártyából 10 lapot úgy, hogy a kihúzott lapok között a) legalább 7 zöld; b) legfeljebb 7 zöld lap legyen?

Megoldás. a) Jelentse Z_n azt a számot, ahányféleképpen egy csomag magyar kártyából kivehetünk tíz lapot úgy, hogy legyen köztük pontosan n darab zöld lap. Ez a szám könnyen kiszámolható, ugyanis a nyolc zöld lapból ki kell választani n -t, a maradék 24 nem zöld lapokból pedig $(10 - n)$ -t:

$$Z_n = \binom{8}{n} \binom{24}{10-n}.$$

Legalább hét zöld lap úgy lehet a 10 kiválasztott között, ha pontosan hét vagy nyolc zöld lapot veszünk ki. (Többet nem lehet, mert nincs annyi zöld kártya a pakliban.) Vagyis

$$\begin{aligned} Z_7 + Z_8 &= \binom{8}{7} \binom{24}{3} + \binom{8}{8} \binom{24}{2} = 8 \cdot \frac{21! \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24}{3! \cdot 21!} + 1 \cdot \frac{22! \cdot 23 \cdot 24}{2! \cdot 22!} = \\ &= 8 \cdot 2024 + 276 = 16468. \end{aligned}$$

b) A legfeljebb 7 zöld lapot tartalmazó 10 lapos kombinációk száma az a) rész jelöléseivel: $Z_0 + Z_1 + \dots + Z_7$. Mivel $Z_0 + Z_1 + \dots + Z_8 = \binom{32}{10}$, így

$$Z_0 + Z_1 + \dots + Z_7 = \binom{32}{10} - Z_8 = 64512240 - 276 = 64511964.$$

36. Egy 32-lapos magyar kártyacsomagból hányféleképpen lehet kiválasztani nyolc lapot úgy, hogy a kiválasztott lapok között pontosan két piros és két hetes legyen?

Megoldás. Az összeszámolandó eseteket alapvetően két csoportra oszthatjuk: amikor a kiválasztott lapok között van a piros hetes, és amikor nincs. Az első esetben a piros hetes mellé még egy piros lapot és még egy hetest kell választanunk. A maradék lapokat a sem nem piros, sem nem hetes lapok közül választjuk. Ezeknek a lehetőségeknek a száma: $\binom{3}{1} \binom{7}{1} \binom{21}{5} = 3 \cdot 7 \cdot 20349 = 427329$. A második esetben talán még egyszerűbb a helyzet: kiválasztunk két hetest (de nem a piros hetest), kiválasztunk 2 pirosat (de nem a piros hetest), a maradék helyeket pedig föltöltjük a többi lappal: $\binom{3}{2} \binom{7}{2} \binom{21}{4} = 3 \cdot 21 \cdot 5985 = 377055$. A két szám összege adja a választ a kérdésre: összesen $427329 + 377055 = 804384$ lehetőség van egy pakli magyar kártyából kivenni 8 lapot úgy, hogy a kiválasztott lapok között pontosan két piros és két hetes legyen.

37. Egy műhelyben egy műszak alatt elkészített 500 darab zár 4%-a selejtes. Hányféleképpen választhatók ki közülük 10 zárat úgy, hogy a kiválasztottak közül
- pontosan 5 darab selejtes legyen;
 - legalább 2 darab selejtes legyen?

Megoldás. Az 500 zárnak a 4%-a 20. Ennyi a selejtek száma. a) $\binom{20}{5} \binom{480}{5}$.

Általánosan is elmondhatjuk, hogy egy tízelemű mintában k darab selejt összesen $\binom{20}{k} \binom{480}{10-k}$ különböző módon fordulhat elő. b) A „legalább 2 selejt” mintát úgy tudjuk összeállítani, hogy kiszámoljuk az összes lehetséges összeállítást, és kivonjuk belőle azoknak a mintáknak a számát, amelyekben nincs legalább két selejt, azaz nulla vagy egy selejttel tartalmaznak. Az a) részben leírt általánosítás szerint tízelemű mintát nulla selejttel $\binom{480}{10}$, egy selejttel $\binom{480}{9} \binom{20}{1}$ -féleképpen lehet kiválasztani. A válasz tehát

$$\binom{500}{10} - \binom{480}{10} - \binom{480}{9} \binom{20}{1},$$

azaz ennyiféleképpen lehet kivenni egy 10-elemű mintát, amelyben legalább két selejt van.

38. Egy osztályból 15 tanuló kirándulni megy. Az éjszakát egy turistaházban töltik, ahol három négyágyas és egy háromágyas szobát kapnak. Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha a szobákon belüli elhelyezkedést nem vesszük figyelembe?

Megoldás. A 15-fős társaságból három négyfős és egy háromfős csoportot kell kialakítani. Az összes lehetőség kiszámítási módja:

$$\binom{15}{4} \binom{11}{4} \binom{7}{4} \binom{3}{3} = 1365 \cdot 330 \cdot 35 \cdot 1.$$

39. Egy dobozban 15 cédula van 1-től 15-ig megszámozva. Kihúzzunk 5 cédulát visszatevés nélkül. Hányféleképpen történhet meg, hogy a kihúzott legkisebb szám nagyobb 5-nél? (A húzás sorrendje nem számít!)

Megoldás. Azokat az eseteket kell összeszámolnunk, amikor 6-nál kisebb számot nem húzzunk ki, vagyis 10 számból választhatunk: 6, 7, ..., 15. Az összes lehetőség száma $\binom{10}{5} = 252$.

40. Egy 32-es létszámú osztály, amelynek Nagy Pál is tagja, diákbizottságot választ. A bizottság összetétele: 1 titkár és 4 bizottsági tag. Hány olyan eset lehetséges, amikor Nagy Pál
- titkára a bizottságnak;
 - nem titkárként tagja a bizottságnak;
 - szerepel a bizottságban?

Megoldás. a) Ha Nagy Pál a titkár, akkor a másik négy bizottsági tagot $\binom{31}{4} = 31465$ -féleképp lehet kiválasztani.

b) Ha Nagy Pál nem titkár, hanem egyszerű bizottsági tag, akkor először válasszuk ki a titkárt, majd a másik három bizottsági tagot: $\binom{31}{1} \binom{30}{3} = 125860$.

c) Ha Nagy Pál tagja a bizottságnak, akkor az esetek egy részében titkára a bizottságnak, a másik részében pedig egyszerű bizottsági tag. Így az a) és a b) részben kapott számok összege adja a keresett számot: $31465 + 125860 = 157325$. Másik módszer, hogy a sorrendet nem nézve kiválasztjuk a másik négy bizottsági tagot az összes lehetséges módon, majd ezt a számot megszorozzuk öttel, hiszen bármelyikük lehet titkár: $\binom{31}{4} \cdot 5 = 31465 \cdot 5 = 157325$.

41. A minden lehetséges módon kitöltött lottószelvények között hány kéttalálatos szelvény van? (A kilencvenből öt számot kell eltalálni öt szám megjelölésével.)

Megoldás. A két találathoz az öt kihúzott számból valamelyik kettőt be kellett jelölnünk, és ezen felül még másik háromat. Az összes kéttalálatos szelvény száma tehát

$$\binom{5}{2} \binom{85}{3} = 10 \cdot 98770 = 987700.$$

42. Hány olyan hétjegyű szám van, amelynek számjegyei csökkenő sorrendben következnek egymás után, egyenlő számjegyeket nem engedve meg?

Megoldás. Soroljuk föl a számjegyeket csökkenő sorrendben: 9876543210. Ebből a 10 számjegyből hármat elhagyva egy a feltételeknek megfelelő számot kapunk, és a keresett számok bármelyike előállítható így. A kapott számon nem változtat semmit, hogy milyen sorrendben húzzuk ki a három számjegyet, tehát a keresett hétjegyű számok száma: $\binom{10}{3} = 120$.

43. Hányféleképpen olvasható ki az alábbi ábrákból a ZENTA, SZABADKA és a KOMBINATORIKA szó, ha mindig csak lefelé vagy jobbra léphetünk?

a)	Z	E	N	T	A	b)	S	Z	A	B
	E	N	T	A			Z	A	B	A
	N	T	A				A	B	A	D
	T	A					B	A	D	K
	A						A	D	K	A

c)	K	O	M	B	I					
	O	M	B	I	N					
	M	B	I	N	A					
	B	I	N	A	T					
	I	N	A	T	O	R	I	K	A	
						R	I	K	A	
						I	K	A		
						K	A			
						A				

Megoldás. a) A ZENTA szó kiolvasása négy lépésben történik, amelyek közül bármelyik lehet lefelé vagy jobbra lépés. Azt kell megszámolnunk tehát, hogy két elemből hányféle négyelemű sorozat készíthető. Ennek száma: $\overline{V}_4^2 = 2^4 = 16$.

b) A SZABADKA szó hét lépésből olvasható ki, és minden egyes kiolvasás a jobb alsó sarokban végződik, tehát a hét lépésből minden esetben négyszer lefelé és háromszor jobbra lépünk. Az egyes utak abban különböznek egymástól, hogy a lefelé és a jobbra lépések sorrendje különbözik egymástól. Így a SZABADKA szót összesen $\overline{P}_{4,5}^7 = 35$ -féleképpen olvashatjuk ki. (Számolhattunk volna a C_3^7 vagy a C_4^7 képlettel is.)

c) Az előző két megoldás tapasztalatait figyelembe véve a KOMBINATORIKA szó az ábrából $\overline{P}_{4,4}^8 \cdot \overline{V}_4^2 = 70 \cdot 16 = 1120$ -féleképpen olvasható ki.

44. Egy 35-ös létszámú osztályban 7 egyforma könyvet sorsolnak ki. Hány olyan eset lehetséges, amelyben az osztályba járó Tóth László pontosan egy könyvet kap, ha
- egy tanuló csak egy könyvet kaphat;
 - egy tanuló több könyvet is kaphat?

Megoldás. a) Ki kell választanunk a másik hat diákot, akik könyvet kapnak. Mivel a könyvek egyformák, ezért a kiválasztás sorrendje nem számít, és az összes eset száma $C_6^{34} = \binom{34}{6} = 1344904$.

b) Tegyük fel, hogy Tóth László megkapta a könyvét. A maradék 34 diákból kell kiválasztanunk a sorrendet nem nézve hatot úgy, hogy egy diákot többször is választhatunk. Ennek a kiválasztásnak a lehetséges száma éppen

$$\overline{C}_6^{34} = \binom{34 + 6 - 1}{6} = \binom{39}{6} = 3262623.$$

45. Hányféleképpen lehet nyolc egyforma bástyát letenni egy sakktáblára úgy, hogy a sakk szabályai szerint ne üssék egymást?

Megoldás. Az első bástyát a 64 mező akármelyikére letehetjük. Ez a bástya a saját sorát és oszlopát tartja ütés alatt, ami 7-7 mezőt jelent, ezen kívül még egy mezőt elfoglal, amelyen áll. A következő bástya elhelyezésére alkalmas mezők száma így $64 - 7 - 7 - 1 = 49$. Ez éppen egy hét mezőnyi oldalú négyzetet tesz ki. Valóban, ha az első bástya által lefoglalt mezőket „kivesszük” a sakktáblából, akkor a maradék mezőkből egy kisebb, 7×7 -es négyzet állítható össze. A második bástya a leírtak szerint 49 mező valamelyikére helyezhető el. Folytatva a megkezdett gondolatot a következő bástya 36, a következő 25, s.í.t. helyre tehető. Az összes lehetőség száma így $8^2 \cdot 7^2 \cdot 6^2 \cdot \dots \cdot 1^2 = (8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 1)^2 = (8!)^2$. Ez a szám viszont a többszöröse a keresettnek, mert például azt a helyzetet, amikor a nyolc bástya a főátlóban van, $8!$ -szor számoltuk, hiszen a bástyák ennyiféle sorrendben állíthatók föl. Mivel minden állást $8!$ -szor számoltunk, ezért a bástyákat összesen $\frac{(8!)^2}{8!} = 8!$ lehetséges módon tehetjük le.

46. Egy bolha ugrál a derékszögű koordináta-rendszerben az origóból kiindulva a tengelyekkel párhuzamosan mindig egységnyi hosszút. Hányféle utat járhat be, ha 6 ugrás után újra az origóban van?

Megoldás. Négy irányban mozoghat: fölfelé (F), lefelé (L), jobbra (J) és balra (B). Ekkor egy ugrássorozatot egyértelműen leír például egy LFLJFB sorozat. Csoport-

tosítsuk az utakat aszerint, hogy hány függőleges ugrás volt benne.

a) 0 függőleges ugrás: JJBBB betűsorozat minden permutációja egyértelműen leír egy ilyen utat, és különböző sorozat különböző utat jelent. Vagyis annyi ilyen út létezik, amennyi a JJBBB betűsorozat permutációinak száma: $\overline{P}_{3,3}^6 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$.

b) 2 függőleges ugrás: FLJJBB permutációinak a száma $\overline{P}_{2,2}^6 = \frac{6!}{2! \cdot 2!} = 180$.

c) 4 függőleges ugrás: FFLLJB permutációinak a száma $\overline{P}_{2,2}^6 = \frac{6!}{2! \cdot 2!} = 180$

d) 6 függőleges ugrás: FFFLLL permutációinak a száma $\overline{P}_{3,3}^6 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$.

Ez összesen 400 lehetséges útvonalat jelent.

47. Bizonyítsuk be, hogy $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$, ha n tetszőleges pozitív egész szám!

Megoldás. Alakítsuk át az egyenlőség bal oldalát. Vegyük észre, hogy például a harmadik tag átírható a következőképp: $3 \cdot 3! = 4! - 3!$. Ez általánosan is igaz, mert (a jobb oldalból kiindulva): $(n+1)! - n! = (n+1) \cdot n! - 1 \cdot n! = n \cdot n!$. Most a bizonyítandó egyenlőség jobb oldalát átalakíthatjuk teleszkopikus összeggé (Teleszkopikusnak nevezünk egy összeget, ha véges számú ellentett szám vagy kifejezés található benne), és ebből közvetlenül adódik a bal oldal:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + (n+1)! - n! = 2! - 1! + 3! - 2! + 4! - 3! + \dots + (n+1)! - n! = (n+1)! - 1.$$

Az állítást bebizonyíthatjuk matematikai indukcióval is.

1° $n = 1$ -re érvényes az állítás, hiszen $1 \cdot 1! = (1+1)! - 1$, s így mindkét oldal 1.

2° Tegyük fel, hogy valamely k számra is igaz az állítás, azaz teljesül, hogy

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + k \cdot k! = (k+1)! - 1.$$

3° Bizonyítsuk be, hogy $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + k \cdot k! + (k+1) \cdot (k+1)! = (k+2)! - 1$.

Valóban,

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + k \cdot k! + (k+1) \cdot (k+1)! &= \\ &= (k+1)! - 1 + (k+1) \cdot (k+1)! \\ &= (k+2)(k+1)! - 1 \\ &= (k+2)! - 1, \end{aligned}$$

ezzel az egyenlőséget bebizonyítottuk minden n természetes számra.

48. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$ egyenlőség igaz minden n pozitív egész számra.

Megoldás. Alakítsuk át a bal oldalon álló $\frac{n-1}{n!}$ alakú tagokat az

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

egyenlőség felhasználásával:

$$\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

Az előző feladat megoldásához hasonlóan most itt is egy teleszkopikus összeget kapunk, vagyis, a belső tagok összege nulla, és így adódik a jobb oldal.

A feladat típusából kifolyólag talán kézenfekvőbb a teljes indukció alkalmazása. A következőkben megmutatjuk, hogy az állítás így is bizonyítható.

1° $n = 1$ esetén az állítás nyilvánvalóan igaz, hisz mindkét oldalon $\frac{1}{2}$ áll.

2° Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamely $n = k$ számra, azaz

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(k+1)!}.$$

3° Mutassuk meg, hogy az állítás $n = k + 1$ -re is teljesül, azaz érvényes a

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{k}{(k+1)!} + \frac{k+1}{(k+2)!} = 1 - \frac{1}{(k+2)!} \text{ egyenlőség is. Mivel}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{k}{(k+1)!} + \frac{k+1}{(k+2)!} &= 1 - \frac{1}{(k+1)!} + \frac{k+1}{(k+2)!} = \\ &= 1 - \frac{1}{(k+1)!} \left(1 - \frac{k+1}{k+2}\right) = 1 - \frac{1}{(k+2)!}, \end{aligned}$$

ezzel az egyenlőség minden n természetes számra igaz.

9.2. Binomiális képlet

9.2.1. A binomiális együtthatók és tulajdonságai

Vizsgáljuk meg az $(a+b)$ binom nulladik és „ n -edik” természetes hatványaiban előforduló együtthatókat:

$$\begin{aligned} (a+b)^0 &= 1 \\ (a+b)^1 &= 1 \cdot a + 1 \cdot b \\ (a+b)^2 &= 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2 \\ (a+b)^3 &= 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2b + 3 \cdot ab^2 + 1 \cdot b^3 \\ (a+b)^4 &= 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3b + 6 \cdot a^2b^2 + 4 \cdot ab^3 + 1 \cdot b^4 \\ (a+b)^5 &= 1 \cdot a^5 + 5 \cdot a^4b + 10 \cdot a^3b^2 + 10 \cdot a^2b^3 + 5 \cdot ab^4 + 1 \cdot b^5 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Írjuk ki a megfigyelt együtthatókat a következő alakban:

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & & & & 1 \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & 1 & & 1 \\ & & & & 1 & & 2 & & 1 \\ & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\ & & & & & & \vdots & & & & & & \end{array}$$

Ezt a táblázatot Pascal-féle háromszögnek nevezzük. Ennek minden sorában az első és az utolsó számok 1-esek, a többi elem pedig az előző sorban két felette álló szám összege. A táblázatban előforduló természetes számokat „binomiális együtthaóknak” nevezzük.

Ha elfogadjuk, hogy definíció szerint $\binom{0}{0} = 1$, akkor ezek a binomiális együtthatók kiszámíthatók az $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ képlettel. Például a Pascal-háromszög ötödik sorában levő számok az $(a+b)^n$ kifejtett alakjában előforduló együtthatók, és ezek a következők:

$$\binom{4}{0} = \frac{4!}{0!(4-0)!} = \frac{4!}{0!4!} = \frac{1}{0!} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$\binom{4}{1} = \frac{4!}{1!(4-1)!} = \frac{4!}{1!3!} = \frac{4 \cdot 3!}{1 \cdot 3!} = 4,$$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! \cdot 2!} = 6,$$

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4 \cdot 3!}{3! \cdot 1!} = \frac{4}{1} = 4,$$

$$\binom{4}{4} = \frac{4!}{4!(4-4)!} = \frac{4!}{4! \cdot 0!} = \frac{1}{0!} = 1.$$

9.13. Tétel. Az $\binom{n}{k}$, $n \in N$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ binomiális együtthatókra érvényesek a következő tulajdonságok:

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; 2. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$;
3. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; 4. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, $0 \leq k \leq n-1$.

Bizonyítás. 1.

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = \frac{1}{0!} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{1}{0!} = \frac{1}{1} = 1.$$

2.

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{1! \cdot (n-1)!} = \frac{n}{1} = n,$$

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)! \cdot 1!} = \frac{n}{1} = n.$$

3.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}.$$

4.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!(k+1) + n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \\
&= \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)n!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} \\
&= \binom{n+1}{k+1}.
\end{aligned}$$

◇

A tétel 1. tulajdonsága miatt lesznek a Pascal-háromszög soraiban az első és az utolsó elemek eggyel egyenlőek, a 3. tulajdonságból következik a háromszög szimmetriája (minden sorában jobbról és balról is a k -adik elem megegyezik), a 4. tulajdonság pedig az említett összegezési tulajdonságot mondja ki.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy mindegyik tulajdonságnak kombinatorikai jelentése is van. Ez lehetőséget nyújt arra, hogy például a 4. tulajdonságot kombinatorikai úton is bebizonyítsuk. A 4. tulajdonság jobb oldalán az a mennyiség áll, ahányféleképpen $n+1$ elemből $k+1$ elemet ki tudunk választani. Számozzuk meg ezeket az elemeket 1-től $n+1$ -ig. $k+1$ elemet kétféleképpen választhatunk ki: vagy köztük van az $n+1$ -esnek számozott elem, vagy nincs. Ha köztük van, akkor az $n+1$ -es mellé a maradék n elemből k elemet $\binom{n}{k}$ különböző módon választhatunk ki, ha pedig nincs köztük, akkor n elemből kell mind a $k+1$ elemet kiválasztanunk, amelyre $\binom{n}{k+1}$ különböző lehetőségünk van. Valóban e két szám összege áll a 4. tulajdonság bal oldalán.

9.13. Példa. Bizonyítsuk be, hogy ha $n \in \mathbb{N}$ és $0 \leq k \leq n-2$, akkor

$$\binom{n+2}{k+2} = \binom{n}{k} + 2\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2}.$$

Induljunk ki a bizonyítandó összefüggés jobb oldalából, és alkalmazzuk erre kétszer is az előző 9.13. Tétel 4. tulajdonságát. Ekkor:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + 2\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} &= \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \right] + \left[\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} \right] \\
&= \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k+2} = \binom{n+2}{k+2},
\end{aligned}$$

amit bizonyítanunk kellett.

Ha viszont az egyenlőség két oldalát kombinatorikailag értelmezzük, akkor egy újabb bizonyítást kapjuk az állításnak. Az egyenlőség bal oldalán az a szám áll, ahányféleképpen $n+2$ elemből $k+2$ elemet ki tudunk választani. A szemléletesség kedvéért az $n+2$ elemből kettőt fessünk pirosra (vagy valamilyen más módon különböztessük meg a többtől). $k+2$ elem kiválasztásával a kiválasztottak között vagy nem lesz piros, vagy egy piros lesz, vagy kettő.

a) A kiválasztott elemek között nincs piros. Ez annyi féleképpen történhet meg, ahányféleképpen a nem pirosakból (n elem) kiválaszthatunk $k+2$ -t, azaz: $\binom{n}{k+2}$;

b) A kiválasztott elemek között pontosan egy piros van. Ez annyi féleképpen történhet meg, ahányféleképpen a nem pirosakból (n elem) kiválaszthatunk $k+1$ -t, és a két pirosból pedig még egyet, azaz:

$$\binom{n}{k+1} \binom{2}{1} = 2 \cdot \binom{n}{k+1};$$

c) A kiválasztott elemek között pontosan két piros van. Ez annyi féleképpen történhet meg, ahányféleképpen a nem pirosakból (n elem) kiválaszthatunk k -t, a két pirosból pedig mindkettőt kiválasztjuk, tehát:

$$\binom{n}{k} \binom{2}{2} = \binom{n}{k}.$$

Ha az a), b) és c) pontokban megszámlolt eseteket összegezzük, akkor akkor éppen a bizonyítandó egyenlőség jobb oldalát kapjuk.

9.14. Példa. Mutassuk meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ szám esetén

$$\binom{2n}{3} - 2 \cdot \binom{n}{3} = n^2(n-1).$$

Most az adott összefüggés bal oldalából indulunk ki, és azt rendezzük. Ekkor

$$\begin{aligned} \binom{2n}{3} - 2 \binom{n}{3} &= \frac{(2n)!}{3!(2n-3)!} - 2 \cdot \frac{n!}{3!(n-3)!} \\ &= \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)!}{3!(2n-3)!} - \frac{2 \cdot n(n-1)(n-2)(n-3)!}{3!(n-3)!} \\ &= \frac{2}{3!} (n(2n-1)(2n-2) - n(n-1)(n-2)) \\ &= \frac{2n}{6} (4n^2 - 4n - 2n + 2 - n^2 + 2n + n - 2) \\ &= \frac{n}{3} (3n^2 - 3n) \\ &= \frac{n}{3} \cdot 3n(n-1) \\ &= n^2(n-1). \end{aligned}$$

9.15. Példa. Az $\binom{n}{10} = \binom{n}{17}$ egyenlet megoldását a természetes számok halmazában

a 9.13. Tétel 3. állítása alapján nagyon egyszerűen megkapjuk. Mivel $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, így $k=10$ esetén $n-10=17$, ahonnan $n=27$.

9.16. Példa. Az $\binom{n}{3} + \binom{n}{2} - 8\binom{n}{1} = 0$ egyenlet megoldása a természetes számok halmazában a binomiális együtthatókra vonatkozó formula és tulajdonságok alapján a következő ekvivalens átalakítások alapján történik:

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{3} + \binom{n}{2} - 8\binom{n}{1} = 0 &\iff \frac{n!}{3!(n-3)!} + \frac{n!}{2!(n-2)!} - 8n = 0 \\
 &\iff \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} - 8n = 0 \\
 &\iff \frac{n}{6}((n-1)(n-2) + 3(n-1) - 48) = 0 \\
 &\iff \frac{n}{6} = 0 \quad \text{vagy} \quad n^2 - 3n + 2 + 3n - 3 - 48 = 0 \\
 &\iff n = 0 \quad \text{vagy} \quad n^2 = 49.
 \end{aligned}$$

A kapott egyenlet megoldásai így $n_1 = 0$, $n_2 = 7$ és $n_3 = -7$. A három szám közül csak az $n = 7$ tartozik a természetes számok halmazába, így az adott egyenletnek az \mathbf{N} halmazban csak az $n = 7$ a megoldása.

9.2.2. A binomiális képlet

9.14. Tétel. Minden n természetes szám esetén érvényes az

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

binomiális képlet (vagy Newton-féle binomiális formula), amely rövidebben felírható az

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

alakban, ahol a $\sum_{k=0}^n$ az összegezés szimbóluma, amely $k = 0$ -tól $k = n$ -ig történő összegezést jelent.

Bizonyítás. A bizonyítást a matematikai indukció módszerével adjuk meg.

1. $n = 1$ esetén az állítás igaz, mert

$$(a+b)^1 = a+b = 1 \cdot a + 1 \cdot b = \binom{1}{0}a^1 + \binom{1}{1}b^1.$$

2. Feltételezzük, hogy az állítás igaz $n = k$ esetén, azaz érvényes, hogy

$$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \dots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k.$$

3. Bizonyítsuk most az állítást $n = k + 1$ -re. Mivel

$$\begin{aligned}
 (a+b)^{k+1} &= (a+b)(a+b)^k \\
 &= (a+b) \left[\binom{k}{0} a^k + \binom{k}{1} a^{k-1} b + \binom{k}{2} a^{k-2} b^2 + \dots + \binom{k}{k-1} a b^{k-1} + \binom{k}{k} b^k \right] \\
 &= \binom{k}{0} a^{k+1} + \binom{k}{1} a^k b + \binom{k}{2} a^{k-1} b^2 + \dots + \binom{k}{k-1} a^2 b^{k-1} + \binom{k}{k} a b^k + \\
 &+ \binom{k}{0} a^k b + \binom{k}{1} a^{k-1} b^2 + \binom{k}{2} a^{k-2} b^3 + \dots + \binom{k}{k-1} a b^k + \binom{k}{k} b^{k+1} \\
 &= \binom{k}{0} a^{k+1} + \left[\binom{k}{0} + \binom{k}{1} \right] a^k b + \dots + \left[\binom{k}{k-1} + \binom{k}{k} \right] a b^k + \binom{k}{k} b^{k+1} \\
 &= \binom{k+1}{0} a^{k+1} + \binom{k+1}{1} a^k b + \binom{k+1}{2} a^{k-1} b^2 + \dots + \binom{k+1}{k} a b^k + \binom{k+1}{k+1} b^{k+1},
 \end{aligned}$$

tehát igaz az állítás minden n természetes számra is. \diamond

9.17. Példa. A binomiális képlet alapján a $(2+x)^5$ kifejtett alakja:

$$\begin{aligned}
 (2+x)^5 &= \binom{5}{0} 2^5 + \binom{5}{1} 2^4 \cdot x + \binom{5}{2} 2^3 \cdot x^2 + \binom{5}{3} 2^2 \cdot x^3 + \binom{5}{4} 2 \cdot x^4 + \binom{5}{5} x^5 \\
 &= 1 \cdot 32 + 5 \cdot 16 \cdot x + 10 \cdot 8 \cdot x^2 + 10 \cdot 4 \cdot x^3 + 5 \cdot 2 \cdot x^4 + 1 \cdot x^5 \\
 &= 32 + 80x + 80x^2 + 40x^3 + 10x^4 + x^5.
 \end{aligned}$$

Az $(a-b)^n$ különbség n -edik hatványát a fenti képlet segítségével pedig a következő módon lehet meghatározni: $(a-b)^n = (a+(-b))^n$.

9.18. Példa. A $(2a-3b)^4$ hatvány kifejtett alakja a következő:

$$\begin{aligned}
 (2a-3b)^4 &= \binom{4}{0} (2a)^4 + \binom{4}{1} (2a)^3 (-3b)^1 + \binom{4}{2} (2a)^2 (-3b)^2 + \\
 &+ \binom{4}{3} (2a)^1 (-3b)^3 + \binom{4}{4} (-3b)^4 \\
 &= 1 \cdot 16a^4 + 4 \cdot 8a^3 \cdot (-3b) + 6 \cdot 4a^2 \cdot 9b^2 + 4 \cdot 2a \cdot (-27b^3) + 1 \cdot 81b^4 \\
 &= 16a^4 - 96a^3b + 216a^2b^2 - 216ab^3 + 81b^4.
 \end{aligned}$$

9.19. Példa. Számítsuk ki az $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$ binomiális együtthatók összegét. Ekkor az $(a+b)^n$ hatványban $a=1$ és $b=1$ választás esetén

$$\begin{aligned}
 (1+1)^n &= \binom{n}{0} 1^n + \binom{n}{1} 1^{n-1} \cdot 1 + \dots + \binom{n}{n-1} 1 \cdot 1^{n-1} + \binom{n}{n} 1^n \\
 &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n},
 \end{aligned}$$

s mivel $(1+1)^n = 2^n$, így a keresett összeg

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

9.20. Példa. Hasonlóképpen adódik, ha az $(a+b)^n$ hatványban $a = 1$ és $b = -1$ a választás, hogy egyrészt $(1-1)^n = 0^n = 0$, másrészt

$$\begin{aligned}(1-1)^n &= \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}1^{n-1} \cdot (-1) + \binom{n}{2}1^{n-2} \cdot (-1)^2 + \dots + \binom{n}{n}(-1)^n \\ &= \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n}(-1)^n, \\ \text{tehát} \quad &\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.\end{aligned}$$

9.21. Példa. A 9.19. Példa és a 9.20. Példa egyenletét összeadva „ n a páratlan számok felett” kiesnek, s így

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = 2^{n-1}.$$

Ha a fenti egyenletet kivonjuk a 9.20. Példa egyenletéből, az „ n a páros számok felett” kiesnek, s így

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots = 2^{n-1}.$$

FELADATOK

1. Határozzuk meg az n értékét az $(a+b)^n$ kifejezésben, ha tudjuk, hogy a tizenegyedik és a kilencedik tag binomiális együtthatóinak aránya 7 : 15.

Megoldás. A tizenegyedik tagnál $k = 10$, a kilencedik tagnál $k = 8$, tehát a következő ekvivalens átalakításokat végezhetjük el:

$$\begin{aligned}\binom{n}{10} : \binom{n}{8} = 7 : 15 &\iff 15 \cdot \binom{n}{10} = 7 \cdot \binom{n}{8} \\ &\iff 15 \cdot \frac{n!}{10!(n-10)!} = 7 \cdot \frac{n!}{8!(n-8)!} \\ &\iff \frac{8!(n-8)!}{10!(n-10)!} = \frac{7}{15} \\ &\iff \frac{8!(n-8)(n-9)(n-10)!}{10 \cdot 9 \cdot 8! \cdot (n-10)!} = \frac{7}{15} \\ &\iff (n-8)(n-9) = \frac{7 \cdot 9 \cdot 10}{15} \\ &\iff (n-8)(n-9) = 42,\end{aligned}$$

azaz két szomszédos természetes szám szorzata 42. Ez csak úgy lehetséges, ha a nagyobbik 7, azaz $n-8 = 7$, ahonnan $n = 15$.

2. Határozzuk meg az $\left(\frac{1}{a} + a^2\right)^9$ kifejezésben azt a tagot, amely nem tartalmazza az a paramétert.

Megoldás.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{a} + a^2\right)^9 &= \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} \left(\frac{1}{a}\right)^{9-k} (a^2)^k \\ &= \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} \frac{a^{2k}}{a^{9-k}} = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} a^{3k-9}.\end{aligned}$$

Ebből a tíz összeadandóból pontosan az a tag nem tartalmazza az a paramétert, amelyben a kitevő 0, tehát $3k - 9 = 0$, ebből $k = 3$, vagyis a negyedik tag nem tartalmazza az a paramétert. Valóban,

$$\binom{9}{3} a^0 = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6!} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 7}{1} = 84,$$

így ez az egyetlen tag, amelyben nincs a .

3. Határozzuk meg az $\left(\frac{1}{x} - x \cdot \sqrt[3]{x^2}\right)^n$ kifejezésben azt a tagot, amely nem tartalmaz x -et, ha tudjuk, hogy az összes binomiális együttható összege 256.

Megoldás. Először a kitevőt, az n -t kell meghatározni abból a feltételből, hogy a kifejtés együtthatóinak az összege 256. A 9.19. Példa alapján a binom együtthatóinak az összege:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Ekkor $2^n = 256$, ahonnan $2^n = 2^8$, és így $n = 8$. A feladat most már azonos az előző példával, ugyanis az $\left(\frac{1}{x} - x \cdot \sqrt[3]{x^2}\right)^8$ kifejezésben keressük azt a tagot, amely nem tartalmaz x -et. Az előzőhöz hasonló eljárással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x} - x \cdot \sqrt[3]{x^2}\right)^8 &= \sum_{k=0}^8 \binom{8}{k} (-1)^k \frac{x^k x^{\frac{2}{3}k}}{x^{8-k}} \\ &= \sum_{k=0}^8 \binom{8}{k} (-1)^k \frac{x^k x^{\frac{2}{3}k}}{x^{8-k}} \\ &= \sum_{k=0}^8 \binom{8}{k} (-1)^k x^{\frac{5}{3}k + k - 8},\end{aligned}$$

ahonnan az $\frac{5}{3}k + k - 8 = 0$ feltételből kapjuk a keresett tagot. Innen $k = 3$, vagyis a kifejtés negyedik tagja a

$$\binom{8}{3} \cdot (-1)^3 x^0 = -\frac{8!}{3!5!} = -\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5!} = 8 \cdot 7 = -56$$

nem tartalmaz x -et.

4. Határozzuk meg a $\left(9x - \frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^n$ kifejtésében a 13. tagot, ha tudjuk, hogy a harmadik tag binomiális együtthatója 105.

Megoldás. A harmadik tagnál $k = 2$, tehát $\binom{n}{2} = 105$, ennek megoldásával kapjuk a kitevőt, vagyis a következő ekvivalens átalakításokat kell elvégeznünk:

$$\frac{n!}{2!(n-2)!} = 105 \iff \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 201 \iff n(n-1) = 210.$$

Két szomszédos természetes szám szorzata pontosan akkor 210, ha a nagyobbik szám a 15, tehát $n = 15$. Ekkor $\left(9x - \frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^{15}$ kifejtésében keressük a 13. tagot, melyet $k = 12$ -re kapunk meg, és így a keresett tag:

$$\binom{15}{12} (9x)^{15-12} \left(\frac{-1}{\sqrt{3x}}\right)^{12} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12!}{12! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{(9x)^3}{(3x)^6} = 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot \frac{3^6 x^3}{3^6 x^6} = \frac{455}{x^3}.$$

5. A $\left((\sqrt{x})^{\frac{1}{\log x+1}} + \sqrt[12]{x}\right)^6$ kifejezésben határozzuk meg az x értékét, ha tudjuk, hogy a kifejtett alak negyedik tagja 200.

Megoldás. A negyedik tagot $k = 3$ -ra kapjuk, tehát a következő ekvivalens átalakításokat kell elvégeznünk:

$$\begin{aligned} \binom{6}{3} \left((\sqrt{x})^{\frac{1}{\log x+1}}\right)^{6-3} (\sqrt[12]{x})^3 = 200 &= \frac{6!}{3!3!} x^{\frac{3}{2\log x+2}} x^{\frac{3}{12}} = 200 \\ &= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3!} x^{\frac{3}{2\log x+2} + \frac{1}{4}} = 200 \\ &= 5 \cdot 4 \cdot x^{\frac{6+\log x+1}{4(\log x+1)}} = 200 \\ &= x^{\frac{7+\log x}{4+4\log x}} = 10 \\ &= \log x^{\frac{7+\log x}{4(\log x+1)}} = \log 10 \\ &= \frac{7+\log x}{4(\log x+1)} \log x = 1 \\ &= 7\log x + \log^2 x = 4\log x + 4 \\ &= \log^2 x + 3\log x - 4 = 0. \end{aligned}$$

Ezt az egyenletet $\log x = t$ helyettesítéssel oldhatjuk meg. Az adott helyettesítés alkalmazásával a $t^2 + 3t - 4 = 0$ másodfokú egyenletet nyerjük, amelynek megoldásai $t_1 = 1$ és $t_2 = -4$. Visszahelyettesítés után a

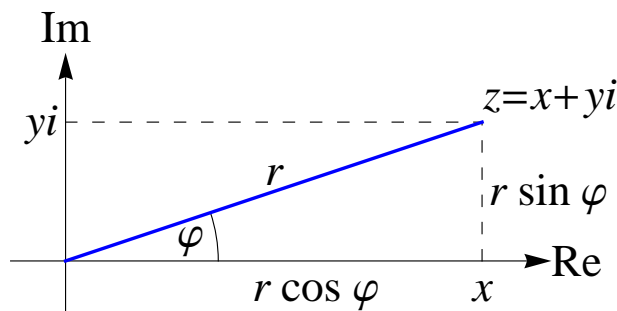
$$\log x = 1 \quad \text{és} \quad \log x = -4$$

logaritmusos egyenleteket kapjuk, amelyek megoldásai $x_1 = 10^1$ és $x_2 = 10^{-4}$. A feladatnak tehát két megoldása van, $x_1 = 10$ és $x_2 = 0,0001$.

10. Komplex számok trigonometrikus és exponenciális alakja

10.1. Komplex számok trigonometrikus alakja

A 6. fejezetben megismertedtünk a komplex számok $z = x + iy$ algebrai alakjával. Most a komplex számok egy másféle megadási módját fogjuk tárgyalni. Szemléljük a $z = x + iy$ algebrai alaknak megfelelő z pontot a komplex számsíkban.



A fenti ábráról leolvasható, hogy r jelöli a z komplex szám modulusát, φ pedig a z komplex szám argumentumát. Ekkor

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad \text{ahonnan} \quad x = r \cos \varphi, \quad \text{valamint} \quad \sin \varphi = \frac{y}{r}, \quad \text{ahonnan} \quad y = r \sin \varphi.$$

Behelyettesítve a kapott kifejezéseket a komplex szám algebrai alakjába a

$$z = x + yi = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

kifejezést kapjuk, amelyet a *komplex szám trigonometrikus alakjának* nevezünk. Ugyanakkor az is könnyen belátható, hogy

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Vegyük észre, hogy ha $z = x + iy \neq 0$, akkor $x^2 + y^2 > 0$, s így elvégezhető a következő transzformáció:

$$z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = r \left(\frac{x}{r} + i \frac{y}{r} \right). \quad (10.1)$$

Mivel $x^2 + y^2 > 0$ esetén $\sqrt{x^2 + y^2} > |x|$ és $\sqrt{x^2 + y^2} > |y|$, ezért

$$\left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq 1 \quad \text{és} \quad \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 = 1.$$

Ez azt jelenti, hogy a $[0, 2\pi)$ vagy $(-\pi, \pi]$ intervallumban pontosan egy olyan φ valós szám van (a φ szög radiánmértéke), amelyre

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} \quad \text{és} \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r}.$$

A kapott kifejezéseket a (10.1) kifejezésbe helyettesítve azt kapjuk, hogy a $z = x + iy$ algebrai alakhoz egyértelműen hozzárendelhető a $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ trigonometrikus alak.

10.1. Definíció. A $z \neq 0$ komplex szám

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

megadási módját, ahol $r > 0$ és $\varphi \in (-\pi, \pi]$, a z komplex szám trigonometrikus alakjának nevezzük, ahol a pozitív r szám a z komplex szám modulusa, φ pedig a z komplex szám argumentuma.

A szinusz és koszinusz függvények $2k\pi$ szerinti periodikusságából következik, hogy

$$\text{ha } \cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad \text{akkor } \cos(\varphi + 2k\pi) = \frac{x}{r},$$

valamint

$$\text{ha } \sin \varphi = \frac{y}{r}, \quad \text{akkor } \sin(\varphi + 2k\pi) = \frac{y}{r}.$$

Ez azt jelenti, hogy a z komplex szám $z = x + iy$ algebrai alakjához végtelen sok trigonometrikus alakban megadott komplex szám társítható, melyek argumentumai $2k\pi$ -vel térnek el egymástól, ahol $k \in \mathbf{Z}$. Az elmondottak alapján kimondható a következő tétel.

10.1. Tétel. Két trigonometrikus alakban adott komplex szám akkor és csak akkor egyenlő egymással, ha abszolút értékük egyenlő, argumentumuk különbsége pedig 2π egész számú többszöröse.

10.1. Példa. A $z = 1 + i$ komplex szám trigonometrikus alakjának meghatározásakor kétféleképpen járhatunk el.

I. módszer. Mivel $z = 1 + i$ távolsága az origótól $r = |z| = \sqrt{2}$, így

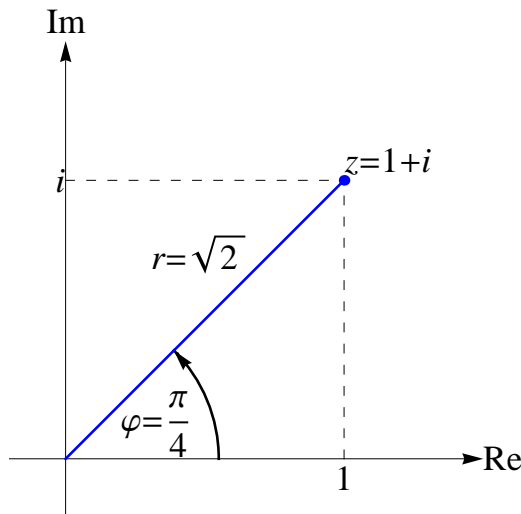
$$z = 1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

ami azt jelenti, hogy olyan φ szöget keresünk a $(-\pi, \pi]$ intervallumban, amelyre

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{és} \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Mivel ez a $\varphi = \frac{\pi}{4}$ szög, így a keresett trigonometrikus alak $z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$.

II. módszer. Rajzoljuk meg a komplex síkban a $z = 1 + i$ pontot. Ennek távolsága az origótól $|z| = r = \sqrt{2}$, s ez origón és az adott ponton áthaladó félegyenes az x -tengely pozitív irányával $\varphi = \frac{\pi}{4}$ szöget zár be, s ez a szög a keresett argumentum a $(-\pi, \pi]$ intervallumban.



Ezért

$$\begin{aligned} z = 1 + i &= r (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

10.2. Példa. Hasonlóan kaphatjuk meg a $z_1 = 2i$ és $z_2 = -4$ komplex számok trigonometrikus alakját is.

A $z_1 = 2i$ esetben $r_1 = |z_1| = 2$ és $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, tehát $z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$.

A $z_2 = -4$ esetben $r_2 = |z_2| = 4$ és $\varphi_2 = \pi$, tehát $z_2 = 4 (\cos \pi + i \sin \pi)$.

10.3. Példa. A $z = -\sqrt{3} + i$ komplex szám esetében $r = |z| = \sqrt{3+1} = 2$, s így

$$z = -\sqrt{3} + i = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right).$$

Azt a $\varphi \in (-\pi, \pi]$ argumentumot keressük, amelyre $\cos \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ és $\sin \varphi = \frac{1}{2}$. Mivel az előző feltételek $\varphi = \frac{5\pi}{6}$ esetén teljesülnek, ezért $z = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$ az adott komplex szám trigonometriai alakja.

10.4. Példa. Írjuk át a $z = 1 + \cos \alpha + i \sin \alpha$, $\alpha \in (-\pi, \pi]$, algebrai alakban felírt komplex számot trigonometrikus alakba. Ekkor $\operatorname{Re} z = 1 + \cos \alpha$ és $\operatorname{Im} z = \sin \alpha$. Járjunk el a következő módon:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{(1 + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2} = \sqrt{1 + 2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \\ &= \sqrt{2 + 2 \cos \alpha} = \sqrt{2(1 + \cos \alpha)} \sqrt{2 \cdot 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = 2 \cos \frac{\alpha}{2}, \quad \text{ahol} \quad \cos \frac{\alpha}{2} > 0. \end{aligned}$$

A továbbiakban

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Innen $\varphi = \frac{\alpha}{2}$ és a $z = 1 + \cos \alpha + i \sin \alpha$ szám trigonometriai alakja

$$z = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right).$$

10.2. Komplex számok szorzása és osztása trigonometrikus alakban

A komplex számok trigonometrikus alakja alkalmas a szorzat és hányados kiszámítására. Legyenek

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \quad \text{és} \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

adott komplex számok trigonometrikus alakban. Ekkor

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

A fenti számítások alapján kimondható a következő tétel.

10.2. Tétel. *A $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ trigonometrikus alakban megadott komplex számok szorzata a*

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

komplex szám, vagyis komplex számokat trigonometrikus alakban úgy szorzunk, hogy a modulusokat összeszorozzuk, argumentumaikat pedig összeadjuk. A $\varphi_1 + \varphi_2$ argumentum helyett választhatjuk a $\varphi_1 + \varphi_2 + 2\pi$ vagy $\varphi_1 + \varphi_2 - 2\pi$ argumentumot is, ha az esik bele a $(-\pi, \pi]$ intervallumba.

Számoljuk most ki a $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ trigonometrikus alakban megadott komplex számok hányadosát.

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \cdot (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \cdot (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)}{\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2} \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{1} \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \end{aligned}$$

A fenti gondolatmenet alapján érvényes a következő tétel.

10.3. Tétel. *A $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ trigonometrikus alakban megadott komplex számok hányadosának trigonometrikus alakja*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)],$$

ahol $\varphi_1 - \varphi_2 \in (-\pi, \pi]$, azaz két trigonometrikus alakban megadott komplex számok hányadosán azt a komplex számot értjük, amelynek modulusa az osztandó és osztó modulusának hányadosa, argumentuma pedig az osztandó és osztó argumentumának különbségével egyenlő. Ha $\varphi_1 - \varphi_2 \in (-\pi, \pi]$ nem teljesül, akkor a hányados argumentumának a $\varphi_1 - \varphi_2 - 2\pi$ vagy a $\varphi_1 - \varphi_2 + 2\pi$ szöveget vesszük.

10.5. Példa. Írjuk fel a $z = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$ komplex számot trigonometrikus alakban.

Célszerű az osztást trigonometrikus alakban elvégezni, majd a kapott eredményt algebrai alakra hozni. A számláló, valamint nevező átalakítása:

$$z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}, \quad \text{valamint} \quad z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}.$$

Ezért

$$\begin{aligned} z = \frac{z_1}{z_2} &= \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{1 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)}{1 \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)} \\ &= \cos \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

A kapott trigonometrikus alakból kiolvasható, hogy a hányados modulusa $r = |z| = 1$, argumentuma pedig $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Figyelembe véve a megfelelő szinusz és koszinusz értékeket,

a keresett hányados algebrai alakja $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$.

10.6. Példa. Keressük meg az előző példában szereplő $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ és $z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ komplex számok modulusát és argumentumát. A képlet szerint

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \left[1 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) \right] \cdot \left[1 \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \right] \\ &= 1 \cdot \cos \left(\frac{5\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= 1 \cdot \left(\cos \left(\frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{2} \right) \right) \\ &= \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \\ &= -i. \end{aligned}$$

A számításból közvetlenül kiolvasható, hogy a szorzat modulusa $r = |z| = 1$, az argumentuma pedig $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

10.3. Komplex számok hatványozása trigonometrikus alakban

Mivel a $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ trigonometrikus alakban megadott komplex számok szorzata

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

a valós és komplex számok szorzásának asszociatív, valamint a valós számok összeadásának asszociatív tulajdonsága alapján következik, hogy n darab $z_k = r_k(\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) trigonometrikus alakban megadott komplex szám szorzata

$$z_1 \cdot z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n (\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n)),$$

ahol r_k ($k = 1, 2, \dots, n$) a szorzandó számok modulusait, φ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) pedig a megfelelő argumentumokat jelöli. A $\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n$ szög megfelelő számú 2π hozzáadásával $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n + 2m\pi$, $m \in \mathbf{Z}$, alakra hozható, ahol $\varphi \in (-\pi, \pi]$. Alkalmazzuk a szorzás szabályát arra a speciális esetre, amikor n természetes szám és

$$z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Ekkor $r_1 = r_2 = \cdots = r_n = r$ és $\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_n = \varphi$ adódik, valamint érvényes, hogy $r_1 \cdot r_2 \cdots r_n = r^n$ és $\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n = n\varphi$, tehát

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad n = 1, 2, \dots$$

Ez a Moivre-féle képlet, amelyet a következő tételben fogalmazzunk meg:

10.4. Tétel. Ha $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, akkor minden $n \in \mathbf{N}$ számra érvényes, hogy

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

vagyis egy komplex számot úgy emelhetünk n -edik hatványra, hogy modulusát n -edik hatványra emeljük, argumentumát pedig megszorozzuk n -nel. Ha $n\varphi \notin (-\pi, \pi]$, akkor mindig egyértelműen létezik egy olyan $m \in \mathbf{Z}$ szám, amelyre $n\varphi + 2m\pi \in (-\pi, \pi]$.

10.7. Példa. Ha $z \neq 0$ és $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, akkor keressük meg, hogy mi az $\frac{1}{z}$ komplex szám trigonometrikus alakja. Mivel

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{r(\cos \varphi - i \sin \varphi)}{r^2(\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \varphi - i \sin \varphi)} = \frac{r(\cos \varphi - i \sin \varphi)}{r^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \\ &= \frac{\cos \varphi - i \sin \varphi}{r} = \frac{1}{r} (\cos \varphi - i \sin \varphi) = \frac{1}{r} (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)), \end{aligned}$$

így a $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ komplex szám ismeretében, amelynek modulusa r és argumentuma φ , az $\frac{1}{z}$ komplex szám modulusa $\frac{1}{r}$, argumentuma pedig $-\varphi$ lesz.

A fenti gondolatmenetet felhasználva bizonyíthatjuk a következő tételt.

10.5. Tétel. Legyen $z \neq 0$ és $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ a z komplex szám trigonometrikus alakja. Ekkor minden $k \in \mathbf{Z}$ számra érvényes, hogy

$$z^k = r^k(\cos k\varphi + i \sin k\varphi),$$

ha $k\varphi \notin (-\pi, \pi]$, illetve minden z^k esetén egyértelműen létezik egy olyan $m \in \mathbf{Z}$ szám, amelyre $k\varphi + 2m\pi \in (-\pi, \pi]$.

Bizonyítás. 1° Ha $k \in \mathbf{Z}^+$, akkor a tétel a Moivre-formulát adja.

2° Ha $k = 0$, akkor $z^0 = 1 = r^0(\cos(0 \cdot \varphi) + i \sin(0 \cdot \varphi)) = r^0(\cos 0 + i \sin 0)$

3° Ha $k \in \mathbf{Z}^-$, akkor $-k \in \mathbf{N}$, és a 10.7. Példa példa eredményét felhasználva kapjuk a következőket:

$$\begin{aligned} z^k &= \left(\frac{1}{z}\right)^{-k} = \left[\frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))\right]^{-k} = \\ &= \left(\frac{1}{r}\right)^{-k} (\cos(-k)(-\varphi) + i \sin(-k)(-\varphi)) = r^k (\cos k\varphi + i \sin k\varphi). \end{aligned}$$

◇

10.8. Példa. Számítsuk ki a $z = (-1 - i)^{-10}$ komplex szám modulusát és argumentumát. Ahhoz, hogy a fenti tétel felhasználhassuk, át kell alakítani a $-1 - i$ komplex számot trigonometrikus alakba.

$$-1 - i = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{4} \right) \right),$$

s így

$$\begin{aligned} z = (-1 - i)^{-10} &= \left[\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{4} \right) \right) \right]^{-10} \\ &= (\sqrt{2})^{-10} \left(\cos(-10) \left(-\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin(-10) \left(-\frac{3\pi}{4} \right) \right) \\ &= \frac{1}{32} \left(\cos \frac{15\pi}{2} - i \sin \frac{15\pi}{2} \right) \\ &= \frac{1}{32} \left(\cos \frac{3\pi}{2} - i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -\frac{1}{32}i. \end{aligned}$$

A számítások alapján a z szám modulusa $r = \frac{1}{32}$, argumentuma pedig $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

10.9. Példa. Írjuk fel algebrai alakban a $z = \frac{(1+i)^8}{(1-i\sqrt{3})^6}$ komplex számot. Alakítsuk át a számlálóban és nevezőben a hatványok alapjait trigonometrikus alakba. Ekkor

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right),$$

valamint

$$1 - i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right),$$

s így

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{(1+i)^8}{(1-i\sqrt{3})^6} = \frac{(\sqrt{2})^8 \left(\cos\left(8 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(8 \cdot \frac{\pi}{4}\right) \right)}{2^6 \left(\cos 6\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin 6\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right)} \\
 &= \frac{16(\cos 2\pi + i \sin 2\pi)}{64(\cos(-\pi) + i \sin(-\pi))} \\
 &= \frac{1}{4}(\cos(2\pi + \pi) + i \sin(2\pi + \pi)) \\
 &= \frac{1}{4}(\cos(3\pi) + i \sin(3\pi)) \\
 &= \frac{1}{4}(\cos(\pi) + i \sin(\pi)) \\
 &= \frac{1}{4}(-1 + i \cdot 0) = -\frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

10.4. Komplex számok gyökvonása

A komplex számok algebrai alakjának tárgyalása során a 6.9. Definícióban azt mondtuk, hogy ha $n \in \mathbf{N}$ és $z \in \mathbf{C}$, akkor a z komplex szám n -edik gyöke alatt azt a komplex számot értjük, amelynek n -edik hatványa z . Most megmutatjuk, hogy felhasználva a komplex számok trigonometrikus alakját és a Moivre képletet, hogyan juthatunk el egy olyan képletig, amellyel ki lehet számolni bármely komplex szám n -edik gyökét.

Legyen $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, egy tetszőleges komplex szám. A Moivre képlet segítségével könnyen belátható, hogy a

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

komplex számok mindegyikének n -edik hatványa z -vel egyenlő. Ugyanis tetszőleges k esetén

$$\begin{aligned}
 (z_k)^n &= (\sqrt[n]{r})^n \left(\cos \left(n \cdot \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(n \cdot \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \right) \\
 &= r (\cos(\varphi + 2k\pi) + i \sin(\varphi + 2k\pi)) \\
 &= r (\cos \varphi + i \sin \varphi) = z,
 \end{aligned}$$

vagyis a z_k számok mindegyike valóban a z komplex szám n -edik gyöke.

Továbbra is érvényes, hogy ha $\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \notin (-\pi, \pi]$, akkor 2π hozzáadásával vagy kivonásával mindig kaphatunk olyan argumentumot, amely a $(-\pi, \pi]$ intervallumba tartozik.

10.2. Definíció. Legyen n tetszőleges természetes szám. A $z = 1$ komplex szám n -edik egységgyökeinek nevezzük az $\sqrt[n]{1}$ számok mindegyikét.

$n = 2$ esetén a $\sqrt{1}$ számokat második egységgyököknek nevezzük, $n = 3$ esetén a $\sqrt[3]{1}$ számokat harmadik egységgyököknek, $n = 4$ esetén a $\sqrt[4]{1}$ számokat negyedik egységgyököknek, és így tovább.

10.10. Példa. Számítsuk ki a harmadik egységgyököket, vagyis a $\sqrt[3]{1}$ számokat. A $\sqrt[3]{1}$ számok a $z^3 = 1$ egyenlet megoldásai, tehát három olyan komplex számot keresünk, amely az adott harmadfokú egyenletnek megoldása. Írjuk fel az 1-et trigonometrikus alakba. Mivel $1 = 1(1 + i \cdot 0) = 1(\cos 0 + i \sin 0)$, így a szám modulusa $r = 1$, argumentuma pedig $\varphi = 0$. Ekkor

$$z_k = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{0 + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{0 + 2k\pi}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2.$$

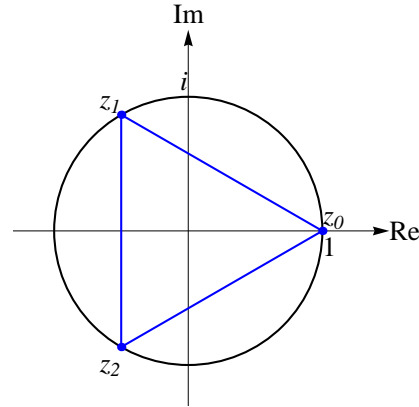
A gyökök kiszámítása a következő módon történik:

$$k = 0 \quad \text{esetén} \quad z_0 = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0) = 1(1 + i \cdot 0) = 1,$$

$$k = 1 \quad \text{esetén} \quad z_1 = 1 \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$k = 2 \quad \text{esetén} \quad z_2 = 1 \cdot \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vegyük észre, hogy ha berajzoljuk a komplex számsíkba a z_0 , z_1 és z_2 komplex számokat, akkor azok egy szabályos háromszög csúcsait képezik, amelynek körülírható köre az egységsugarú középponti kör, a z_0 , z_1 és z_2 komplex számokhoz tartozó csúcsok pedig ezen a körvonalon, ugyanebben a sorrendben, a $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = \frac{2\pi}{3}$ és $\varphi_2 = \frac{4\pi}{3}$ argumentumokhoz tartoznak.



10.11. Példa. Számítsuk ki a $z = i$ komplex szám négyzetgyökeit. Írjuk fel először a $z = i$ komplex számot trigonometrikus alakban. Mivel

$$i = 1 \cdot (0 + i \cdot 1) = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi/2 + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\pi/2 + 2k\pi}{2} \right),$$

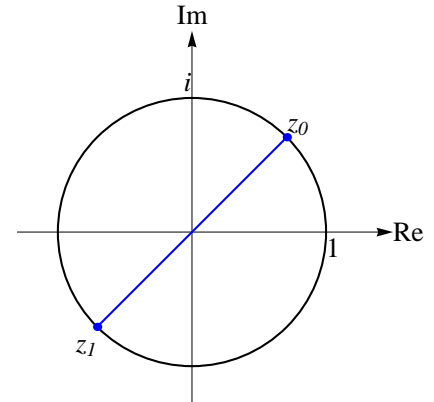
így $r = 1$ a modulus és $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Ezért $z_k = \sqrt[2]{1} \left(\cos \frac{0 + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{0 + 2k\pi}{2} \right)$, $k = 0, 1$,

a gyökök kiszámítása pedig a következő módon történik:

$$k = 0 \quad \text{esetén} \quad z_0 = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$k = 1 \quad \text{esetén} \quad z_1 = 1 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Felírhatjuk tehát, hogy $\sqrt{i} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i)$.



10.12. Példa. Oldjuk meg a $z^6 + 1 = 0$ egyenletet a komplex számok halmazában. Először fejezzük ki az egyenletből z -t, s ekkor $z = \sqrt[6]{-1}$ komplex számot kapjuk. Írjuk fel a -1 -et trigonometrikus alakban. Mivel

$$-1 = 1 \cdot (-1 + i \cdot 0) = 1 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi),$$

ez azt jelenti, hogy a -1 mint komplex szám modulusa $r = 1$, argumentuma pedig $\varphi = \pi$. Ezért

$$z_k = \sqrt[6]{1} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{6} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{6} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

A gyökök kiszámítása most a következő módon történik:

$$k = 0 \text{ esetén } z_0 = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2},$$

$$k = 1 \text{ esetén } z_1 = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 0 + i \cdot 1 = i,$$

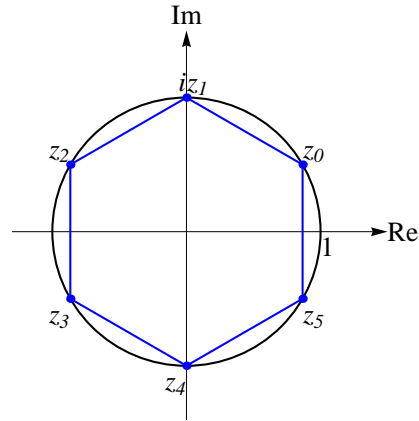
$$k = 2 \text{ esetén } z_2 = 1 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2},$$

$$k = 3 \text{ esetén } z_3 = 1 \cdot \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2},$$

$$k = 4 \text{ esetén } z_4 = 1 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = 0 + i \cdot (-1) = -i,$$

$$k = 5 \text{ esetén } z_5 = 1 \cdot \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}.$$

A z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 és z_5 komplex számok egy olyan szabályos hatszög csúcsai, amelynek körülírt köre az egységsugarú középponti kör. Az egységsugarú körön a z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 és z_5 komplex számoknak megfelelő csúcsoknak, ugyanebben a sorrendben, a $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_2 = \frac{5\pi}{6}$, $\varphi_3 = \frac{7\pi}{6}$, $\varphi_4 = \frac{3\pi}{2}$ és $\varphi_5 = \frac{11\pi}{6}$ argumentumok felelnek meg.



Általánosan érvényes, hogy az n -edik gyökök az origó középpontú $\sqrt[n]{r}$ sugarú körön vannak, egy szabályos n -szög csúcspontjaiban.

10.5. Komplex számok exponenciális alakja

A komplex számok trigonometrikus alakjával végzett műveletek emlékeztetnek az azonos alapú hatványokkal végzett műveletekre. Ez nem véletlen, hiszen a komplex számok az algebrai és trigonometrikus alak mellett felírhatók még egy harmadik formában is, az úgynevezett *exponenciális vagy Euler-féle alakban*. Ehhez a felírási módhoz a komplex függvénytanban érvényes Euler-féle képletet használjuk fel, amelyben az e szám (e a természetes logaritmus alapszáma, $e = 2.71828\dots$) komplex hatványát definiáljuk, amely szerint

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}.$$

E formula ismeretében a trigonometrikus alakban megadott $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ komplex szám

$$z = re^{i\varphi}$$

exponenciális alakjához jutunk, ahol r a z komplex szám modulusa, φ pedig z argumentuma.

A fenti összefüggések alapján az algebrai alakban megadott $z = x + iy$ komplex szám esetén felírható, hogy

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

10.6. Tétel. Legyenek $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ és $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ exponenciális alakban megadott komplex számok, n pedig természetes szám. Ekkor

$$1^\circ \text{ } z_1 \text{ és } z_2 \text{ szorzata } z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

$$2^\circ \text{ } z_1 \text{ és } z_2 \text{ hányadosa } \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

$$3^\circ \text{ } z_1 \text{ } n\text{-edik hatványa } z_1^n = r_1^n e^{in\varphi_1},$$

$$4^\circ \text{ } z_1 \text{ } n\text{-edik gyöke pedig } \sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{r_1} e^{i\frac{\varphi_1 + 2k\pi}{n}}.$$

Bizonyítás. Az Euler-képlet alapján felírható, hogy a megadott komplex számok trigonometrikus alakjai $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$. Helyettesítsük be az adott képletekbe a komplex számok trigonometrikus alakjait és végezzük el a jól ismert műveleteket.

1^o

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \\ &= r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \end{aligned}$$

2^o

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \\ &= \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \end{aligned}$$

3°

$$\begin{aligned}
z_1^n &= (r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1))^n \\
&= r_1^n (\cos n\varphi_1 + i \sin n\varphi_1) \\
&= r_1^n e^{in\varphi_1}.
\end{aligned}$$

4°

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{z_1} &= \sqrt[n]{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)} \\
&= \sqrt[n]{r_1} \left(\cos \frac{\varphi_1 + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi_1 + 2k\pi}{n} \right) \\
&= \sqrt[n]{r_1} e^{i \frac{\varphi_1 + 2k\pi}{n}}.
\end{aligned}$$

◇

10.13. Példa. Ha $z_1 = 2e^{i\pi}$ és $z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$, akkor

$$z_1 \cdot z_2 = 6e^{i(\pi + \frac{\pi}{6})} = 6e^{i\frac{7\pi}{6}} = 6e^{-i\frac{5\pi}{6}}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}e^{i(\pi - \frac{\pi}{6})} = \frac{2}{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}, \quad z_1^6 = 2^6 e^{i6\pi} = 2^6 e^{i \cdot 0} = 64.$$

A komplex számok exponenciális alakja gyakran áttekinthetőbbé teszi a feladatok megoldását. Rendelkezik a komplex számok trigonometrikus alakjának minden előnyével, de a legérdekesebb és legfontosabb előnye mégis az, hogy segítségével elvégezhetővé válik a logaritmálás művelete is, és valójában ez jelenti a komplex számok halmazának teljességét.

10.7. Tétel. Legyen $z = re^{i\varphi}$ olyan komplex szám, hogy $z \neq 0$, a pedig olyan pozitív valós szám, hogy $a \neq 1$. Ekkor

$$\log_a z = \log_a r + i\varphi \log_a e.$$

Bizonyítás. Ha $z = re^{i\varphi}$ és $z \neq 0$, akkor $r \neq 0$, tehát $r > 0$. Ekkor

$$\log_a z = \log_a (re^{i\varphi}) = \log_a r + \log_a e^{i\varphi} = \log_a r + i\varphi \log_a e,$$

ahol a logaritmusfüggvény értelmezett, hiszen r és e pozitív valós számok. ◇

A fenti tétel lehetővé teszi komplex számok, és ezen belül negatív számok logaritmusának értelmezését is.

10.14. Példa. Számoljuk ki a $z = -2$ komplex szám 3-as alapú logaritmusát, azaz $\log_3(-2)$ értékét. Az előző tétel alapján

$$\log_3(-2) = \log_3(2e^{i\pi}) = \log_3 2 + i\pi \log_3 e.$$

10.15. Példa. Számoljuk ki a $z = 1 + i\sqrt{3}$ komplex szám 5-ös alapú logaritmusát, azaz hogy mennyi $\log_5(1 + i\sqrt{3})$. Mivel $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, így az előző tétel alapján

$$\log_5(1 + i\sqrt{3}) = \log_3(2e^{i\frac{\pi}{3}}) = \log_5 2 + i\frac{\pi}{3} \log_5 e.$$

FELADATOK

1. Írjuk fel trigonometrikus és exponenciális alakban a $z_1 = -i$, $z_2 = \sqrt{3} - i$, valamint $z_3 = 2 + \sqrt{3} + i$ komplex számokat.

Megoldás. Ha $z_1 = -i$, akkor $r_1 = 1$ és $\varphi_1 = \frac{3\pi}{2}$, tehát trigonometrikus alakja

$$z_1 = 1 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right), \text{ exponenciális alakja pedig } z_1 = 1 \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}} = e^{i\frac{3\pi}{2}}.$$

Ha $z_2 = \sqrt{3} - i$, akkor $r_2 = 2$ és $\varphi_2 = -\frac{\pi}{6}$, tehát a z_2 szám trigonometrikus alakja

$$z_2 = 2 \cdot \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right), \text{ exponenciális alakja pedig } z_2 = 2 \cdot e^{-i\frac{\pi}{6}} = e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

Ha $z_3 = 2 + \sqrt{3} + i$, akkor

$$r_3 = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{2(4 + 2\sqrt{3})} = \sqrt{2(1 + \sqrt{3})^2} = (1 + \sqrt{3})\sqrt{2},$$

$$\text{és } 0 < \varphi_3 < \frac{\pi}{2}, \text{ ahol } \operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 - \sqrt{3}.$$

Mivel $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$, így

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3} \cdot 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} \cdot \frac{1 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} - 4}{-2} = 2 - \sqrt{3}.$$

A z_3 komplex szám argumentuma tehát $\varphi_3 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$, trigonometrikus és exponenciális alakja pedig $z_3 = \sqrt{2}(1 + \sqrt{3}) \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) = \sqrt{2}(1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{12}}$.

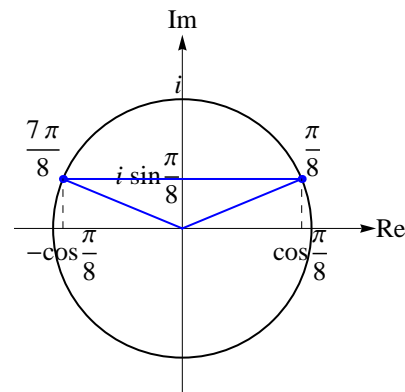
2. Határozzuk meg a $z = -\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}$ komplex szám trigonometrikus és exponenciális alakját.

Megoldás. A $z = -\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}$ nem trigonometrikus alakja a z komplex számnak, mert nem $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ alakú. Így ezt az alakot algebrai alaknak tekintjük, ahol $\operatorname{Re} z = -\cos \frac{\pi}{8}$ és $\operatorname{Im} z = \sin \frac{\pi}{8}$. Ekkor a modulus

$$r = |z| = \sqrt{\left(-\cos \frac{\pi}{8} \right)^2 + \left(\sin \frac{\pi}{8} \right)^2} = \sqrt{\cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8}} = \sqrt{1} = 1.$$

A z szám a második negyedben van, így $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$, a grafikonról pedig könnyen olvasható, hogy $\varphi = \pi - \frac{\pi}{8} = \frac{7\pi}{8}$. Így

$$z = 1 \cdot \left(\cos \frac{7\pi}{8} + i \sin \frac{7\pi}{8} \right) = e^{i\frac{7\pi}{8}}.$$



3. Határozzuk meg a $z = \sin \alpha + i \cos \alpha$ komplex szám trigonometrikus és exponenciális alakját.

Megoldás. Mivel $\operatorname{Re} z = \sin \alpha$ és $\operatorname{Im} z = \cos \alpha$, így a z komplex szám modulusa $r = |z| = \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \sqrt{1} = 1$. Ha φ a z komplex szám argumentuma, akkor $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$, mivel $\cos \varphi = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha$ és $\sin \varphi = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \alpha$. Így a z komplex szám keresett trigonometrikus és exponenciális alakja

$$z = 1 \cdot \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right) = 1 \cdot e^{i(\frac{\pi}{2} - \alpha)}.$$

4. Írjuk fel a $z = 1 + \cos \alpha - i \sin \alpha$ komplex szám trigonometrikus és exponenciális alakját.

Megoldás. Alkalmazva a félszögekre vonatkozó trigonometrikus azonosságokat, gondolkodhatunk a következő módon:

$$\begin{aligned} z &= (1 + \cos \alpha) - i \sin \alpha \\ &= 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2i \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \\ &= 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} - i \sin \frac{\alpha}{2} \right) \\ &= 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \left(-\frac{\alpha}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\alpha}{2} \right) \right), \end{aligned}$$

s így a z szám modulusa $r = |z| = 2 \cos \frac{\alpha}{2}$, argumentuma pedig $\varphi = \arg z = -\frac{\alpha}{2}$. A keresett alakok tehát

$$z = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \left(-\frac{\alpha}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\alpha}{2} \right) \right) = 2 \cos \frac{\alpha}{2} e^{-i\frac{\alpha}{2}}.$$

5. Írjuk fel a $z = \frac{1}{(1 + i\sqrt{3})^3}$ komplex számot trigonometrikus és exponenciális alakban.

Megoldás. Legyen $z_1 = (1 + i\sqrt{3})^3$, és tudjuk, hogy ha $z_1 = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, akkor

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)).$$

Határozzuk meg tehát a z_1 komplex szám r modulusát és φ argumentumát. Mivel

$$1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right),$$

így

$$z_1^3 = 2^3 \left(\cos \left(3 \cdot \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(3 \cdot \frac{\pi}{3} \right) \right) = 8 (\cos \pi + i \sin \pi).$$

Ezért

$$z = \frac{1}{(1 + i\sqrt{3})^3} = \frac{1}{8} \cdot (\cos(-\pi) + i \sin(-\pi)) = \frac{1}{8} e^{-i\pi}.$$

6. Határozzuk meg a $z = \frac{1 - \cos \alpha + i \sin \alpha}{1 + \cos \alpha + i \sin \alpha}$ komplex szám modulusát, argumentumát, valamint trigonometrikus és exponenciális alakját.

Megoldás. Végezzük el a következő ekvivalens átalakításokat:

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1 - \cos \alpha) + i \sin \alpha}{(1 + \cos \alpha) + i \sin \alpha} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2i \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2i \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} + i \cos \frac{\alpha}{2} \right)}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right)} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right)}{\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right). \end{aligned}$$

A fenti levezetésből következik, hogy a z komplex szám trigonometrikus és exponenciális alakja

$$z = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha + 2k\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha + 2k\pi \right) \right) = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} e^{i \left(\frac{\pi}{2} - \alpha + 2k\pi \right)},$$

ahol $k \in \mathbf{Z}$ és $\frac{\pi}{2} - \alpha + 2k\pi \in (-\pi, \pi]$.

7. Határozzuk meg a $z = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right)^{2011} + \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right)^{2011}$ komplex szám algebrai, trigonometrikus és exponenciális alakját.

Megoldás. Mivel

$$1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \quad \text{és} \quad 1 - i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right),$$

így az első összeadandó

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right)^{2011} &= \left(\frac{2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)}{2} \right)^{2011} = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^{2011} = \\ &= \cos \frac{2011\pi}{3} + i \sin \frac{2011\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{aligned}$$

a második összeadandó pedig

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right)^{2011} &= \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)^{2011} = \\ &= \cos \left(-\frac{2011\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{2011\pi}{3} \right) = \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Így a keresett z komplex szám algebrai alakja

$$z = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = 1,$$

trigonometrikus és exponenciális alakja pedig

$$z = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0) = 1 \cdot e^{0 \cdot i}.$$

8. Írjuk fel a $z = \left(\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{1 - i} \right)^{20}$ komplex szám valós és képzetes részét, modulusát és argumentumát.

Megoldás. Végezzük el a következő ekvivalens átalakításokat:

$$\begin{aligned}
 z &= \left(\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{1 - i} \right)^{20} = \left(\frac{\sqrt{2}(1 + i)}{1 - i} \right)^{20} \\
 &= 2^{10} \left(\frac{\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)} \right)^{20} \\
 &= 2^{10} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \right)^{20} \\
 &= 2^{10} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)^{20} \\
 &= 2^{10} \left(\cos \frac{20\pi}{2} + i \sin \frac{20\pi}{2} \right) \\
 &= 2^{10} (\cos 10\pi + i \sin 10\pi) \\
 &= 2^{10} (\cos 0 + i \sin 0) \\
 &= 2^{10} (1 + i \cdot 0) = 2^{10}.
 \end{aligned}$$

Ezért

$$\operatorname{Re} z = 2^{10}, \quad \operatorname{Im} z = 0, \quad |z| = 2^{10}, \quad \arg z = 0.$$

9. Határozzuk meg a $z = \frac{(-1 + i\sqrt{3})^{15}}{(1 - i)^{20}} + \frac{(-1 - i\sqrt{3})^{15}}{(1 + i)^{20}}$ komplex szám valós és képzetes részét, modulusát és argumentumát.

Megoldás. Mivel $-1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$, ezért

$$(-1 + i\sqrt{3})^{15} = 2^{15} (\cos 10\pi + i \sin 10\pi) = 2^{15} (\cos 0 + i \sin 0) = 2^{15}.$$

Az $1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$ egyenlőség alapján kapjuk, hogy

$$(1 - i)^{20} = 2^{10} (\cos(-5\pi) + i \sin(-5\pi)) = 2^{10} (\cos \pi + i \sin \pi) = -2^{10}.$$

A $-1 - i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right) \right)$ egyenlőség miatt,

$$(-1 - i\sqrt{3})^{15} = 2^{15} (\cos(-10\pi) + i \sin(-10\pi)) = 2^{15} (\cos 0 + i \sin 0) = 2^{15}.$$

Az $1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ egyenlőség alapján következik, hogy

$$(1 + i)^{20} = 2^{10} (\cos 5\pi + i \sin 5\pi) = 2^{10} (\cos \pi + i \sin \pi) = -2^{10}.$$

A fenti számolások alapján

$$z = \frac{2^{15}(\cos 0 + i \sin 0)}{2^{10}(\cos \pi + i \sin \pi)} + \frac{2^{15}(\cos 0 + i \sin 0)}{2^{10}(\cos \pi + i \sin \pi)},$$

illetve

$$z = 2^5 (\cos(-\pi) + i \sin(-\pi)) + 2^5 (\cos(-\pi) + i \sin(-\pi)),$$

ahonnan

$$z = 2 \cdot 2^5 (\cos \pi - i \sin \pi) = 2^6 (\cos \pi - i \sin \pi) = 2^6 (-1 + i \cdot 0) = -2^6.$$

- 10.** Felhasználva a komplex számok trigonometrikus alakját és a binomiális képletet, fejezzük ki a $\sin 5\alpha$ kifejezést $\sin \alpha$, valamint a $\cos 5\alpha$ kifejezést $\cos \alpha$ segítségével.

Megoldás. Fejezzük ki a $\cos \alpha + i \sin \alpha$ ötödik hatványát egyrészt a Moivre-formula, másrészt pedig a binomiális képlet segítségével. Ekkor

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^5 = \cos 5\alpha + i \sin 5\alpha, \quad \text{valamint}$$

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + i \sin \alpha)^5 &= \cos^5 \alpha + 5i \cos^4 \alpha \sin \alpha - 10 \cos^3 \alpha \sin^2 \alpha - \\ &\quad - 10i \cos^2 \alpha \sin^3 \alpha + 5 \cos \alpha \sin^4 \alpha + i \sin^5 \alpha \end{aligned}$$

Kiegyenlítve a két oldalt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \cos 5\alpha + i \sin 5\alpha &= \cos^5 \alpha + 5i \cos^4 \alpha \sin \alpha - 10 \cos^3 \alpha \sin^2 \alpha - \\ &\quad - 10i \cos^2 \alpha \sin^3 \alpha + 5 \cos \alpha \sin^4 \alpha + i \sin^5 \alpha, \end{aligned}$$

rendezés után pedig a következőket:

$$\begin{aligned} \cos 5\alpha + i \sin 5\alpha &= \cos^5 \alpha - 10 \cos^3 \alpha \sin^2 \alpha + 5 \cos \alpha \sin^4 \alpha + \\ &\quad + i (5 \cos^4 \alpha \sin \alpha - 10 \cos^2 \alpha \sin^3 \alpha + \sin^5 \alpha). \end{aligned}$$

Mivel két komplex szám akkor és csak akkor egyenlő egymással, ha valós részeik is és képzetes részeik is megegyeznek, így

$$\begin{aligned} \cos 5\alpha &= \cos^5 \alpha - 10 \cos^3 \alpha \sin^2 \alpha + 5 \cos \alpha \sin^4 \alpha \\ &= \cos^5 \alpha - 10 \cos^3 \alpha (1 - \cos^2 \alpha) + 5 \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha)^2 \\ &= \cos^5 \alpha - 10 \cos^3 \alpha + 10 \cos^5 \alpha + 5 \cos \alpha (1 - 2 \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) \\ &= \cos^5 \alpha - 10 \cos^3 \alpha + 10 \cos^5 \alpha + 5 \cos \alpha - 10 \cos^3 \alpha + 5 \cos^5 \alpha \\ &= 16 \cos^5 \alpha - 20 \cos^3 \alpha + 5 \cos \alpha, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 5\alpha &= 5 \cos^4 \alpha \sin \alpha - 10 \cos^2 \alpha \sin^3 \alpha + \sin^5 \alpha \\ &= 5(1 - \sin^2 \alpha)^2 \sin \alpha - 10(1 - \sin^2 \alpha) \sin^3 \alpha + \sin^5 \alpha \\ &= 5(1 - 2 \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha) \sin \alpha - 10 \sin^3 \alpha + 10 \sin^5 \alpha + \sin^5 \alpha \\ &= 5 \sin \alpha - 10 \sin^3 \alpha + 5 \sin^5 \alpha - 10 \sin^3 \alpha + 11 \sin^5 \alpha \\ &= 16 \sin^5 \alpha - 20 \sin^3 \alpha + 5 \sin \alpha. \end{aligned}$$

A fenti számolások alapján

$$\cos 5\alpha = 16 \cos^5 \alpha - 20 \cos^3 \alpha + 5 \cos \alpha,$$

és

$$\sin 5\alpha = 16 \sin^5 \alpha - 20 \sin^3 \alpha + 5 \sin \alpha.$$

11. Oldjuk meg a $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ egyenletet.

Megoldás. Vegyük észre, hogy $z \neq 1$ feltétel mellett az adott egyenlet ekvivalens a

$$(z - 1)(z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$$

egyenlettel, amelyből rendezés után a $z^6 - 1 = 0$ hatodfokú egyenletet kapjuk, amelynek gyökei a $z_k = \sqrt[6]{1}$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) számok. Mivel $1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$, így

$$z_k = \sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{1} \left(\cos \frac{0 + 2k\pi}{6} + i \sin \frac{0 + 2k\pi}{6} \right) = \cos \frac{k\pi}{3} + i \sin \frac{k\pi}{3},$$

ahonnan

$$k = 0 \quad \text{esetén} \quad z_0 = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0) = 1 + i \cdot 0 = 1,$$

$$k = 1 \quad \text{esetén} \quad z_1 = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$k = 2 \quad \text{esetén} \quad z_2 = 1 \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$k = 3 \quad \text{esetén} \quad z_3 = 1 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi) = -1 - i \cdot 0 = -1,$$

$$k = 4 \quad \text{esetén} \quad z_4 = 1 \cdot \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$k = 5 \quad \text{esetén} \quad z_5 = 1 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Mivel $z \neq 1$, így a megoldáshalmaz:

$$M = \left\{ -1, \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

12. Számítsuk ki a $z = -1 - i\sqrt{3}$ komplex szám negyedik gyökeit.

Megoldás. Mivel

$$-1 - i\sqrt{3} = 2 \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right),$$

így

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{4} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Ekkor

$$k = 0\text{-ra,} \quad z_0 = \sqrt[4]{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt[4]{2} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt[4]{2}}{2} (1 + i\sqrt{3}),$$

$$k = 1\text{-re,} \quad z_1 = \sqrt[4]{2} \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \sqrt[4]{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt[4]{2}}{2} (-\sqrt{3} + i),$$

$$k = 2\text{-re}, \quad z_2 = \sqrt[4]{2} \cdot \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = \sqrt[4]{2} \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt[4]{2}}{2} (-1 + i\sqrt{3}),$$

$$k = 3\text{-ra}, \quad z_3 = \sqrt[4]{2} \cdot \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) = \sqrt[4]{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt[4]{2}}{2} (\sqrt{3} - i).$$

13. Számítsuk ki mennyi $\sqrt[3]{-\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}}$.

Megoldás. Rendezzük a gyök alatti számkifejezést, majd vonjunk harmadik gyököt. Ekkor

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4},$$

majd $k = 0, 1, 2$ értékekre

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}} = \cos \frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{3} = \cos \frac{3\pi + 8k\pi}{12} + i \sin \frac{3\pi + 8k\pi}{12}.$$

$$\text{Ha } k = 0 \text{ akkor, } z_0 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i),$$

$$\text{ha } k = 1 \text{ akkor, } z_1 = \cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{4} ((-1 - \sqrt{3}) + i(\sqrt{3} - 1)),$$

$$\text{ha } k = 3 \text{ akkor, } z_2 = \cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{4} ((-1 + \sqrt{3}) + i(-\sqrt{3} - 1)),$$

mivel

$$\begin{aligned} \cos \frac{11\pi}{12} &= \cos 165^\circ = \cos(120^\circ + 45^\circ) = \cos 120^\circ \cos 45^\circ - \sin 120^\circ \sin 45^\circ = \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (-1 - \sqrt{3}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{11\pi}{12} &= \sin 165^\circ = \sin(120^\circ + 45^\circ) = \sin 120^\circ \cos 45^\circ + \cos 120^\circ \sin 45^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \frac{19\pi}{12} &= \cos 285^\circ = \cos(240^\circ + 45^\circ) = \cos 240^\circ \cos 45^\circ - \sin 240^\circ \sin 45^\circ = \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (-1 + \sqrt{3}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{19\pi}{12} &= \sin 285^\circ = \sin(240^\circ + 45^\circ) = \sin 240^\circ \cos 45^\circ + \cos 240^\circ \sin 45^\circ = \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (-\sqrt{3} - 1). \end{aligned}$$

14. Számítsuk ki mennyi $\sqrt[3]{\frac{z-1}{z+1}}$, ha $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

Megoldás. Határozzuk meg először a köbgyök alatti kifejezés értékét.

$$\begin{aligned}\frac{z-1}{z+1} &= \frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{2} - 1}{\frac{1+i\sqrt{3}}{2} + 1} = \frac{\frac{1+i\sqrt{3}-2}{2}}{\frac{1+i\sqrt{3}+2}{2}} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}} = \\ &= \frac{2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)}{2\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} (0 + i \cdot 1) = i \frac{1}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\frac{z-1}{z+1}} &= \sqrt[3]{\frac{i}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt[3]{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt[3]{1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)}}{\sqrt[6]{3}} = \\ &= \frac{\sqrt[3]{1} \cdot \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right)}{\sqrt[6]{3}} = \frac{1}{\sqrt[6]{3}} \left(\cos \frac{\pi + 4k\pi}{6} + i \sin \frac{\pi + 4k\pi}{6} \right).\end{aligned}$$

$$\text{Ha } k=0 \text{ akkor, } z_0 = \frac{1}{\sqrt[6]{3}} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{\sqrt[6]{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right),$$

$$\text{ha } k=1 \text{ akkor, } z_1 = \frac{1}{\sqrt[6]{3}} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \frac{1}{\sqrt[6]{3}} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right),$$

$$\text{ha } k=3 \text{ akkor, } z_2 = \frac{1}{\sqrt[6]{3}} \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt[6]{3}} (0 - 1 \cdot i) = -\frac{i}{\sqrt[6]{3}}.$$

A $\sqrt[3]{\frac{z-1}{z+1}}$ értékei tehát $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ esetén az

$$\frac{1}{2\sqrt[6]{3}} (\sqrt{3} + i), \quad \frac{1}{2\sqrt[6]{3}} (-\sqrt{3} + i) \quad \text{és} \quad -\frac{i}{\sqrt[6]{3}} \quad \text{számok.}$$

15. Határozzuk meg a $(2+5i)z^3 - 2i + 5 = 0$ egyenlet megoldáshalmazát.

Megoldás. Fejezzük ki a z ismeretlent az adott egyenletből. Ekkor

$$z = \sqrt[3]{\frac{-5+2i}{2+5i}},$$

majd rendezve a gyök alatti kifejezést adódik, hogy

$$\frac{-5+2i}{2+5i} = \frac{-5+2i}{2+5i} \cdot \frac{2-5i}{2-5i} = \frac{-10+25i+4i+10}{4+25} = \frac{29i}{29} = i.$$

A feladat tehát a

$$z = \sqrt[3]{\frac{-5+2i}{2+5i}} = \sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)}$$

kifejezés meghatározása. Gyökvonás után az egyenlet megoldásai a

$$z_k = 1 \cdot \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2$$

számok, ezek pedig a következők:

$$k = 0 \quad \text{esetén} \quad z_0 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i),$$

$$k = 1 \quad \text{esetén} \quad z_1 = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i),$$

$$k = 2 \quad \text{esetén} \quad z_2 = 1 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right) = 0 - 1 \cdot i = -i.$$

Az egyenlet megoldáshalmaza tehát

$$M = \left\{ \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i), \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i), -i \right\}.$$

- 16.** Oldjuk meg a $z^3 = \left(\frac{8(1+i)}{\sqrt{2}}\right)^2$ egyenletet.

Megoldás. Rendezzük először az egyenlet jobb oldalát. Ekkor

$$z^3 = \frac{64(1+2i+i^2)}{2} = 32 \cdot 2i = 64i, \quad \text{ahonnan} \quad z = \sqrt[3]{64i} = 4\sqrt[3]{i}.$$

Felhasználva az előző feladat megoldását, az adott egyenlet megoldáshalmaza

$$M = \left\{ 2(\sqrt{3} + i), 2(-\sqrt{3} + i), -4i \right\}.$$

- 17.** Határozzuk meg a $z^8 - 624z^4 - 625 = 0$ egyenlet megoldáshalmazát.

Megoldás. Bontsuk az egyenlet bal oldalát tényezők szorzatára a következőképpen:

$$(z^4 - 625)(z^4 + 1) = 0.$$

Ebből $z^4 - 625 = 0$ vagy $z^4 + 1 = 0$, ahonnan

$$z_k = \sqrt[4]{625}, \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad \text{és} \quad z_\ell = \sqrt[4]{-1}, \quad \ell = 0, 1, 2, 3.$$

Mivel

$$\begin{aligned} z_k &= 5 \cdot \sqrt[4]{1} = 5 \cdot \sqrt[4]{\cos 0 + i \sin 0} = 5 \cdot \left(\cos \frac{2k\pi}{4} + i \sin \frac{2k\pi}{4}\right) = \\ &= 5 \cdot \left(\cos \frac{k\pi}{2} + i \sin \frac{k\pi}{2}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, \end{aligned}$$

ezért az első négy megoldás a következőképpen kapható meg:

$$k = 0 \quad \text{esetén} \quad z_0 = 5 \cdot (\cos 0 + i \sin 0) = 5 \cdot (1 + i \cdot 0) = 5,$$

$$k = 1 \quad \text{esetén} \quad z_1 = 5 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 5 \cdot (0 + i \cdot 1) = 5i,$$

$$k = 2 \quad \text{esetén} \quad z_2 = 5 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi) = 5 \cdot (-1 + i \cdot 0) = -5,$$

$$k = 3 \quad \text{esetén} \quad z_3 = 5 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = 5 \cdot (0 - i \cdot 1) = -5i.$$

Mivel

$$\begin{aligned} z_\ell &= \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{\cos \pi + i \sin \pi} = \cos \frac{\pi + 2\ell\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\ell\pi}{4} = \\ &= \cos \frac{(2\ell + 1)\pi}{4} + i \sin \frac{(2\ell + 1)\pi}{4}, \quad \ell = 0, 1, 2, 3, \end{aligned}$$

ezért a további négy megoldást a következő módon kapjuk:

$$\ell = 0 \quad \text{esetén} \quad z_4 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i),$$

$$\ell = 1 \quad \text{esetén} \quad z_5 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} (-1 + i),$$

$$\ell = 2 \quad \text{esetén} \quad z_6 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} (-1 - i),$$

$$\ell = 3 \quad \text{esetén} \quad z_7 = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - i).$$

Az egyenlet megoldáshalmaza tehát

$$M = \left\{ 5, -5, 5i, -5i, \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i), \frac{\sqrt{2}}{2} (-1 + i), \frac{\sqrt{2}}{2} (-1 - i), \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - i) \right\}.$$

18. Keressük meg a $z^6 - (8 - i)z^3 - 8i = 0$ egyenlet megoldásait.

Megoldás. Rendezzük az egyenlet bal oldalát a következő módon:

$$z^6 - (8 - i)z^3 - 8i = z^6 - 8z^3 + iz^3 - 8i = z^3(z^3 - 8) + i(z^3 - 8) = (z^3 - 8)(z^3 + i).$$

Az eredeti egyenlettel ekvivalens egyenlet tehát a

$$(z^3 - 8)(z^3 + i) = 0,$$

ahonnan $z^3 - 8 = 0$ vagy $z^3 + i = 0$ következik, a kapott egyenletek megoldásai pedig

$$z_k = \sqrt[3]{8}, \quad k = 0, 1, 2 \quad \text{és} \quad z_\ell = \sqrt[3]{-i}, \quad \ell = 0, 1, 2, 3.$$

Mivel

$$z_k = 2 \cdot \sqrt[3]{1} = 2 \cdot \sqrt[3]{\cos 0 + i \sin 0} = 2 \cdot \left(\cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2,$$

ezért az első három megoldás a következő:

$$k = 0 \quad \text{esetén} \quad z_0 = 2 \cdot (\cos 0 + i \sin 0) = 2 \cdot (1 + i \cdot 0) = 2,$$

$$k = 1 \quad \text{esetén} \quad z_1 = 2 \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 + i\sqrt{3},$$

$$k = 2 \quad \text{esetén} \quad z_2 = 2 \cdot \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 - i\sqrt{3}.$$

Mivel

$$\begin{aligned} z_\ell = \sqrt[3]{-i} &= \sqrt[3]{\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}} = \cos \frac{\frac{3\pi}{2} + 2\ell\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{2} + 2\ell\pi}{3} = \\ &= \cos \frac{3\pi + 4\ell\pi}{6} + i \sin \frac{3\pi + 4\ell\pi}{6}, \quad \ell = 0, 1, 2, \end{aligned}$$

ezért a további négy megoldást a következő módon kapjuk:

$$\ell = 0 \quad \text{esetén} \quad z_4 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = 0 + i \cdot 1 = i,$$

$$\ell = 1 \quad \text{esetén} \quad z_5 = \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (-\sqrt{3} - i),$$

$$\ell = 2 \quad \text{esetén} \quad z_6 = \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (\sqrt{3} - i).$$

Az egyenlet megoldáshalmaza tehát

$$M = \left\{ 2, i, -1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}, \frac{1}{2} (-\sqrt{3} - i), \frac{1}{2} (\sqrt{3} - i) \right\}.$$

19. Oldjuk meg a $z^2 - (4 - 6i)z + 10 - 20i = 0$ másodfokú egyenletet.

Megoldás. Az egyenlet komplex együtthatós, így a megoldásai nem konjugált komplex számok, a másodfokú egyenlet megoldóképlete viszont ebben az esetben is alkalmazható. Ekkor

$$\begin{aligned} z_{1/2} &= \frac{4 - 6i \pm \sqrt{(-4 + 6i)^2 - 4(10 - 20i)}}{2} \\ z_{1/2} &= \frac{4 - 6i \pm \sqrt{16 - 48i - 36 - 40 + 80i}}{2} \\ z_{1/2} &= \frac{4 - 6i \pm \sqrt{-60 + 32i}}{2} \\ z_{1/2} &= 2 - 3i \pm \sqrt{-15 + 8i} \\ z_{1/2} &= 2 - 3i \pm \sqrt{1 + 8i - 16} \\ z_{1/2} &= 2 - 3i \pm \sqrt{(1 + 4i)^2} \\ z_{1/2} &= 2 - 3i \pm (1 + 4i), \end{aligned}$$

illetve

$$z_1 = 2 - 3i + (1 + 4i) = 3 + i \quad \text{és} \quad z_2 = 2 - 3i - (1 + 4i) = 1 - 7i$$

az adott másodfokú egyenlet megoldási.

20. Mutassuk meg, hogy minden $x \in \mathbf{R}$ szám esetén érvényes, hogy

$$\cos \alpha = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{és} \quad \sin \alpha = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Megoldás. Induljunk ki abból a tényből, hogy e^{ix} egy $r = 1$ modulusú és $\varphi = x$ argumentumú komplex szám exponenciális alakja, ezért felírható trigonometrikus alakja, azaz

$$e^{ix} = 1 \cdot (\cos x + i \sin x).$$

Hasonlóan írhatjuk fel a másik esetben, hogy

$$e^{-ix} = 1 \cdot (\cos(-x) + i \sin(-x)).$$

Így

$$\begin{aligned} \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} &= \frac{1}{2} (\cos x + i \sin x + \cos(-x) + i \sin(-x)) \\ &= \frac{1}{2} (\cos x + i \sin x + \cos x - i \sin x) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cos x = \cos x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} &= \frac{1}{2i} (\cos x + i \sin x - \cos(-x) - i \sin(-x)) \\ &= \frac{1}{2i} (\cos x + i \sin x - \cos x + i \sin x) \\ &= \frac{1}{2i} \cdot 2i \sin x = \sin x. \end{aligned}$$

11. Polinomok

11.1. Komplex együtthatós polinom fogalma

11.1. Definíció. Legyen n természetes szám vagy nulla, a_0, a_1, \dots, a_n pedig legyenek komplex számok. A

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

alakú kifejezést a z változó komplex együtthatós polinomjának nevezzük, ahol az a_0, a_1, \dots, a_n számok a polinom együtthatói. Ha $a_n \neq 0$, akkor a P polinom n -edfokú. A polinom fokát $\deg(P)$ jelöli. Ha $\deg(P) = n$, akkor a_n a P polinom főegyütthatója. Ha $a_n = 1$, akkor a P polinomot normálnak mondjuk. Bármelyik $i = 1, 2, \dots, n$ esetén $a_i z^i$ a polinom i -edfokú tagja, a_i pedig az i -edfokú tag együtthatója; a_0 -t a polinom nulladfokú tagjának vagy szabad tagjának nevezzük.

A polinomokat kis vagy nagy latin, esetleg görög betűkkel jelöljük. Ha egyértelmű, hogy z a polinomban szereplő változó, akkor azt elhagyhatjuk. A jelölés tehát: $P(z), q(z), \varphi(z)$ vagy P, q, φ, \dots , stb. lehet. Ha az a_0, a_1, \dots, a_n együtthatók mind valós, racionális, illetve egész számok, akkor rendre *valós együtthatós*, *racionális együtthatós*, illetve *egész együtthatós polinomról* beszélünk. Valós polinomok esetében a változó jelölésére általában x -et használunk.

11.1. Példa. $P(z) = z^4 + 2iz^3 - (1+i)z^2 - 3z + 7 + i$ komplex együtthatós polinom, $Q(x) = x^3 + \pi$ valós együtthatós polinom, $R(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{9}{8}$ racionális együtthatós polinom, $S(x) = x^2 - 2$ egész együtthatós polinom.

Nyilvánvalóan léteznek n -edfokú polinomok minden $n \in \mathbf{N}$ -re. Ha az összes lehetséges ilyen polinomot tekintjük, akkor a $P_1(z) = 2z + i$ elsőfokú, $P_2(z) = z^2 + (1+2i)z - 4i$ másodfokú, $P_3(z) = iz^3 - 2iz^2 + z + 1 - i$ harmadfokú, stb. polinomok mellett találkozunk nulladfokú polinomokkal is. Az $n = 0$ esetben a polinom alakja $P_0(z) = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Ezek a nullától különböző komplex számok. A 0 számot is polinomnak tekintjük, ez lesz a *nullapolinom*, az egyetlen olyan polinom, amelynek fokszámát nem definiáljuk.

11.2. Definíció. A

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

és

$$Q(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_2 z^2 + b_1 z + b_0$$

komplex együtthatós polinomok pontosan akkor egyenlők, ha azonos fokúak, azaz $n = m$ és megfelelő együtthatóik megegyeznek, azaz $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$.

11.2. Műveletek polinomokkal

Most definiáljuk komplex együtthatós polinomokra az összeadás és a szorzás műveletét. Ezeket a műveleteket a valós együtthatós polinomokon végzett műveletek mintájára vezetjük be, melyet ismerünk az elemi algebrából.

11.3. Definíció. $n \geq m$ esetén a

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

és

$$Q(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_2 z^2 + b_1 z + b_0$$

komplex együtthatós polinomok összegének nevezzük az

$$S(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_2 z^2 + c_1 z + c_0$$

polinomot, melynek együtthatóit a $P(z)$ és a $Q(z)$ polinomban a változó ugyanazon hatványa mellett álló együtthatók összeadásával kapjuk, azaz

$$c_i = a_i + b_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n,$$

ahol $n > m$ esetén a $b_{m+1}, b_{m+2}, \dots, b_n$ együtthatókat nullának kell tekintenünk.

Az összeg fokszáma n , ha $n > m$, de $n = m$ esetén előfordul, hogy kisebb n -nél, ha $b_n = -a_n$.

11.4. Definíció. A $P(z)$ és a $Q(z)$ polinom szorzatának az

$$R(z) = d_{n+m} z^{n+m} + d_{n+m-1} z^{n+m-1} + \dots + d_2 z^2 + d_1 z + d_0$$

polinomot nevezzük, melynek együtthatóit a következőképpen definiáljuk:

$$d_i = \sum_{k+\ell=i} a_k b_\ell \quad i = 0, 1, \dots, n+m-1, n+m$$

azaz a d_i együttható előáll, ha összegezzük $P(z)$ és $Q(z)$ együtthatóinak összes olyan szorzatait, melyekben a tényezők indexeinek összege i ; speciálisan:

$$d_0 = a_0 b_0, \quad d_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \quad \dots, \quad d_{n+m} = a_n b_m.$$

Ez utóbbiból következik, hogy $d_{n+m} \neq 0$, s így két polinom szorzatának fokszáma egyenlő a tényezők fokszámának összegével. A fenti definícióból az is adódik, hogy nullapolinomtól különböző polinomok szorzata sohasem lehet nullapolinom.

11.5. Definíció. A

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

polinom $\alpha \neq 0$ komplex számmal való szorzatának nevezzük a

$$T(z) = e_n z^n + e_{n-1} z^{n-1} + \dots + e_2 z^2 + e_1 z + e_0$$

polinomot, ahol

$$e_i = \alpha a_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n,$$

azaz az e_i együttható előáll α és a megfelelő a_i együttható összeszorzásával.

Az α komplex számmal beszorzott polinom fokszáma megegyezik az eredeti polinom fokszámaival.

Ha $\alpha = -1$ -gyel szorozzuk a $P(z)$ polinomot, akkor $P(z)$ *ellentett polinomját* kapjuk, a

$$-P(z) = -a_n z^n - a_{n-1} z^{n-1} - \dots - a_2 z^2 - a_1 z - a_0$$

polinomot, amelynek alapvető tulajdonsága, hogy ha hozzáadjuk az eredeti polinomhoz, akkor a nullapolinomot kapjuk:

$$P(z) + (-P(z)) = 0.$$

Ugyanakkor, az ellentett polinom segítségével elvégezhető a kivonás két polinom között. Legyen $-Q(z)$ a $Q(z)$ polinom ellentett polinomja. Ekkor a $P(z)$ polinomból a $Q(z)$ polinomot úgy vonhatjuk ki, hogy hozzáadjuk az ellentett polinomot:

$$P(z) - Q(z) = P(z) + (-Q(z)).$$

Milyen tulajdonságokkal rendelkeznek a polinomokon definiált műveletek? Az *összeadás kommutativitása és asszociativitása* a komplex számok összeadásának megfelelő tulajdonságaiból következik, azaz tetszőleges P , Q és R polinomokra érvényes, hogy

$$P + Q = Q + P, \quad (P + Q) + R = P + (Q + R).$$

A *szorzás kommutativitása* a számok szorzásának kommutativitásából és abból a körülményből következik, hogy a polinomok szorzásának definíciójában a polinomtényezők együtthatói teljesen egyenrangú szerepet játszanak. A *szorzás asszociativitása és a disztributív törvény* szintén érvényes, azaz tetszőleges P , Q és R polinomokra igaz, hogy

$$PQ = QP, \quad (PQ)R = P(QR), \quad P(Q + R) = PQ + PR.$$

Ugyanakkor tetszőleges α , β komplex számra és P , Q polinomra, a következő állítás igaz:

$$\alpha(\beta P) = (\alpha\beta)P, \quad \alpha(P + Q) = \alpha P + \alpha Q, \quad (\alpha + \beta)P = \alpha P + \beta P.$$

A polinomok szorzásának inverz művelete, a polinomok osztása, nem létezik. Ebben a vonatkozásban a komplex együtthatós polinomok összessége az egész számok összességére emlékeztet. Ez az analógia abban is megnyilvánul, hogy a komplex polinomok körében, éppen úgy, mint az egész számok körében, létezik a *maradékos osztás algoritmus*a.

11.1. Tétel. *Bármely két $P(z)$, $Q(z)$ komplex polinomhoz, ahol $Q(z)$ nem a nullapolinom, található olyan $H(z)$ és $R(z)$ komplex polinom, hogy*

$$P(z) = Q(z)H(z) + R(z),$$

ahol $R(z)$ fokszáma vagy kisebb $Q(z)$ fokszámanál, vagy $R(z) = 0$. Az ezen feltételnek eleget tevő $H(z)$ és $R(z)$ polinomok egyértelműen meghatározottak.

A tételben szereplő $H(z)$ polinomot a $P(z)$ -nek $Q(z)$ -vel való osztásából adódó *hányadosának*, $R(z)$ -t ezen osztás *maradékának* nevezzük.

FELADATOK.

1. Határozzuk meg a $P(z)$ polinomot úgy, hogy igaz legyen a következő egyenlőség:

$$(z^2 + iz - 1) \cdot P(z) = z^4 - z^2 + 1.$$

Megoldás. Mivel a bal oldalon másodfokú polinom szorozza $P(z)$ -t, a jobb oldalon pedig negyedfokú polinom szerepel, ezért $P(z) = az^2 + bz + c$, azaz legfeljebb másodfokú polinom lehet. Ekkor

$$(z^2 + iz - 1)(az^2 + bz + c) = z^4 - z^2 + 1.$$

Elvégezve a baloldalon a beszorzást adódik, hogy

$$az^4 + (ai + b)z^3 + (bi - a + c)z^2 + (ci - b)z - c = z^4 - z^2 + 1,$$

ahonnan a főegyütthatók és szabad tagok kiegyenlítése megadja, hogy $a = 1$ és $c = -1$. A másodfokú tagok együtthatóit kiegyenlítve kapjuk, hogy $bi - a + c = -1$, azaz $b = -i$, s behelyettesítve ezeket az értékeket a lineáris és harmadfokú tagok együtthatóiba megkapjuk a nullát. A keresett polinom tehát $P(z) = z^2 - iz - 1$.

2. Határozzuk meg az a és b valós paramétereket úgy, hogy a

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 8x + 1$$

polinom egy polinom teljes négyzete legyen.

Megoldás. Keressük azt a $Q(x) = x^2 + cx + d$ polinomot, amelyre $(Q(x))^2 = P(x)$, vagyis amelyre teljesül az

$$(x^2 + cx + d)^2 = x^4 + ax^3 + bx^2 - 8x + 1$$

egyenlőség. Innen

$$x^4 + c^2x^2 + d^2 + 2cx^3 + 2dx^2 + 2cdx = x^4 + ax^3 + bx^2 - 8x + 1.$$

A polinomok egyenlőségének definíciója alapján $d^2 = 1$, ahonnan $d_1 = 1$ és $d_2 = -1$. $d_1 = 1$ esetén

$$x^4 + 2c_1x^3 + (c_1^2 + 2)x^2 + 2c_1x + 1 = x^4 + a_1x^3 + b_1x^2 - 8x + 1$$

teljesül, ahonnan $c_1 = -4$, $a_1 = -8$ és $b_1 = 18$.

$d_1 = -1$ esetén

$$x^4 + 2c_2x^3 + (c_2^2 - 2)x^2 - 2c_2x + 1 = x^4 + a_2x^3 + b_2x^2 - 8x + 1$$

teljesül, ahonnan $c_2 = 4$, $a_2 = 8$ és $b_2 = 14$.

3. Határozzuk meg a $Q(z) = P(z-i) - P(z) + P(z+i)$ polinomot, ha $P(z) = z^3 - iz^2 + 1$.

Megoldás.

$$\begin{aligned} Q(z) &= P(z-i) - P(z) + P(z+i) = \\ &= (z-i)^3 - i(z-i)^2 + 1 - (z^3 - iz^2 + 1) + (z+i)^3 - i(z+i)^2 + 1 = \\ &= z^3 - 3z^2i + 3zi^2 - i^3 - i(z^2 - 2zi + i^2) + 1 - z^3 + iz^2 - 1 + \\ &+ z^3 + 3z^2i + 3zi^2 + i^3 - i(z^2 + 2zi + i^2) + 1 = \\ &= z^3 - iz^2 - 6z + 2i + 1. \end{aligned}$$

4. Számoljuk ki a $P(z) = 2z^4 - 3iz^3 + 4z^2 + (1-i)z + 6i + 5$ polinom $Q(z) = z^2 - iz + 1$ polinommal való osztásának hányadosát és maradékát.

Megoldás.

$$\begin{array}{r}
 (2z^4 - 3iz^3 + 4z^2 + (1-i)z + 5 + 6i) : (z^2 - iz + 1) = 2z^2 - iz + 3 \\
 2z^4 - 2iz^3 + 2z^2 \\
 \hline
 -iz^3 + 2z^2 + (1-i)z + 5 + 6i \\
 -iz^3 - z^2 - iz \\
 \hline
 3z^2 + z + 5 + 6i \\
 3z^2 - 3iz + 3 \\
 \hline
 (1+3i)z + 2 + 6i
 \end{array}$$

A hányados tehát $H(z) = 2z^2 - iz + 3$, a maradék pedig $R(z) = (1+3i)z + 2 + 6i$, vagyis

$$2z^4 - 3iz^3 + 4z^2 + (1-i)z + 5 + 6i = (z^2 - iz + 1)(2z^2 - iz + 3) + (1+3i)z + 2 + 6i,$$

$$\text{illetve} \quad \frac{2z^4 - 3iz^3 + 4z^2 + (1-i)z + 5 + 6i}{z^2 - iz + 1} = 2z^2 - iz + 3 + \frac{(1+3i)z + 2 + 6i}{z^2 - iz + 1}.$$

5. Számoljuk ki a $P(z) = z^4 + 2iz^3 - (1+i)z^2 - 3z + 7 + i$ polinom $Q(x) = z + i$ polinommal való osztásának hányadosát és maradékát.

Megoldás.

$$\begin{array}{r}
 (z^4 + 2iz^3 - (1+i)z^2 - 3z + 7 + i) : (z + i) = z^3 + iz^2 - iz - 4 \\
 z^4 + iz^3 \\
 \hline
 iz^3 - (1+i)z^2 - 3z + 7 + i \\
 iz^3 - z^2 \\
 \hline
 -iz^2 - 3z + 7 + i \\
 -iz^2 + z \\
 \hline
 -4z + 7 + i \\
 -4z - 4i \\
 \hline
 7 + 5i
 \end{array}$$

A keresett hányados tehát $H(z) = z^3 + iz^2 - iz - 4$, a maradék pedig $R = 7 + 5i$. Ekkor

$$\frac{z^4 + 2iz^3 - (1+i)z^2 - 3z + 7 + i}{z + i} = z^3 + iz^2 - iz - 4 + \frac{7 + 5i}{z + i}.$$

11.3. Polinomok oszthatósága

11.6. Definíció. Legyen $P(z)$ és $Q(z)$ két adott komplex együtthatós polinom. Ha $P(z)$ -nek $Q(z)$ -vel való osztásában a maradék 0, akkor azt mondjuk, hogy a $P(z)$ polinom osztható a $Q(z)$ polinommal, illetve a $Q(z)$ polinom osztója $P(z)$ -nek. Jelölése: $Q(z)|P(z)$.

11.2. Tétel. A $Q(z)$ komplex polinom akkor és csak akkor osztója a $P(z)$ komplex polinomnak, ha létezik olyan $\varphi(z)$ komplex polinom, hogy

$$P(z) = Q(z)\varphi(z).$$

Említsük meg a komplex polinomok oszthatóságának néhány alapvető tulajdonságát:

1. Ha $P(z)$ osztható a $Q(z)$ polinommal, $Q(z)$ pedig osztható a $T(z)$ polinommal, akkor $P(z)$ is osztható a $T(z)$ polinommal.

Csakugyan, a feltétel értelmében $P(z) = Q(z)\varphi(z)$ és $Q(z) = T(z)\psi(z)$, ezért

$$P(z) = T(z)[\varphi(z)\psi(z)].$$

2. Ha $P(z)$ is és $Q(z)$ is osztható a $\varphi(z)$ polinommal, akkor összegük és különbségük is osztható a $\varphi(z)$ polinommal.

Valóban, ha $P(z) = \varphi(z)\psi(z)$ és $Q(z) = \varphi(z)\chi(z)$, akkor

$$P(z) \pm Q(z) = \varphi(z)[\psi(z) \pm \chi(z)].$$

3. Ha $P(z)$ osztható a $\varphi(z)$ polinommal, akkor $P(z)$ szorzata bármely $Q(z)$ polinommal szintén osztható lesz $\varphi(z)$ -vel.

Ha ugyanis $P(z) = \varphi(z)\psi(z)$, akkor $P(z)Q(z) = \varphi(z)[\psi(z)Q(z)]$.

4. Minden $P(z)$ polinom osztható bármely nulladfokú polinommal.

Valóban, ha $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$, C pedig tetszőleges nullától különböző szám, azaz tetszőleges nulladfokú polinom, akkor

$$P(z) = C \left(\frac{a_n}{C} z^n + \frac{a_{n-1}}{C} z^{n-1} + \dots + \frac{a_2}{C} z^2 + \frac{a_1}{C} z + \frac{a_0}{C} \right).$$

5. Ha $P(z)$ osztható a $\varphi(z)$ polinommal, akkor $P(z)$ osztható $C\varphi(z)$ -vel is, ahol C tetszőleges nullától különböző szám.

Csakugyan, a $P(z) = \varphi(z)\psi(z)$ egyenlőségből következik $P(z) = [C\varphi(z)][C^{-1}\psi(z)]$.

6. A $CP(z)$ ($C \neq 0$) alakú polinomok és csak ezek lesznek a $P(z)$ polinom azon osztói, melyeknek fokszáma ugyanaz, mint $P(z)$ -é.

Valóban, $P(z) = C^{-1}[CP(z)]$, azaz $P(z)$ osztható $CP(z)$ -vel.

Másrészt, ha $P(z)$ osztható $\varphi(z)$ -vel, s emellett $P(z)$ és $\varphi(z)$ fokszáma megegyezik, akkor a $P(z)$ -nek a $\varphi(z)$ -vel való osztásából adódó hányados fokszáma csak nulla lehet, azaz $P(z) = d\varphi(z)$, $d \neq 0$, ahonnan $\varphi(z) = d^{-1}P(z)$. Innen következik:

7. A $P(z)$ és $Q(z)$ polinomok akkor és csak akkor oszthatók egymással, ha $Q(z) = CP(z)$, $C \neq 0$.

Végül az előzőekből adódik:

8. A $P(z)$ és $CP(z)$ ($C \neq 0$) polinomok bármelyikének bármely osztója osztója a másiknak is.

11.7. Definíció. Legyen $P(z)$ és $Q(z)$ két tetszőleges komplex együtthatós polinom. Azt mondjuk, hogy az $\varphi(z)$ polinom $P(z)$ és $Q(z)$ közös osztója, ha $\varphi(z)$ mindkét polinomnak osztója. Ha e két polinomnak a nulladfokú polinomokon kívül nincs más közös osztója, akkor azt mondjuk, hogy relatív prímek.

11.8. Definíció. A $P(z)$ és $Q(z)$ komplex polinomok legnagyobb közös osztójának nevezünk egy olyan polinomot, amely közös osztója e polinomoknak, s egyúttal minden más közös osztójukkal osztható. Jele: $LKO(P(z), Q(z))$.

Euklideszi algoritmus. A valós polinomok esetében az *euklideszi algoritmus* segítségével előállítható két valós polinom legnagyobb közös osztója. Ez a módszer alkalmazható komplex polinomokra is, s maga az algoritmus ugyanaz, mint a valós polinomok esetében: Legyen $P(z)$ és $Q(z)$ két tetszőleges komplex együtthatós polinom. Osszuk el $P(z)$ -t $Q(z)$ -vel; általában kapunk valami $R_1(z)$ maradékot. Ezután $Q(z)$ -t osztjuk $R_1(z)$ -vel és kapjuk az $R_2(z)$ maradékot, $R_1(z)$ -t osztjuk $R_2(z)$ -vel, és így tovább. Minthogy a maradék fokszáma minden lépésnél csökken, ezért az osztásoknak ebben a sorozatában el kell érniük egy olyan pontig, ahol a soron következő osztás már maradék nélkül elvégezhető s ezért az eljárás megszakad. Az az $R_k(z)$ maradék, mellyel az előző $R_{k-1}(z)$ már maradék nélkül osztható, éppen $P(z)$ és $Q(z)$ legnagyobb közös osztója lesz.

Tudjuk tehát, hogy bármely két komplex polinomnak van legnagyobb közös osztója és módszert is találtunk ennek kiszámítására. Ez a módszer mutatja, hogy ha $P(x)$ és $Q(x)$ is racionális vagy valós együtthatós polinom, akkor legnagyobb közös osztójuk együtthatói is racionálisak, illetve valósak, noha lehetnek a két polinomnak olyan közös osztói is, melyeknek nem minden együtthatója racionális, illetve valós.

11.2. Példa. A racionális együtthatós $P(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6$, $Q(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2$ polinomok legnagyobb közös osztója az $x^2 - 2$ racionális együtthatós polinom, holott közös osztójuk $x - \sqrt{2}$ is, melynek nem minden együtthatója racionális.

11.3. Példa. A valós együtthatós $P(x) = x^4 - 1$ és $Q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ polinomok legnagyobb közös osztója az $x^2 + 1$ valós együtthatós polinom, holott közös osztójuk $x - i$ is, melynek nem minden együtthatója valós.

Ha a $P(z)$ és $Q(z)$ polinom legnagyobb közös osztója $d(z)$, akkor e polinomok legnagyobb közös osztójának választhattuk volna a $Cd(z)$ polinomot is, ahol C tetszőleges nullától különböző szám. Más szóval két polinom legnagyobb közös osztója csak nulladfokú tényezőtől eltekintve van egyértelműen meghatározva.

11.9. Definíció. A $P(z)$ és $Q(z)$ nullapolinomtól különböző komplex polinomok közös többszörösének nevezünk minden olyan polinomot, amelynek $P(z)$ és $Q(z)$ is osztója. A $P(z)$ és $Q(z)$ komplex polinomok legkisebb közös többszörösének nevezzük azt a polinomot, amely a $P(z)$ és $Q(z)$ polinomok közös többszöröse és egyúttal a $P(z)$ és $Q(z)$ polinomok minden más közös többszörösének osztója. Jele: $LKT(P(z), Q(z))$.

Legyenek $P(z)$ és $Q(z)$ komplex normált polinomok. Ekkor a $P(z)$ és $Q(z)$ polinomok legkisebb közös többszöröse kifejezhető a következő módon:

$$LKT(P(z), Q(z)) = \frac{P(z)Q(z)}{LKO(P(z), Q(z))}.$$

11.4. Polinomok gyökei

11.10. Definíció. Ha

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

tetszőleges komplex együtthatós polinom, c pedig egy komplex szám, akkor a

$$P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_2 c^2 + a_1 c + a_0$$

számat a $P(z)$ polinom értékének nevezzük $z = c$ -ben. Ha $P(c) = 0$, akkor c -t a $P(z)$ polinom gyökének vagy nullájának (illetve a $P(z) = 0$ egyenlet gyökének vagy megoldásának) nevezzük.

11.4. Példa. A $P(z) = z^4 + 2iz^3 - (1+i)z^2 - 3z + 7 + i$ polinom értéke $z = -i$ -ben

$$\begin{aligned} P(-i) &= (-i)^4 + 2i(-i)^3 - (1+i)(-i)^2 - 3(-i) + 7 + i = \\ &= 1 + 2i \cdot i + (1+i) + 3i + 7 + i = \\ &= 7 + 5i. \end{aligned}$$

Ha a $P(z)$ polinomot egy elsőfokú (vagy lineáris) polinommal osztjuk, akkor az R maradék egy nulladfokú polinom, azaz egy szám. A következő állítás, hasonlóképpen, mint a valós polinomoknál is, lehetővé teszi, hogy $z - c$ alakú polinommal való osztás esetén a maradékot az osztás elvégzése nélkül megtalálhassuk.

11.3. Tétel (Bezout-tétel). Legyen $P(z)$ komplex polinom, c pedig egy komplex szám. A $P(z)$ polinom $(z - c)$ elsőfokú polinommal való osztásának maradéka egyenlő a $P(z)$ polinom $P(c)$ értékével.

Bizonyítás. Legyen

$$P(z) = (z - c)Q(z) + R.$$

Vegyük mindkét oldal értékét $z = c$ -ben:

$$P(c) = (c - c)Q(c) + R = R,$$

ami igazolja állításunkat. \diamond

11.5. Példa. A Bezout-tétel alapján a $P(-i) = 7 + 5i$ szám a

$$P(z) = z^4 + 2iz^3 - (1+i)z^2 - 3z + 7 + i$$

polinom $Q(z) = z + i$ elsőfokú polinommal való osztásának nulladfokú maradéka.

A Bezout-tételből adódik az alábbi rendkívül fontos következmény:

11.1. Következmény. A c szám akkor és csak akkor gyöke a $P(z)$ polinomnak, ha $P(z)$ osztható $(z - c)$ -vel.

11.6. Példa. A $P(z) = z^4 - 1 = (z-1)(z+1)(z-i)(z+i)$ polinom osztható $Q(z) = z+i$ -vel, a Bezout-tétel alapján az osztás maradéka valóban $P(-i) = (-i)^4 - 1 = 1 - 1 = 0$.

Másrészt, ha $P(z)$ osztható valamely $az + b = a\left(z + \frac{b}{a}\right)$ elsőfokú polinommal, akkor nyilvánvalóan osztható $z - \left(-\frac{b}{a}\right)$ -val is, vagyis egy $z - c$ alakú polinommal. Ezért érvényes az alábbi állítás is:

11.2. Következmény. *A $P(z)$ polinom gyökeinek felkutatása ekvivalens lineáris osztónak felkutatásával.*

A komplex polinomok esetében is érdemes foglalkoznunk a $P(z)$ komplex polinom $z - c$, $c \in \mathbf{C}$, elsőfokú polinommal való osztásának Horner-féle módszerével, amely egyszerűbb, mint a közönséges osztási algoritmus és ugyanúgy alkalmazható, mint a valós együtthatós polinomok esetében.

11.7. Példa. Emlékeztetőül, osszuk el a $P(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 2$ valós polinomot a $2x - 1$ elsőfokú polinommal.

Mivel $2x - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$, ezért osztani az $x - \frac{1}{2}$ polinommal fogunk. Alkossunk egy táblázatot, melyben a vonal fölött jobbra a $P(x)$ polinom együtthatói helyezkednek el, baloldalt a $c = \frac{1}{2}$ érték, a vonal alatt pedig a hányados megfelelő együtthatói és a maradék, melyeket lépésről lépésre számítunk ki:

$$\begin{array}{r|rrrrr} \frac{1}{2} & 1 & & -3 & 1 & & -1 & & 2 \\ \hline & 1 & \frac{1}{2} \cdot 1 - 3 = -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} + 1 = -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - 1 = -\frac{9}{8} & -\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{8} + 2 = \frac{23}{16} \end{array}$$

A keresett hányados tehát $Q(x) = \frac{1}{2}\left(x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{9}{8}\right)$, a maradék pedig a Bezout-tétel alapján is kiszámítható $R = P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{23}{16}$ állandó. Ennek alapján felírható, hogy

$$P(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 2 = (2x - 1) \cdot \frac{1}{2}\left(x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{9}{8}\right) + \frac{23}{16}.$$

11.8. Példa. Osszuk most el a $P(z) = z^4 + 2iz^3 - (1 + i)z^2 - 3z + 7 + i$ polinomot $z + i$ -vel.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -i & 1 & 2i & -1 - i & -3 & 7 + i \\ \hline & 1 & i & -i & -4 & 7 + 5i \end{array}$$

A keresett hányados tehát $H(z) = z^3 + iz^2 - iz - 4$, a maradék pedig $R = P(-i) = 7 + 5i$. Ennek alapján felírható, hogy

$$P(z) = z^4 + 2iz^3 - (1 + i)z^2 - 3z + 7 + i = (z + i)(z^3 + iz^2 - iz - 4) + 7 + 5i.$$

Ezek a példák mutatják, hogy a Horner-elrendezés felhasználható komplex polinomok értékének gyors kiszámítására is.

Ha a c komplex szám a $P(z)$ komplex polinomnak gyöke, azaz ha $P(c) = 0$, akkor $P(z)$ osztható $(z - c)$ -vel. Előfordulhat azonban, hogy $P(z)$ az $(z - c)$ elsőfokú polinomnak nemcsak első, hanem magasabb hatványaival is osztható.

11.11. Definíció. Ha található olyan k pozitív egész szám, hogy $P(z)$ maradék nélkül osztható $(z - c)^k$ -nal, de nem osztható $(z - c)^{k+1}$ -nel, vagyis $P(z) = (z - c)^k \varphi(z)$, ahol a c szám nem gyöke $\varphi(z)$ -nek, akkor a c gyök a polinom k -szoros gyöke, maga a k szám pedig a $P(z)$ polinom c gyökének multiplicitása.

11.9. Példa. Határozzuk meg a $P(x) = x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 8x - 8$ polinom $x = 2$ gyökének multiplicitását. Használjuk fel erre a célra a Horner-féle eljárást.

2	1	0	-4	6	-8	-8
2	1	2	0	6	4	0
	1	4	8	22	48	

A $P(x)$ polinomot elosztottuk az $x - 2$ polinommal, a maradék nulla, de a második osztás után már nem, tehát $x = 2$ egyszeres gyöke a polinomnak.

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - 2)(x^4 + 2x^3 + 6x + 4) \\ &= (x - 2)^2(x^3 + 4x^2 + 8x + 22) + 48(x - 2). \end{aligned}$$

11.10. Példa. Határozzuk meg a $P(z) = z^4 - 4z^3 + 14z^2 - 20z + 25$ polinom $z = 1 + 2i$ gyökének multiplicitását. Osszuk el a $P(z)$ polinomot a $z - (1 + 2i)$ polinommal mindaddig, amíg ezt maradék nélkül megtehetjük.

$1 + 2i$	1	-4	14	-20	25
$1 + 2i$	1	$-3 + 2i$	$7 - 4i$	$-5 + 10i$	0
$1 + 2i$	1	$-2 + 4i$	$-3 - 4i$	0	
	1	$-1 + 6i$	-16		

$$\begin{aligned} P(z) &= (z - (1 + 2i))(z^3 + (-3 + 2i)z^2 + (7 - 4i)z - 5 + 10i) \\ &= (z - (1 + 2i))^2(z^2 + (-2 + 4i)z - 3 - 4i) \\ &= (z - (1 + 2i))^3(z - 1 + 6i) - 16(z - (1 + 2i))^2. \end{aligned}$$

A $z = 1 + 2i$ gyök a $P(z)$ polinom kétszeres gyöke, vagyis a $P(z)$ polinom $z = 1 + 2i$ gyökének multiplicitása 2.

FELADATOK.

1. Határozzuk meg a $P(x) = (x^2 - 2x + 3)^{2011} + (x^2 - 6x + 3)^{2011}$ valós polinom, majd a $Q(z) = (z^2 - z + i)^{2012} \cdot (z^2 - z - i)^{2011}$ komplex polinom együtthatóinak összegét.

Megoldás. Egy polinom együtthatóinak összege a polinom értéke 1-ben. Ezért

$$\begin{aligned} P(1) &= (1^2 - 2 \cdot 1 + 3)^{2011} + (1^2 - 6 \cdot 1 + 3)^{2011} \\ &= 2^{2011} + (-2)^{2011} \\ &= 2^{2011} - 2^{2011} \\ &= 0, \end{aligned}$$

valamint

$$\begin{aligned} Q(1) &= (1^2 - 1 + i)^{2012} \cdot (1^2 - 1 - i)^{2011} \\ &= i^{2012} \cdot (-i)^{2011} \\ &= 1 \cdot i \\ &= i. \end{aligned}$$

2. Írjuk fel a $P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ valós polinomot $x + 1$ hatványaiként, majd a $Q(z) = z^4 + 2iz^3 - (1 + i)z^2 - 3z + 7 + i$ komplex polinomot $z + i$ hatványaiként.

Megoldás.

-1	1	2	-3	-4	1
-1	1	1	-4	0	1
-1	1	0	-4	4	
-1	1	-1	-3		
	1	-2			

Osszuk el a $P(x)$ polinomot négyszer egymás után az $x + 1$ polinommal. Minden osztás maradéka a keresett polinom egy együtthatóját adja. Az első maradék a szabad tag, a második maradék a lineáris tag együtthatója, a harmadik a másodfokú tag együtthatója, a negyedik pedig a harmadfokú tag együtthatója. A főegyütthatók megegyeznek.

$$\begin{aligned}
 P(x) &= (x+1)(x^3 + x^2 - 4x) + 1 \\
 &= (x+1)[(x+1)(x^2 - 4) + 4] + 1 \\
 &= (x+1)^2(x^2 - 4) + 4(x+1) + 1 \\
 &= (x+1)^3((x+1) - 2) - 3(x+1)^2 + 4(x+1) + 1 \\
 &= (x+1)^4 - 2(x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 4(x+1) + 1.
 \end{aligned}$$

-i	1	2i	-1-i	-3	7+i
-i	1	i	-i	-4	7+5i
-i	1	0	-i	-5	
-i	1	-i	-1-i		
	1	-2i			

Hasonlóan járunk el a $Q(z)$ polinom esetében is, s így a $Q(z)$ polinom alakja a következő:

$$\begin{aligned}
 Q(z) &= (z+i)^4 - 2i(z+i)^3 - \\
 &\quad - (1+i)(z+i)^2 - 5(z+i) + 7 + 5i.
 \end{aligned}$$

3. Határozzuk meg az a és b valós paraméterek értékét úgy, hogy a valós $P(x) = 6x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2$ polinom osztható legyen a $Q(x) = x^2 - x + b$ polinommal.

Megoldás. Végezzük el a polinomok osztását. Ekkor

$$\begin{aligned}
 (6x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2) : (x^2 - x + b) &= 6x^2 - x + a - 6b - 1 \\
 6x^4 - 6x^3 + 6bx^2 & \\
 \hline
 -x^3 + (a - 6b)x^2 + 3x + 2 & \\
 -x^3 + x^2 - bx & \\
 \hline
 (a - 6b - 1)x^2 + (3 + b)x + 2 & \\
 (a - 6b - 1)x^2 - (a - 6b - 1)x + b(a - 6b - 1) & \\
 \hline
 (2 + a - 5b)x - b(a - 6b - 1) + 2 &
 \end{aligned}$$

A maradék nulla, ha $a - 5b + 2 = 0$ és $-b(a - 6b - 1) + 2 = 0$. A kapott egyenletrendszer első egyenletéből kifejezzük a -t: $a = 5b - 2$, s ezt behelyettesítve a második egyenletbe kapjuk a $b^2 + 3b + 2 = 0$ másodfokú egyenletet, amelynek megoldásai $b_1 = -1$ és $b_2 = -2$, ebből pedig $a_1 = -7$ és $a_2 = -12$. Eszerint $Q_1(x) = x^2 - x - 1$ osztója a $P_1(x) = 6x^4 - 7x^3 - 7x^2 + 3x + 2$ polinomnak, $Q_2(x) = x^2 - x - 2$ pedig a $P_2(x) = 6x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 3x + 2$ polinomnak.

4. A $P(x)$ polinom $(x+1)$ -gyel való osztásakor keletkező maradék 4, (x^2+1) -gyel való osztásakor pedig $2x+3$. Mi lesz a $P(x)$ polinom $Q(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ polinommal való osztásának maradéka?

Megoldás. Mivel a $P(x)$ polinom $(x+1)$ -gyel való osztásakor keletkező maradék 4, ezért a Bezout-tétel alapján $P(-1) = 4$. Abból a tényből, hogy a $P(x)$ polinom (x^2+1) -gyel való osztásakor keletkezett maradék $2x+3$, felírhatjuk, hogy

$$P(x) = (x^2 + 1)H(x) + 2x + 3.$$

A fenti egyenlőségbe az $x = i$ értéket helyettesítve azt kapjuk, hogy $P(i) = 2i + 3$, az $x = -i$ érték behelyettesítése után pedig azt, hogy $P(-i) = -2i + 3$. A $P(x)$ polinom $Q(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ polinommal való osztásának maradéka egy másodfokú polinom, s mivel $Q(x) = (x+1)(x^2+1)$, ezért felírható, hogy $P(x) = Q(x)H_1(x) + R(x)$, azaz hogy

$$P(x) = (x+1)(x^2+1)H_1(x) + ax^2 + bx + c.$$

Behelyettesítve a fenti egyenlőségbe az $x = -1$, $x = i$ és $x = -i$ értékeket adódik, ugyanilyen sorrendben, hogy $a - b + c = 4$, $-a + bi + c = 2i + 3$ és $-a - bi + c = -2i + 3$. A kapott egyenletrendszer második egyenleteéből kivonva a harmadikat addódik, hogy $b = 2$, összeadva a két egyenletet pedig a $-a + c = 3$ egyenletet kapjuk, amely az első egyenlettel és a kapott b értékkel megadja, hogy $a = \frac{9}{2}$ és $c = \frac{3}{2}$.

A keresett maradék tehát az $R(x) = \frac{9}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2}$ polinom.

5. Adottak a $p(x) = x^7 + 3x^6 + 4x^5 + 5x^4 + x^3 - 4x^2 + mx + n$, $q(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 5x + 2$ polinomok. Határozzuk meg az m és n paraméterek valós értékét úgy, hogy a $p(x)$ polinom osztható legyen a $q(x)$ polinommal.

Megoldás. Mivel a $q(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 5x + 2$ polinom állandó tagja 2, így a lehetséges egész gyökök halmaza $\{\pm 1, \pm 2\}$.

-1	1	4	6	5	2
-2	1	3	3	2	0
	1	1	1	0	

Belátható, hogy -1 és -2 gyökei a $q(x)$ polinomnak és a Horner eljárással azt is megkapjuk, hogy

$$q(x) = (x+1)(x+2)(x^2+x+1).$$

Ezért a $p(x)$ polinom is osztható kell legyen a $q(x)$ polinom tényezőivel, tehát a $p(-1) = 0$ és $p(-2) = 0$ egyenlőségeknek teljesülnie kell. Mivel

$$p(-1) = -m + n + 2 \quad \text{és} \quad p(-2) = -2m + n - 8,$$

a $-m + n + 2 = 0$ és $-2m + n - 8 = 0$ egyenletrendszernek kell teljesülnie, amelynek megoldása $m = -6$ és $n = -4$.

6. Határozzuk meg a $P(x) = x^{2n} + 3x^{2n-1} + 1$, $n \geq 2$ polinom $Q(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ polinommal való osztásakor keletkező maradékot.

Megoldás. Átrendezés után adódik, hogy $Q(x) = x^2(x+3) - (x+3) = (x+3)(x^2-1) = (x+3)(x-1)(x+1)$, a $P(x)$ polinomnak a $Q(x)$ polinom $x+3$, $x-1$ és $x+1$ tényezőivel való osztásának maradékai pedig

$$P(-3) = (-3)^{2n} + 3 \cdot (-3)^{2n-1} + 1 = (-3)^{2n} - (-3)^{2n} + 1 = 1,$$

$$P(1) = 1^{2n} + 3 \cdot 1^{2n-1} + 1 = 1 + 3 + 1 = 5,$$

$$P(-1) = (-1)^{2n} + 3 \cdot (-1)^{2n-1} + 1 = 1 - 3 + 1 = -1.$$

A $P(x) = x^{2n} + 3x^{2n-1} + 1$ polinom $Q(x)$ polinommal való osztásakor keletkező maradék legfeljebb egy másodfokú polinom, tehát felírható, hogy

$$P(x) = (x+3)(x-1)(x+1)H(x) + ax^2 + bx + c.$$

A fenti egyenlőségbe az $x = -3$, $x = 1$ és $x = -1$ értékeket helyettesítve kapjuk a $9a - 3b + c = 1$, $a + b + c = 5$ és $a - b + c = -1$ egyenletrendszert, amelynek megoldása $a = 1$, $b = 3$ és $c = 1$. Ennek alapján a keresett maradék $R(x) = x^2 + 3x + 1$.

7. Ha tudjuk, hogy $x_0 = -1$ a valós $P(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$ polinom egyik gyöke. Határozzuk meg az adott gyök multiplicitását!

Megoldás. $P(x) = (x+1)^4(x-3)$, vagyis $x_0 = -1$ négyszeres gyöke a $P(x)$ polinomnak.

-1	1	1	-6	-14	-11	-3
-1	1	0	-6	-8	-3	0
-1	1	-1	-5	-3	0	
-1	1	-2	-3	0		
	1	-3	0			

8. Mutassuk meg, hogy a $P(x) = x^5 - 5x^3 + 5x^2 - 1$ polinom osztható $(x-1)^3$ -nal, de nem osztható $(x-1)^4$ -nel!

1	1	0	-5	5	0	-1
1	1	1	-4	1	1	0
1	1	2	-2	-1	0	
1	1	3	1	0		
	1	4	5			

Megoldás. Ismét a Horner eljárást használjuk. Négyyszer egymás után osztjuk a $P(x)$ polinomot az $x-1$ polinommal. Az első három esetben a maradék nulla, a negyedik esetben pedig nem nulla, tehát igazoltuk az állítást.

9. Határozzuk meg az A és B együtthatókat úgy, hogy a $P(x) = Ax^4 + Bx^3 + 1$ polinom osztható legyen $(x-1)^2$ -nel!

Megoldás. Osszuk el kétszer $x-1$ -gyel a $P(x)$ polinomot a Horner eljárással.

1	A	B	0	0	1
1	A	$A+B$	$A+B$	$A+B$	$A+B+1$
	A	$2A+B$	$3A+2B$	$4A+3B$	

Az oszthatóság akkor teljesül, ha mindkét maradék nulla, vagyis $A+B+1=0$ és $4A+3B=0$. A kapott egyenletrendszer megoldása $A=3$ és $B=-4$, a keresett polinom pedig $P(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$.

10. Határozzuk meg a $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ polinom ismeretlen együtthatóit úgy, hogy $P(x)$ osztható legyen $(x-i)$ -vel, $(x+1)$ -gyel való osztásakor pedig -5 -öt adjon maradékul.

Megoldás. A feltételek alapján $P(i) = 0$ és $P(-1) = -5$, vagyis $(b-1)i - a + c = 0$ és $a - b + c - 2 = -5$, amely egyenletrendszer megoldása $a = c = -\frac{3}{2}$ és $b = 1$, a keresett polinom pedig $P(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$.

11.5. Az algebra alaptétele és annak következményei

Amikor az előző fejezetben a polinomok gyökeivel foglalkoztunk, nem vetettük fel a kérdést, vajon vannak-e minden polinomnak gyökei? Ismeretes, hogy léteznek valós együtthatós polinomok, melyeknek nincsenek valós gyökei, az egyik ilyen polinom az x^2+1 . Azt várhatnánk, hogy vannak olyan polinomok is, melyeknek a komplex számok körében sincs gyökük, különösen, ha tetszőleges komplex együtthatós polinomokat vizsgálunk. Amennyiben ez így volna, a komplex számkör további bővítésére lenne szükség. Valójában érvényes a komplex számok algebrájának következő *alaptétele*, amelyet bizonyítás nélkül fogunk megadni:

11.4. Tétel (Az algebra alaptétele). *Minden legalább elsőfokú komplex együtthatós polinomnak van legalább egy valós vagy komplex gyöke.*

Ez a tétel az egész matematika egyik legnagyobb vívmánya, és a tudomány legkülönbözőbb területein vannak alkalmazásai. Teljes egészében erre épül fel a száme együtthatós polinomok elméletének hátralevő része.

A gyök létezéséről szóló alaptétel biztosítja a $P(z)$ polinom α_1 valós vagy komplex gyökének létezését. Ezért a $P(z)$ polinomnak létezik

$$P(z) = (z - \alpha_1)\varphi_1(z)$$

alakú felbontása. A $\varphi_1(z)$ polinom együtthatói megint valós vagy komplex számok, s ezért $\varphi_1(z)$ -nek is van egy α_2 gyöke, ahonnan

$$P(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)\varphi_2(z).$$

Így tovább folytatva, véges sok lépés után az n -edfokú $P(z)$ polinomot n elsőfokú tényezőre bontjuk:

$$P(z) = a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)\dots(z - \alpha_n). \quad (11.1)$$

Az a_n együttható a következő okból jelent meg: ha a (11.1) kifejezés jobb oldalán valami b együttható állna, akkor a beszorzás után a $P(x)$ polinom legmagasabb fokú tagja bz^n alakú lenne, holott a $P(z)$ polinom legmagasabb fokú tagja valójában $a_n z^n$. Ezért $b = a_n$.

11.3. Következmény. *A (11.1) faktorizáció a $P(z)$ polinomnak a tényezők sorrendjétől eltekintve egyetlen ilyen típusú tényezőkre bontása.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a fenti mellett létezik még a

$$P(z) = a_n(z - \beta_1)(z - \beta_2)\dots(z - \beta_n) \quad (11.2)$$

faktorizáció is. (11.1)-ből és (11.2)-ből következik, hogy

$$(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)\dots(z - \alpha_n) = (z - \beta_1)(z - \beta_2)\dots(z - \beta_n). \quad (11.3)$$

Ha az α_i gyök különböznék valamennyi β_j -től ($j = 1, 2, \dots, n$), akkor (11.3)-ban α_i -t helyettesítve az ismeretlen helyébe, baloldalt zérót kapnánk, jobboldalt pedig egy zérótól különböző számot. Így tehát minden α_i gyök egyenlő valamelyik β_j gyökkel és fordítva. Ebből még nem következik, hogy a (11.1) és (11.2) felbontás megegyezik. Valóban, az α_i ($i = 1, 2, \dots, n$) gyökök között lehetnek egyenlők. Legyen például ezen gyökök közül s

darab α_1 -gyel egyenlő, s legyen másrészt a β_j ($j = 1, 2, \dots, n$) gyökök között t ugyanilyen. Meg kell mutatni, hogy $s = t$.

Mivel polinomok szorzatának fokszáma egyenlő a tényezők fokszámának összegével, így a nullától különböző polinomok szorzata nem lehet nulla. Ebből következik, hogy ha két olyan szorzat, melyeknek tényezői polinomok, egyenlő, akkor az egyenlőség mindkét oldalát oszthatjuk az esetleges közös tényezővel. Alkalmazzuk ezt a (11.3) egyenlőségre. Ha például $s > t$, akkor a (11.3) egyenlőség mindkét oldalát osztva a $(z - \alpha_1)^t$ tényezővel, olyan egyenlőséget kapunk, melynek bal oldalán még szerepel a $z - \alpha_1$ tényező, de jobb oldalán már nem. Ez azonban ellentmondás, tehát az egyértelműség fennáll. \diamond

Egyesítve az egyforma tényezőket, a (11.1) faktorizációt átírhatjuk a

$$P(z) = a_n(z - \alpha_1)^{k_1}(z - \alpha_2)^{k_2} \dots (z - \alpha_\ell)^{k_\ell} \quad (11.4)$$

alakba, ahol

$$k_1 + k_2 + \dots + k_\ell = n.$$

Emellett feltesszük, hogy az $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell$ gyökök között már nincsenek egyenlők.

Mutassuk meg, hogy (11.4)-ben a k_i szám ($i = 1, 2, \dots, \ell$) az α_i gyök multiplicitása a $P(x)$ polinomban. Valóban, ha ez a multiplicitás s_i , akkor $k_i \leq s_i$. Legyen azonban $k_i < s_i$. A gyök multiplicitásának definíciója értelmében $P(z)$ -nek létezik

$$P(z) = (z - \alpha_i)^{s_i} \varphi(z)$$

alakú felbontása. Ha ebben a kifejezésben $\varphi(z)$ -t elsőfokú tényezőkre való felbontásával helyettesítjük, $P(z)$ -nek olyan elsőfokú tényezőkre bontását kapjuk, amely szemmel láthatólag különbözik a (11.1) faktorizációtól, azaz ellentmondásba kerülünk e faktorizáció fentebb bizonyított egyértelműségével.

Így tehát a következő fontos eredményt igazoltuk:

11.4. Következmény. Minden n -edfokú tetszőleges komplex együtthatós $P(z)$ polinomnak n gyöke van, ha minden gyökét annyiszor számítjuk, amennyi a multiplicitása.

11.11. Példa. Egy olyan polinom, amelynek nullái

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 3 - i, \quad \alpha_3 = 5 \quad \text{és} \quad \alpha_4 = -i,$$

lehet például a

$$P(z) = (z - 1)(z - 3 + i)(z - 5)(z + i)$$

negyedfokú komplex polinom vagy pedig a

$$Q(x) = (x - 1)(x^2 - 6x + 10)(x - 5)(x^2 + 1)$$

hatodfokú valós polinom. A következő fejezetek egyikében látni fogjuk, hogy milyen módszerrel tudjuk megtalálni ilyen esetben a megfelelő valós polinomokat.

11.12. Példa. Az a legkisebb fokú normált komplex együtthatós polinom, amelynek $\alpha_1 = 2$ kétszeres gyöke, $\alpha_2 = i$ pedig háromszoros gyöke, a

$$P(z) = (z - 2)^2(z - i)^3$$

ötödfokú polinom.

11.6. Viéte képletek

Legyen $P_1(z) = a_1z + a_2$ elsőfokú komplex együtthatós polinom. Ha kiemeljük az adott polinomból a főegyütthatót, akkor $P_1(z) = a_1 \left(z - \left(-\frac{a_2}{a_1} \right) \right)$ adódik, ahonnan az algebra alaptétele alapján a polinom gyöke $z_1 = -\frac{a_2}{a_1}$.

Legyen $P_2(z) = a_2z^2 + a_1z + a_0$ másodfokú komplex együtthatós polinom, amelynek z_1 és z_2 a gyökei. Az algebra alaptétele alapján felírható, hogy $P_2(z) = a_2(z - z_1)(z - z_2)$, a műveletek elvégzése után pedig, hogy $P_2(z) = a_2(z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1z_2)$. A megfelelő együtthatók kiegyenlítése adja a polinom gyökei és együtthatói között fennálló ismert összefüggést, a *Viéte képleteket*:

$$z_1 + z_2 = -\frac{a_1}{a_2}, \quad z_1z_2 = \frac{a_0}{a_2}.$$

A $P_3(z) = a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$ harmadfokú polinom esetén, ha z_1, z_2 és z_3 a polinom gyökei, akkor

$$\begin{aligned} P_3(z) &= a_3(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3), \quad \text{azaz beszorzás és rendezés után} \\ P_3(z) &= a_3(z^3 - (z_1 + z_2 + z_3)z^2 + (z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)z - z_1z_2z_3). \end{aligned}$$

A megfelelő együtthatók kiegyenlítése most a

$$z_1 + z_2 + z_3 = -\frac{a_2}{a_3}, \quad z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = \frac{a_1}{a_3}, \quad z_1z_2z_3 = -\frac{a_0}{a_3}$$

képleteket adja, melyeket a *harmadfokú polinom Viéte képleteinek* nevezünk.

Végezzük el az eljárást a $P_4(z) = a_4z^4 + a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$ negyedfokú polinom esetén is. Legyenek z_1, z_2, z_3 és z_4 a $P(z)$ polinom gyökei. Ekkor

$$\begin{aligned} P_4(z) &= a_4(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4), \quad \text{azaz beszorzás és rendezés után} \\ P_4(z) &= a_4(z^4 - (z_1 + z_2 + z_3 + z_4)z^3 + (z_1z_2 + z_1z_3 + z_1z_4 + z_2z_3 + z_2z_4 + z_3z_4)z^2 + \\ &\quad + (z_1z_2z_3 + z_1z_2z_4 + z_1z_3z_4 + z_2z_3z_4)z - z_1z_2z_3z_4). \end{aligned}$$

A megfelelő együtthatók kiegyenlítése most a

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 + z_4 &= -\frac{a_3}{a_4}, \quad z_1z_2 + z_1z_3 + z_1z_4 + z_2z_3 + z_2z_4 + z_3z_4 = \frac{a_2}{a_4}, \\ z_1z_2z_3 + z_1z_2z_4 + z_1z_3z_4 + z_2z_3z_4 &= \frac{a_1}{a_4}, \quad z_1z_2z_3z_4 = -\frac{a_0}{a_4} \end{aligned}$$

képleteket adja, melyeket a *negyedfokú polinom Viéte képleteinek* nevezünk.

Tekintsük most az n -edfokú

$$P_n(z) = a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_2z^2 + a_1z + a_0, \quad (11.5)$$

komplex polinomot és legyenek ennek gyökei z_1, z_2, \dots, z_n . Ekkor a $P_n(z)$ polinomot az algebra alaptétele alapján felírhatjuk a következő alakban:

$$P_n(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n).$$

Elvégezve a szorzást a jobb oldalon, majd összevonva az egyenmű tagokat és összehasonlítva a kapott együtthatókat a (11.5)-beliekkel, kapjuk a következő egyenlőségeket, melyeket *Viéte képleteknek* nevezzük, és amelyek a *polinom együtthatói és gyökei közötti összefüggéseket* adják meg:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + \dots + z_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \\ z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_1 z_n + z_2 z_3 + \dots + z_{n-1} z_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n}, \\ z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + \dots + z_{n-2} z_{n-1} z_n &= -\frac{a_{n-3}}{a_n}, \\ &\vdots \\ (z_2 \dots z_{n-1} + z_1 z_2 \dots z_{n-2} z_n + \dots + z_2 z_3 \dots z_n) &= (-1)^{n-1} \frac{a_1}{a_n}, \\ z_1 z_2 \dots z_n &= (-1)^n \frac{a_0}{a_n}. \end{aligned}$$

Így tehát a k -adik egyenlőség jobb oldalán ($k = 1, 2, \dots, n$) a különböző gyökök összes lehetséges k tényezős szorzatainak összege áll pozitív vagy negatív előjellel, aszerint hogy k páros vagy páratlan.

11.13. Példa. Viéte képletei megkönnyítik a polinom felírását gyökeinek ismeretében. Keressük meg például azt a negyedfokú $P(x)$ normált polinomot, melynek 5 és -2 egyszeres, 3 pedig kétszeres gyöke. Ekkor

$$\begin{aligned} a_3 &= -(5 - 2 + 3 + 3) = -9, \\ a_2 &= 5 \cdot (-2) + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + (-2) \cdot 3 + (-2) \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 1, \\ a_1 &= -[5 \cdot (-2) \cdot 3 + 5 \cdot (-2) \cdot 3 + 5 \cdot 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 3 \cdot 3] = 33, \\ a_0 &= 5 \cdot (-2) \cdot 3 \cdot 3 = -90, \end{aligned}$$

s így $P(x) = x^4 - 9x^3 + 17x^2 + 33x - 90$.

FELADATOK.

1. Ha x_1, x_2 és x_3 a $27x^3 + 64 = 0$ egyenlet gyökei, akkor mennyi az $x_1 + x_2 + x_3 + x_1 x_2 x_3$ kifejezés értéke?

Megoldás. A Viéte képletek alapján

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_1 x_2 x_3 = -\frac{0}{27} - \frac{64}{27} = -\frac{64}{27}.$$

2. Ha x_1, x_2 és x_3 az $5x^3 - 3x^2 - 4x + 2 = 0$ egyenlet gyökei, akkor mennyi az $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ kifejezés értéke?

Megoldás. Először transzformáljuk az adott kifejezést:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3).$$

A Viéte képletek alapján $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{-3}{5} = \frac{3}{5}$ és $x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = -\frac{4}{5}$. Ekkor

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 - 2\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{9}{25} + \frac{8}{5} = \frac{49}{25}.$$

3. Ha x_1, x_2 és x_3 az $x^3 - 2x - 1 = 0$ egyenlet gyökei, akkor mennyi az $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$ kifejezés értéke?

Megoldás. Először transzformáljuk az adott kifejezést, felhasználva az előző feladatban kapott átalakítást. A Viéte képletek alapján $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{0}{1} = 0$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -\frac{2}{1} = -2$ és $x_1x_2x_3 = -\frac{-1}{1} = 1$. Ekkor

$$\begin{aligned} x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 &= (x_1^2)^2 + (x_2^2)^2 + (x_3^2)^2 \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 - 2(x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2) \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 - 2((x_1x_2)^2 + (x_1x_3)^2 + (x_2x_3)^2) \\ &= ((x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3))^2 - \\ &\quad - 2((x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^2 - 2(x_1^2x_2x_3 + x_1x_2^2x_3 + x_1x_2x_3^2)) \\ &= ((x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3))^2 - \\ &\quad - 2((x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^2 - 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3)) \\ &= (0^2 - 2 \cdot (-2))^2 - 2((-2)^2 - 2 \cdot 1 \cdot 0) \\ &= 16 - 2 \cdot 4 = 8. \end{aligned}$$

4. Ha α, β és γ az $x^3 + 2x^2 - x + 3 = 0$ egyenlet gyökei, akkor vajon mennyi lesz az $\alpha\beta(\alpha + \beta) + \beta\gamma(\beta + \gamma) + \gamma\alpha(\gamma + \alpha)$ kifejezés értéke?

Megoldás. Alakítsuk át megfelelő módon az adott kifejezést. Ekkor a jól ismert $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{2}{1} = -2$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = -\frac{1}{1} = -1$ és $\alpha\beta\gamma = -\frac{3}{1} = -3$ Viéte képletek alapján adódik, hogy

$$\begin{aligned} &\alpha\beta(\alpha + \beta) + \beta\gamma(\beta + \gamma) + \alpha\gamma(\gamma + \alpha) = \\ &= \alpha\beta(\alpha + \beta) + \beta\gamma(\beta + \gamma) + \alpha\gamma(\gamma + \alpha) + 3\alpha\beta\gamma - 3\alpha\beta\gamma = \\ &= \alpha\beta(\alpha + \beta + \gamma) + \beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) + \alpha\gamma(\alpha + \beta + \gamma) - 3\alpha\beta\gamma = \\ &= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma) - 3\alpha\beta\gamma = \\ &= (-2) \cdot (-1) - 3 \cdot (-3) = 2 + 9 = 11. \end{aligned}$$

5. Ha a $P(x) = (x - 3)(x - 1)(x + 2)(x + 4) + 16$ polinom lineáris tényezőkre bontva $P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$, akkor mennyi $a + b + c + d$ értéke?

Megoldás. Elvégezve a műveleteket adódik, hogy

$$P(x) = (x^2 - 4x + 3)(x^2 + 6x + 8) + 16 = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 40,$$

a megfelelő Viéte képlet alapján viszont $a + b + c + d = -\frac{2}{1} = -2$.

6. Határozzuk meg az a, b és c paraméterek értékét úgy, hogy azok egyben gyökei is legyenek az $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ egyenletnek.

Megoldás. A Viéte képletek alapján felírható, hogy $a + b + c = a$, $ab + ac + bc = b$ és $abc = c$, s ezekből $b + c = 0$, $a(b + c) + bc = b$ miatt $b(c - 1) = 0$ és $c \neq 0$ esetén $ab = 1$. Ha $c = 0$, akkor $b = 0$ és $a \in \mathbf{R}$. Ha $c \neq 0$, akkor $c = 1$, $b = -1$ és $a = -1$.

7. Határozzuk meg az a , b és c paramétereket úgy, hogy az $y^3 + ay^2 + by + c = 0$ egyenlet gyökeire érvényes legyen: $y_1 = x_1x_2$, $y_2 = x_1x_3$ és $y_3 = x_2x_3$, ahol x_1, x_2, x_3 a $-x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0$ egyenlet megoldásai.

Megoldás. A Viéte képletek alapján a második egyenletre felírható, hogy $x_1 + x_2 + x_3 = 4$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 5$ és $x_1x_2x_3 = 6$. Most az első egyenlet Viéte képletei alapján felírható, hogy

$$\begin{aligned} a &= -(y_1 + y_2 + y_3) = -(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = -5, \\ b &= y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = x_1^2x_2x_3 + x_1x_2^2x_3 + x_1x_2x_3^2 = x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = 24, \\ c &= y_1y_2y_3 = x_1^2x_2^2x_3^2 = (x_1x_2x_3)^2 = 36, \end{aligned}$$

a keresett egyenlet pedig $y^3 - 5y^2 + 24y + 36 = 0$.

8. Határozzuk meg a λ paraméter értékét úgy, hogy a $2x^3 - x^2 - 7x + \lambda = 0$ egyenlet két gyökének az összege 1 legyen.

Megoldás. Legyenek x_1, x_2 és x_3 a $2x^3 - x^2 - 7x + \lambda = 0$ egyenlet gyökei és legyen $x_1 + x_2 = 1$. A Viéte képletek alapján $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{2}$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -\frac{7}{2}$ és $x_1x_2x_3 = -\frac{\lambda}{2}$. Ekkor az $x_1 + x_2 = 1$ feltétel alapján az első képletből adódik, hogy $x_3 = -\frac{1}{2}$. A második képletet átalakítva, mint $x_1x_2 + x_3(x_1 + x_2) = -\frac{7}{2}$ és kihasználva az előző számítást megkapjuk, hogy $x_1x_2 = -3$. Ekkor

$$\lambda = -x_1x_2 \cdot x_3 = -(-3) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}.$$

9. Határozzuk meg a λ paraméter értékét úgy, hogy az $x^3 - 7x + \lambda = 0$ egyenlet egyik gyöke kétszerese legyen a másiknak.

Megoldás. Legyenek x_1, x_2 és x_3 az $x^3 - 7x + \lambda = 0$ egyenlet gyökei és legyen $x_1 = 2x_2$. A Viéte képletek alapján $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -7$ és $x_1x_2x_3 = -\lambda$. Ekkor az első képletből adódik, hogy $x_3 = -3x_2$. Behelyettesítve x_1 -et és x_3 -at a második képletbe, adódik, hogy $2x_2^2 - 6x_2^2 - 3x_2^2 = -7$, azaz $x_2^2 = 1$, amiből az egyik megoldás $x_2 = 1$, $x_1 = 2$ és $x_3 = -3$, a másik pedig $x_2 = -1$, $x_1 = -2$ és $x_3 = 3$. Mivel most $\lambda = -x_1x_2x_3$, ezért az első megoldás esetén $\lambda = -6$, a második megoldás esetén pedig $\lambda = 6$.

10. Határozzuk meg a p és q paraméterek értékét úgy, hogy az $x^2 + px + q = 0$ egyenlet egyik gyöke 1 legyen, a másik pedig legyen egyenlő az egyenlet diszkriminánsával.

Megoldás. Legyenek x_1 és x_2 az $x^2 + px + q = 0$ egyenlet gyökei. Ekkor $x_1 = 1$ és $x_2 = p^2 - 4q$. A Viéte képletek alapján felírható, hogy $x_1 + x_2 = -p$ és $x_1x_2 = q$. Behelyettesítve a feltételeket kapjuk, hogy $1 + p^2 - 4q = -p$ és $p^2 - 4q = q$. A második egyenletből $q = \frac{p^2}{5}$, s ezt az első egyenletbe helyettesítve adódik a $p^2 + 5p + 5 = 0$ másodfokú egyenlet, amelynek megoldásai

$$p_1 = \frac{-5 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{és} \quad p_2 = \frac{-5 - \sqrt{5}}{2},$$

a megfelelő q értékek pedig $q_1 = 3 - \sqrt{5}$ és $q_2 = 3 + \sqrt{5}$.

11.7. Valós együtthatós polinomok

Most néhány, valós együtthatós polinomokra vonatkozó következtetést fogunk levonni a komplex számok algebrájának alaptételéből, s éppen ezeken a következményeken alapul az alaptételnek a rendkívüli nagy jelentősége.

Legyen a

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

valós együtthatós polinomnak α komplex gyöke, azaz legyen

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0 = 0.$$

Tudjuk, hogy ez utóbbi egyenlőség érvényes marad, ha benne minden számot a konjugáltjával helyettesítünk. Így adódik, hogy az

$$a_n \bar{\alpha}^n + a_{n-1} \bar{\alpha}^{n-1} + \dots + a_2 \bar{\alpha}^2 + a_1 \bar{\alpha} + a_0 = 0$$

egyenlőség is teljesül, vagyis azt kapjuk, hogy $P(\bar{\alpha}) = 0$. Így tehát, ha a $P(x)$ valós együtthatós polinomnak gyöke az α komplex (de nem valós) szám, akkor gyöke ennek $\bar{\alpha}$ konjugáltja is. A $P(x)$ polinom tehát osztható lesz a

$$\varphi(x) = x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + \alpha\bar{\alpha} \quad (11.6)$$

másodfokú polinommal, melynek együtthatói valósak. Belátható, hogy a $P(x)$ polinom α és $\bar{\alpha}$ gyökének ugyanaz a multiplicitása. Ezek után azt mondhatjuk, hogy bármely valós együtthatós polinom komplex gyökei páronként konjugáltak. Ebből és a (11.1) alakú felbontás egyértelműségéből a következő eredmény adódik:

11.5. Következmény. Minden valós együtthatós $P(x)$ polinom előállítható, mégpedig a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelműen, az a_n főegyüttható és néhány valós együtthatós tényező szorzataként, mely utóbbiak részben $(x - \beta)$ alakú elsőfokú polinomok - ezek felelnek meg a $P(x)$ polinom β valós gyökeinek -, részben (11.6) alakú másodfokú polinomok, ezek az α és $\bar{\alpha}$ konjugált komplex gyökpároknak felelnek meg.

11.1. Megjegyzés. A valós együtthatós normált polinomok körében csak az $(x - \beta)$ alakú elsőfokú és az $x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + \alpha\bar{\alpha}$ alakú másodfokú polinomok nem bonthatók fel alacsonyabb fokú tényezők szorzatára, vagy, ahogyan ezentúl fogjuk mondani, csak ezek irreducibilisek. Az irreducibilis, vagyis tovább nem bontható, valós polinomok normált alakja tehát $x - \beta$, ahol $\beta \in \mathbf{R}$ vagy $x^2 + px + q$, ahol p és q olyan valós számok, hogy $p^2 - 4q < 0$.

11.14. Példa. Figyeljük meg néhány valós polinom valós számok halmaza feletti tényezőkre bontását:

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= (x^2 - x\sqrt{2} + 1)(x^2 + x\sqrt{2} + 1), \\ x^4 + x^2 + 1 &= (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) \\ x^6 - 1 &= (x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) \\ x^4 - 2x^2 + 1 &= (x - 1)^2(x + 1)^2 \end{aligned}$$

11.8. Egész együtthatós polinom racionális gyökei

Tekintsük a

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

egész együtthatós polinomot.

Egész gyökök keresése. Könnyen belátható a következő állítás:

11.5. Tétel. *Ha az α egész szám gyöke az egész együtthatós $P(x)$ polinomnak, akkor ezen polinom szabad tagja osztható α -val.*

Bizonyítás. Osszuk $P(x)$ -et $(x - \alpha)$ -val:

$$P(x) = (x - \alpha)(b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_2x^2 + b_1x + b_0).$$

Mivel a hányados valamennyi együtthatója, így b_0 is egész szám, s mivel

$$a_0 = -\alpha b_0 = \alpha(-b_0),$$

ezért állításunk bizonyítást nyert. \diamond

Eszerint, ha az egész együtthatós $P(x)$ polinomnak vannak egész gyökei, akkor ezek a szabad tag osztói között találhatók. Ki kell tehát próbálni a szabad tag összes lehetséges osztóit, mind a pozitívokat, mind a negatívokat; ha ezek közül egyik sem bizonyul gyöknek, akkor polinomunknak egyáltalán nincsenek egész gyökei.

A szabad tag valamennyi osztójának kipróbálása olykor túlságosan hosszadalmas lehet, a következő megjegyzések azonban lehetővé teszik, hogy ezeket a számításokat leegyszerűsítsük. Először is, minthogy 1 és -1 mindig osztója a szabad tagnak, kiszámítjuk $P(1)$ -et és $P(-1)$ -et. Ha az α egész szám gyöke $P(x)$ -nek, akkor $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$, s ekkor a $Q(x)$ hányadospolinom valamennyi együtthatója egész szám, ezért a

$$\frac{P(1)}{\alpha - 1} = -Q(1), \quad \frac{P(-1)}{\alpha + 1} = -Q(-1) \quad (11.7)$$

hányadosoknak egész számoknak kell lenniük. Így tehát a szabad tagnak csak azokat az $[1$ -től és (-1) -től különböző] α osztóit kell kipróbálnunk, amelyekre a (11.7) hányadosok is egész számok.

11.15. Példa. Keressük meg a $P(x) = x^3 - 2x^2 - x - 6$ polinom egész gyökeit.

A szabad tag osztói: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Mivel $P(1) = -8$, $P(-1) = -8$, ezért 1 és -1 nem gyök. Továbbá a

$$\frac{-8}{2+1}, \quad \frac{-8}{-2-1}, \quad \frac{-8}{6-1}, \quad \frac{-8}{-6-1}$$

számok törtek, s ezért az osztók közül el kell vetnünk a 2, -2 , 6, -6 számokat, viszont a

$$\frac{-8}{3-1}, \quad \frac{-8}{3+1}, \quad \frac{-8}{-3-1}, \quad \frac{-8}{-3+1}$$

számok egészek, s ezért a 3 és a -3 osztót ki kell próbálnunk. Mivel $P(-3) = -48$, ezért -3 nem gyöke a polinomnak. Végül $P(3) = 0$: tehát 3 gyöke $P(x)$ -nek, s osztással megkaphatjuk, hogy $P(x) = (x - 3)(x^2 + x + 2)$. Könnyen belátható, hogy az $x^2 + x + 2$ hányadosnak 3 nem gyöke, tehát ez a szám $P(x)$ -nek nem többszörös gyöke.

11.16. Példa. Keressük meg a $P(x) = 3x^4 + x^3 - 5x^2 - 2x + 2$ polinom egész gyökeit. Itt a szabad tag osztói ± 1 és ± 2 . Továbbá $P(1) = -1$, $P(-1) = 1$, azaz sem 1, sem -1 nem gyök. Végül, mivel az

$$\frac{1}{2+1} \quad \text{és} \quad \frac{-1}{-2-1}$$

számok törtek, ezért 2 és -2 sem gyök, vagyis a $P(x)$ polinomnak egyáltalán nincsenek egész gyökei.

Racionális gyökök keresése. A racionális gyökök keresésére a következő állítást fogjuk felhasználni:

11.6. Tétel. Ha a $\frac{p}{q}$ racionális szám (p és q relatív prímek) gyöke az egész együtthatós $P(x)$ polinomnak, akkor ezen polinom szabad tagja osztható p -vel, a főegyütthatója pedig osztható q -val.

Bizonyítás. Ha $P\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, akkor $q^n P\left(\frac{p}{q}\right) = 0$ is teljesül, azaz

$$a_n p^n + a_{n-1} q p^{n-1} + \dots + a_2 q^{n-2} p^2 + a_1 q^{n-1} p + a_0 q^n = 0.$$

Mivel a baloldali összeg első n tagja osztható p -vel, ezért az utolsó tag is osztható kell legyen p -vel, ami csak akkor lehetséges, ha p osztója a_0 -nak, a polinom szabad tagjának. Hasonló gondolatmenet szerint, a baloldali összeg utolsó n tagja osztható q -val, ezért az első tag is osztható kell legyen q -val, ez pedig csak akkor lehetséges, ha q osztója a_n -nek, a polinom főegyütthatójának. \diamond

Eszerint, ha az egész együtthatós $P(x)$ polinomnak vannak racionális gyökei, akkor ezek a szabad tag osztói és a főegyüttható osztói által alkotott lehetséges hányadosok között találhatók. Ki kell tehát próbálni az összes ilyen lehetséges hányadosot, mind a pozitívokat, mind a negatívokat; ha ezek közül egyik sem bizonyul gyöknek, akkor a polinomnak egyáltalán nincsenek racionális gyökei.

11.17. Példa. A $P(x) = 3x^4 + 5x^3 + x^2 + 5x - 2$ valós polinom esetében a szabad tag osztói: ± 1 és ± 2 , a főegyüttható osztói pedig ± 1 és ± 3 . A lehetséges hányadosok halmaza: $\left\{\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}\right\}$. Ellenőrzéssel megkapjuk, hogy a polinom racionális gyökei: -2 és $\frac{1}{3}$ és csak ezek.

11.18. Példa. A $P(x) = 9x^3 - 6x^2 - 5x + 2$ valós polinom esetében a szabad tag osztói: ± 1 és ± 2 , a főegyüttható osztói pedig ± 1 , ± 3 és ± 9 . A lehetséges hányadosok halmaza: $\left\{\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{9}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{2}{9}\right\}$. Ellenőrzéssel megkapjuk, hogy a polinom racionális gyökei: 1 , $\frac{1}{3}$ és $-\frac{2}{3}$ és csak ezek.

11.19. Példa. A $P(x) = 2x^4 - x^2 - 3$ valós polinom esetében a szabad tag osztói: ± 1 és ± 3 , a főegyüttható osztói pedig ± 1 és ± 2 . A lehetséges hányadosok halmaza: $\left\{\pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}\right\}$. Ellenőrzéssel megkapjuk, hogy a polinomot ebben az esetben egyik lehetséges racionális gyök sem elégíti ki, tehát nincsenek sem egész, sem racionális gyökei. Ez azt jelenti, hogy a polinom gyökei vagy irracionálisak vagy konjugált komplex párok.

FELADATOK.

1. Írjuk fel azt a legkisebb rendű valós polinomot, amelynek $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 3 - i$, $\alpha_3 = 5$ és $\alpha_4 = -i$ gyökei.

Megoldás. $P(x) = (x - 1)(x - 3 + i)(x - 3 - i)(x - 5)(x - i)(x + i)$ alakban írhatjuk fel a keresett polinomot, hiszen valós polinom esetén a komplex gyökök konjugált komplex gyökpárok formájában jelentkeznek, s az ezeknek megfelelő lineáris tényezők szorzata a valós számok halmaza felett irreducibilis másodfokú polinom. Így a megoldás komplex számok nélkül $P(x) = (x - 1)(x^2 - 6x + 10)(x - 5)(x^2 + 1)$.

2. Határozzuk meg azt a negyedfokú $P(x)$ valós együtthatós polinomot, amelynek -2 kétszeres nullája, $1 - 2i$ nullája és amelyre $P(-3) = 20$.

Megoldás. $P(x) = a_4(x + 2)^2(x - 1 + 2i)(x - 1 - 2i) = a_4(x + 2)^2(x^2 - 2x + 5)$ alakban keressük a megoldást. Figyelembe véve a $P(-3) = 20$ feltételt adódik, hogy $P(-3) = 20a_4$, tehát $a_4 = 1$, azaz $P(x) = (x + 2)^2(x^2 - 2x + 5)$.

3. Oldjuk meg az $x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 10x - 50 = 0$ egyenletet, ha tudjuk, hogy egyik gyöke $x_1 = 1 - 3i$.

Megoldás. Mivel valós együtthatós algebrai egyenletünk van, ezért $x_2 = 1 + 3i$ is az adott egyenlet gyöke. Ez azt jelenti, hogy a $P(x) = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 10x - 50$ polinom osztható az $(x - x_1)(x - x_2) = (x - 1 + 3i)(x - 1 - 3i) = x^2 - 2x + 10$ másodfokú polinommal. Végezzük el az osztást.

$$\begin{array}{r}
 (x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 10x - 50) : (x^2 - 2x + 10) = x^2 - 2x - 5 \\
 x^4 - 2x^3 + 10x^2 \\
 \hline
 -2x^3 - x^2 - 10x - 50 \\
 -2x^3 + 4x^2 - 20x \\
 \hline
 -5x^2 + 10x - 50 \\
 -5x^2 + 10x - 50 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Ekkor az egyenlet alakja $(x^2 - 2x + 10)(x^2 - 2x - 5) = 0$, ahonnan a harmadik és negyedik gyököt az $x^2 - 2x - 5 = 0$ egyenlet gyökei adják. Így a keresett gyökök $x_1 = 1 - 3i$, $x_2 = 1 + 3i$, $x_3 = 1 + \sqrt{6}$, $x_4 = 1 - \sqrt{6}$.

4. Oldjuk meg az $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 20 = 0$ egyenletet, ha tudjuk, hogy egyik gyöke $x_1 = 1 - 2i$.

Megoldás. Mivel valós együtthatós algebrai egyenletünk van, ezért $x_2 = 1 + 2i$ is az adott egyenlet gyöke. Eszerint a $P(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 20$ polinom osztható az $(x - x_1)(x - x_2) = (x - 1 + 2i)(x - 1 - 2i) = x^2 - 2x + 5$ másodfokú polinommal. Elvégezve az osztást adódik a $P(x) = (x^2 - 2x + 5)(x^2 - 2x - 4)$ felbontás, s ekkor $(x^2 - 2x + 5)(x^2 - 2x - 4) = 0$, ahonnan a harmadik és negyedik gyököt az $x^2 - 2x - 4 = 0$ egyenlet gyökei adják. Így

$$x_1 = 1 - 2i, \quad x_2 = 1 + 2i, \quad x_3 = 1 + \sqrt{5}, \quad x_4 = 1 - \sqrt{5}.$$

5. Határozzuk meg a $P(x) = 9x^5 - 6x^4 + 22x^3 - 16x^2 - 15x + 6$ polinom gyökeit, ha tudjuk, hogy egyik gyöke $x_1 = -i\sqrt{3}$, majd bontsuk fel a $P(x)$ polinomot lineáris tényezők szorzatára.

Megoldás. Mivel valós együtthatós algebrai egyenletünk van, ezért $x_2 = i\sqrt{3}$ is az adott egyenlet gyöke. Eszerint a $P(x) = 9x^5 - 6x^4 + 22x^3 - 16x^2 - 15x + 6$ polinom osztható az $(x - x_1)(x - x_2) = (x - i\sqrt{3})(x + i\sqrt{3}) = x^2 + 3$ polinommal. Mivel

$$(9x^5 - 6x^4 + 22x^3 - 16x^2 - 15x + 6) : (x^2 + 3) = 9x^3 - 6x^2 - 5x + 2$$

$$9x^5 + 27x^3$$

$$-6x^4 - 5x^3 - 16x^2 - 15x + 6$$

$$-6x^4 - 18x^2$$

$$-5x^3 + 2x^2 - 15x + 6$$

$$-5x^3 - 15x$$

$$2x^2 + 6$$

$$2x^2 + 6$$

$$0$$

ezért $P(x) = (x^2 + 3)(9x^3 - 6x^2 - 5x + 2)$, ahonnan a harmadik gyököt a kapott hányadospolinom lehetséges egész gyökeinek halmazában keressük, azaz ± 1 vagy ± 2 . Próbálgatással megkapjuk, hogy $P(1) = 0$, Horner eljárással pedig a hányadospolinom is meghatározható, ahonnan $P(x) = (x^2 + 3)(x - 1)(9x^2 + 3x - 2)$ és $x_3 = 1$. A $9x^2 + 3x - 2 = 0$ egyenlet gyökei $x_4 = \frac{1}{3}$ és $x_5 = -\frac{2}{3}$, a felbontás pedig

$$P(x) = 9(x - i\sqrt{3})(x + i\sqrt{3})(x - 1) \left(x - \frac{1}{3}\right) \left(x + \frac{2}{3}\right),$$

azaz $P(x) = (x - i\sqrt{3})(x + i\sqrt{3})(x - 1)(3x - 1)(3x + 2)$.

6. Határozzuk meg a p és q valós paraméterek értékét úgy, hogy $x_1 = 1 + i$ gyöke legyen a $P(x) = 3x^4 + px^3 + qx^2 + 4x - 2$ polinomnak. A kapott a és b értékekre határozzuk meg a $P(x)$ polinom többi gyökét is.

Megoldás. Mivel $x_1 = 1 + i$ gyöke a $P(x) = 3x^4 + px^3 + qx^2 + 4x - 2$ polinomnak, ezért a Bezout-tétel alapján $P(1 + i) = 0$. Behelyettesítés és rendezés után azt kapjuk, hogy $P(1 + i) = -10 - 2p + (2p + 2q + 4)i$, azaz a $-10 - 2p = 0$ és $2p + 2q + 4 = 0$ egyenletrendszernek kell teljesülnie, amelynek megoldása $p = -5$ és $q = 3$. A polinom alakja tehát $P(x) = 3x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 2$. Figyelembe véve, hogy az adott polinomnak $x_2 = 1 - i$ is gyöke kell, hogy legyen, ezért $P(x)$ osztható az $(x - x_1)(x - x_2) = (x - 1 + i)(x - 1 - i) = x^2 - 2x + 2$ másodfokú polinommal. Elvégezve az osztást adódik, hogy $P(x) = (x^2 - 2x + 2)(3x^2 + x - 1)$, ahonnan a harmadik és negyedik gyököt a $3x^2 + x - 1 = 0$ egyenlet gyökei adják, vagyis

$$x_3 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{6} \quad \text{és} \quad x_4 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{6}.$$

7. Adott a $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 8x + 4$ polinom. Határozzuk meg az a és b valós paraméterek értékét úgy, hogy az adott polinomnak két kétszeres valós gyöke legyen. A kapott a és b értékekre határozzuk meg a $P(x)$ polinom gyökeit.

Megoldás. Legyenek x_1 és x_2 a kétszeres valós gyökök. Ekkor

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - x_1)^2(x - x_2)^2, \quad \text{rendezés után pedig} \\ P(x) &= x^4 - 2(x_1 + x_2)x^3 + (x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2)x^2 - 2x_1x_2(x_1 + x_2)x + x_1^2x_2^2. \end{aligned}$$

A szabad tagok kiegyenlítéséből kapjuk, hogy $x_1^2x_2^2 = 4$, ahonnan $x_1x_2 = 2$ vagy $x_1x_2 = -2$. A lineáris tag együtthatóinak kiegyenlítéséből $-2x_1x_2(x_1 + x_2) = -8$ adódik, ahonnan $x_1x_2(x_1 + x_2) = 4$.

1° Ha $x_1x_2 = 2$, akkor $x_1 + x_2 = 2$. Ha kifejezzük x_2 -t az első egyenletből és behelyettesítjük a második egyenletbe, akkor némi rendezés után az $x_1^2 - 2x_1 - 2 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk, amelynek gyökei $(x_1)_1 = 1 + i$ és $(x_1)_2 = 1 - i$. Mivel a kapott gyökök nem valósak, ezért ez ellentmond a feladat feltételeinek.

2° Ha $x_1x_2 = -2$, akkor $x_1 + x_2 = -2$. Ha kifejezzük x_2 -t az első egyenletből és behelyettesítjük a második egyenletbe, akkor némi rendezés után az $x_1^2 + 2x_1 - 2 = 0$ egyenlethez jutunk, amelynek gyökei $(x_1)_1 = -1 + \sqrt{3}$ és $(x_1)_2 = -1 - \sqrt{3}$. Mivel ezek már valós gyökök, ezért az együtthatók további kiegyenlítéséből megkapjuk az $a = -2(x_1 + x_2) = 4$, $b = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + 2x_1x_2 = (-2)^2 + 2 \cdot (-2) = 0$ együtthatókat. A keresett polinom tehát $P(x) = x^4 + 4x^3 - 8x + 4$.

8. Határozzuk meg az a és b valós paraméterek értékeit úgy, hogy $x_1 = i$ gyöke legyen a $P(x) = 6x^5 - 13x^4 + ax^3 - 9x^2 + b$ polinomnak. A kapott a és b értékekre határozd meg a $P(x)$ polinom gyökeit, majd bontsd fel lineáris tényezők szorzatára.

Megoldás. Mivel $x_1 = i$ gyöke a $P(x) = 6x^5 - 13x^4 + ax^3 - 9x^2 + b$ polinomnak, ezért a Bezout-tétel alapján $P(i) = 0$. Behelyettesítés és rendezés után azt kapjuk, hogy $P(i) = 6i^5 - 13i^4 + ai^3 - 9i^2 + b = 6i - 13 - ai + 9 + b$, azaz a $6 - a = 0$ és $b - 4 = 0$ egyenleteknek kell teljesülnie, ahonnan $a = 6$ és $b = 4$. A polinom alakja tehát $P(x) = 6x^5 - 13x^4 + 6x^3 - 9x^2 + 4$. Mivel $x_1 = i$ az adott valós polinom gyöke, ezért $x_2 = -i$ is gyöke, tehát a $P(x)$ polinom osztható $x^2 + 1$ -gyel. Végezzük el az osztást.

$$\begin{array}{r} (6x^5 - 13x^4 + 6x^3 - 9x^2 + 4) : (x^2 + 1) = 6x^3 - 13x^2 + 4 \\ 6x^5 + 6x^3 \\ \hline -13x^4 - 9x^2 + 4 \\ -13x^4 - 13x^2 \\ \hline 4x^2 + 4 \\ 4x^2 + 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

Most tehát $P(x) = (x^2 + 1)(6x^3 - 13x^2 + 4)$. Próbálgatással megkaphatjuk a lehetséges egész gyökök $\{\pm 1, \pm 2\}$ halmazából, hogy $x_3 = 2$ a $Q(x) = 6x^3 - 13x^2 + 4$ polinom gyöke, mivel $Q(2) = 0$.

Végezzük el Horner-elrendezéssel a $Q(x)$ polinom $x - 2$ -vel való osztását. Ekkor

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 6 & -13 & 0 & 4 \\ & 6 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = (x^2 + 1)(x - 2)(6x^2 - x - 2).$$

Mivel a $6x^2 - x - 2 = 0$ egyenlet gyökei $x_4 = \frac{2}{3}$ és $x_5 = -\frac{1}{2}$, ezért a $P(x)$ polinom felbontása $P(x) = 6(x - i)(x + i)(x - 2)\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$, azaz a beszorzás után $P(x) = (x - i)(x + i)(x - 2)(3x - 2)(2x + 1)$.

9. Legyen $P(x) = 6x^5 + 17x^4 + 14x^3 + 48x^2 + ax + b$ adott valós polinom. Határozzuk meg az a és b paraméterek értékeit úgy, hogy $x_1 = i\sqrt{3}$ a $P(x)$ polinom gyöke legyen. A kapott paraméterértékekre számítsuk ki a $P(x)$ polinom gyökeit, majd írjuk fel a $P(x)$ polinomot lineáris tényezők szorzataként.

Megoldás. Mivel valós együtthatós a polinom, ezért $x_2 = -i\sqrt{3}$ is az adott polinom gyöke. Eszerint a $P(x) = 6x^5 + 17x^4 + 14x^3 + 48x^2 + ax + b$ polinom osztható kell legyen az $(x - x_1)(x - x_2) = (x - i\sqrt{3})(x + i\sqrt{3}) = x^2 + 3$ polinommal. Mivel

$$(6x^5 + 17x^4 + 14x^3 + 48x^2 + ax + b) : (x^2 + 3) = 6x^3 + 17x^2 - 4x - 3$$

$$6x^5 + 18x^3$$

$$17x^4 - 4x^3 + 48x^2 + ax + b$$

$$17x^4 + 51x^2$$

$$-4x^3 - 3x^2 + ax + b$$

$$-4x^3 - 12x$$

$$-3x^2 + (a + 12)x + b$$

$$-3x^2 - 9$$

$$(a + 12)x + b + 9$$

és az osztás maradéka nulla kell legyen, ezért az $(a + 12)x + b + 9 = 0$ egyenletnek kell teljesülnie, ahonnan $a = -12$ és $b = -9$. Ez azt jelenti, hogy a polinom most $P(x) = 6x^5 + 17x^4 + 14x^3 + 48x^2 - 12x - 9$ alakú, amelynek ismerjük a felbontását is, ami $P(x) = (x^2 + 3)(6x^3 + 17x^2 - 4x - 3)$. A harmadik gyököt a kapott $H(x) = 6x^3 + 17x^2 - 4x - 3$ hányadospolinom lehetséges egész gyökeinek halmazában keressük, azaz ± 1 vagy ± 3 lehet. Próbálgatással megkapjuk, hogy $H(-3) = 0$, a Horner elrendezéssel pedig a $H(x)$ polinom felbontása is meghatározható. Ennek alapján $x_3 = -3$ a harmadik gyök és $P(x) = (x^2 + 3)(x + 3)(6x^2 - x - 1)$. A $6x^2 - x - 1 = 0$ egyenlet gyökei $x_4 = \frac{1}{2}$ és $x_5 = -\frac{1}{3}$, a felbontás pedig

$$P(x) = 6(x - i\sqrt{3})(x + i\sqrt{3})(x + 3)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right),$$

azaz $P(x) = (x - i\sqrt{3})(x + i\sqrt{3})(x + 3)(2x - 1)(3x + 1)$.

10. Határozzuk meg a $P(x) = 3x^4 + x^3 - 5x^2 - 2x + 2$ polinom egész gyökeit, majd bontsuk tényezőire.

Megoldás. A szabad tag osztói: $\pm 1, \pm 2$. Mivel $P(1) = -1$, $P(-1) = 1$, ezért 1 és -1 nem gyök. Ezért most még a 2 és a -2 osztót kell kipróbálnunk. Mivel $P(2) = 34$, $P(-2) = 26$, ezért 2 és -2 sem gyöke a polinomnak. Ezt abból is láthattuk volna, hogy

$$\frac{P(1)}{-2-1} = -\frac{1}{3} \quad \text{és} \quad \frac{P(-1)}{2+1} = -\frac{1}{3}$$

nem egész számok. A $P(x)$ polinomnak tehát nincs egész gyöke.

11. Keressük meg a $P(x) = 6x^3 - 13x^2 + 9x - 2$ polinom racionális gyökeit, majd bontsuk tényezőire.

Megoldás. A $P(x) = 6x^3 - 13x^2 + 9x - 2$ valós polinom esetében a szabad tag osztói ± 1 és ± 2 , a főegyüttható osztói pedig $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ és ± 6 . A lehetséges hányadosok halmaza $\left\{ \pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{6}, \pm \frac{2}{3} \right\}$. Ellenőrzéssel megkapjuk, hogy a polinom racionális gyökei: $1, \frac{1}{2}$ és $\frac{2}{3}$ és csak ezek. A polinom felbontása ennek alapján $P(x) = 6(x-1) \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{2}{3}\right)$, a konstanssal való beszorzás után pedig $P(x) = (x-1)(2x-1)(3x-2)$.

12. Keressük meg a $P(x)$ polinom racionális gyökeit, majd bontsuk tényezőire, ha a) $P(x) = 6x^3 + 13x^2 + 15x - 25$; b) $P(x) = 4x^3 - 7x^2 - x + 3$;

Megoldás. a) A $P(x) = 6x^3 + 13x^2 + 15x - 25$ valós polinom esetében a szabad tag osztói $\pm 1, \pm 5$ és ± 25 , a főegyüttható osztói pedig $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ és ± 6 . A lehetséges racionális gyökök halmaza a

$$\left\{ \pm 1, \pm 5, \pm 25, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{6}, \pm \frac{5}{2}, \pm \frac{5}{3}, \pm \frac{5}{6}, \pm \frac{25}{2}, \pm \frac{25}{3}, \pm \frac{25}{6} \right\}$$

halmaz, ahonnan próbálgatással megkapjuk, hogy a polinom egyetlen racionális gyöke $\frac{5}{6}$ és így

$$P(x) = 6 \left(x - \frac{5}{6}\right) (x^2 + 3x + 5) = (6x - 5)(x^2 + 3x + 5),$$

hiszen az $x^2 + 3x + 5 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei konjugált komplex gyökpárok.

b) A $P(x) = 4x^3 - 7x^2 - x + 3$ valós polinom esetében a lehetséges racionális gyökök halmaza $\left\{ \pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{3}{4} \right\}$, az adott polinom egyetlen racionális gyöke $\frac{3}{4}$ és így

$$P(x) = \left(x - \frac{3}{4}\right) (4x^2 - 4x - 4) = (4x - 3)(x^2 - x - 1),$$

hiszen az $x^2 - x - 1 = 0$ másodfokú egyenlet megoldásai irracionális számok.

- 13.** Keressük meg a $P(x) = x^3 + \frac{7}{6}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{3}$ polinom racionális gyökeit, majd bontsuk tényezőire.

Megoldás. Most a $6P(x) = 6x^3 + 7x^2 - 9x + 2$ valós polinom racionális gyökeit keressük. A lehetséges racionális gyökök halmaza $\left\{\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{1}{6}\right\}$. A $6P(x)$ polinom racionális gyökei $-2, \frac{1}{2}$ és $\frac{1}{3}$, ahonnan

$$6P(x) = 6(x+2) \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{1}{3}\right),$$

a 6-tal való osztás után pedig megkapjuk, hogy $P(x) = (x+2) \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{1}{3}\right)$.

- 14.** Adott a $P(x) = x^3 - b^3x^2 - b^2x + 1$ polinom, ahol $b \in \mathbf{N}_0$. Határozzuk meg a b valós paraméter értékét úgy, hogy a $P(x)$ polinomnak legalább egy racionális gyöke legyen.

Megoldás. A $P(x)$ polinom lehetséges racionális gyökeinek halmaza $\{+1, -1\}$. Válasszuk ki a $+1$ -et racionális gyöknek. Ekkor a $P(1) = 0$ egyenlőségnek kell teljesülnie, ami a $b^3 + b^2 - 2 = 0$ egyenlethez vezet, amelynek $b = 1$ racionális gyöke. Ebből $(b-1)(b^2 + 2b + 2) = 0$, ahonnan kiderül, hogy a másik két gyök konjugált komplex gyökpár, tehát az egyetlen megoldás $b = 1$, azaz

$$P(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2(x+1).$$

Válasszuk most a -1 -et racionális gyöknek. Ekkor $P(-1) = 0$ feltételből kapjuk a $b^3 - b^2 = 0$ egyenletet, amelynek megoldásai $b = 0$ vagy $b = 1$. Mivel a $b = 1$ esetet már letárgyaltuk, ezért nézzük meg, hogy mi történik a $b = 0$ esetben. Ekkor $P(x) = x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$.

- 15.** Adott a $P(x) = x^4 + 3bx^3 + 3b^2x^2 + b^3x + 1$ polinom, ahol $b \in \mathbf{Z}$. Határozzuk meg a b valós paraméter minden olyan értékét, amelyre a $P(x)$ polinomnak lesz legalább egy racionális gyöke.

Megoldás. A $P(x)$ polinom lehetséges racionális gyökeinek halmaza $\{+1, -1\}$. Ha $+1$ -et választjuk racionális gyöknek, akkor a $P(1) = 0$ egyenlőségnek kell teljesülnie, ami a $b^3 + 3b^2 + 3b + 2 = 0$ egyenlethez vezet, amelynek $b = -2$ egész gyöke. Ebből $(b+2)(b^2 + b + 1) = 0$, ahonnan kiderül, hogy a másik két gyök konjugált komplex gyökpár, tehát az egyetlen megoldás $b = -2$, azaz

$$P(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x + 1 = (x-1)(x^3 - 5x^2 + 7x - 1).$$

Válasszuk most a -1 -et racionális gyöknek. Ekkor $P(-1) = 0$ feltételből kapjuk a $b^3 - 3b^2 + 3b - 2 = 0$ egyenletet, amelynek egész megoldása $b = 2$. Most

$$P(x) = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x + 1 = (x+1)(x^3 + 5x^2 + 7x + 1).$$

11.9. Harmadfokú egyenletek

Az algebra alaptétele megállapítja ugyan, hogy minden komplex együtthatós n -edfokú polinomnak létezik n komplex gyöke, viszont ez a tétel semmilyen gyakorlati módszerrel nem szolgál a gyökök megkeresésére. Tekintsük a továbbiakban azokat az eseteket, amikor a megoldás aránylag egyszerűen előállítható.

Elsőfokú egyenletek. Tekintsük az

$$ax + b = 0$$

elsőfokú egyenletet, amikor a és b komplex számok, $a \neq 0$. Az egyetlen megoldás ebben az esetben:

$$x_1 = -\frac{b}{a}.$$

Másodfokú egyenletek. Legyen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

másodfokú egyenlet, ahol a , b és c komplex számok, $a \neq 0$. A megoldóképlet szerint a két megoldás:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Harmadfokú egyenletek. Tekintsük először a komplex együtthatós

$$x^3 + px + q = 0 \tag{11.8}$$

harmadfokú egyenlet. Ez az egyenlet mindig megoldható algebrailag, gyökeit az

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2}}$$

gyökképlet szolgáltatja, ahol a három megoldás a három-három köbgyök segítségével határozható meg, mégpedig úgy, hogy a két köbgyök szorzata $-p/2$ legyen.

Ezt a gyökképletet *Cardano-féle formulának* nevezzük.

Semmi akadályja annak, hogy $a \neq 0$ esetben az

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

komplex együtthatós harmadfokú egyenletnek is felírjuk a megoldóképletét, de bonyolultsága miatt ez nem használatos. Gyakorlatilag egyszerűbb a megoldandó egyenletet a (11.8) alakra hozni, ezt megoldani, s ezekből a megoldásokból visszahelyettesítéssel kiszámítani az eredeti egyenlet megoldásait.

A harmadfokú egyenlet megoldóképletét, akár a negyedfokú egyenletre vonatkozó bonyolult megoldási eljárást, nemigen alkalmazzuk a gyakorlatban. A feladatoknál általában a valós együtthatós algebrai egyenletekre szorítkozunk, s a kettőnél magasabb fokú egyenletek megoldásainak meghatározására, hacsak lehet elkerülni a Cardano-féle formulát és a hozzá hasonló bonyolult eljárásokat. Legcélszerűbb ilyen esetekben közelítő módszereket alkalmazni, s a zsebszámológépek ilyen elven is adják meg a megoldásokat. A másik lehetőség az, hogy speciális esetben - egész együtthatós polinom esetében -, felírjuk a lehetséges racionális gyökök halmazát, amely módszerről az előző fejezetben beszéltünk.

11.10. Magasabbfokú egyenletrendszerek

A másodfokú kétismeretlenes egyenletrendszerek megoldására tudtunk bizonyos eljárásokat megadni különböző egyenletrendszerek esetén. A harmad- és magasabbfokú egyenletrendszereknél ilyen általános megoldási módszereket nem könnyű megadni, ugyanis összetettségük miatt maguk az egyenletrendszerek sem sorolhatók egyértelműen típusokba. Néhány példán keresztül azonban bemutatásra kerülnek a legjellemző típusok. Tekintsük először a harmadfokú homogén egyenletrendszereket, illetve a homogén rendszerekre visszavezethető eseteket.

11.20. Példa. Oldjuk meg a következő harmadfokú egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}x^3 - 2x^2y + y^3 &= 2, \\ 2y^3 - 3xy^2 + x^2y &= -6.\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy az egyenletek bal oldalán csak harmadfokú tagok szerepelnek, de a szabad tagok miatt egyik egyenlet sem homogén. Ha az első egyenletet megszorozzuk 3-mal, majd a két egyenletet összeadjuk, akkor az

$$3x^3 - 5x^2y - 3xy^2 + 5y^3 = 0$$

homogén egyenletet kapjuk. Osszuk el ezt az egyenletet y^3 -al, majd a kapott

$$3\left(\frac{x}{y}\right)^3 - 5\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 3\left(\frac{x}{y}\right) + 5 = 0$$

egyenletbe vezessük be az $\frac{x}{y} = t$ helyettesítést. Ily módon a

$$3t^3 - 5t^2 - 3t + 5 = 0$$

egyenlethez jutunk, amelynek megoldásait a bal oldal szorzattá alakítása után a

$$(t-1)(t+1)(3t-5) = 0$$

egyenletből olvashatjuk ki, vagy pedig a lehetséges racionális gyökök halmazából. A megoldások $t_1 = 1$, $t_2 = -1$ és $t_3 = \frac{5}{3}$, melyeket visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe kapjuk a megfelelő (x, y) megoldásokat.

Ha $t_1 = \frac{x}{y} = 1$, akkor $y = x$, visszahelyettesítés után az

$$x^3 - 2x^3 + x^3 = 2, \quad \text{azaz} \quad 0 = 2$$

egyenletet kapjuk, amely ellentmondás, tehát ebben az esetben nincs megoldás.

Ha $t_1 = \frac{x}{y} = -1$, akkor $y = -x$, visszahelyettesítés után az

$$x^3 + 2x^3 - x^3 = 2, \quad \text{illetve az} \quad x^3 = 1$$

egyenlet adódik, amelynek három megoldása az $x^3 - 1 = 0$, illetve az $(x-1)(x^2+x+1) = 0$ alakból felírható. Mivel

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad x_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2},$$

így a megoldások az

$$(1, -1), \quad \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right) \quad \text{és} \quad \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right)$$

rendezett párok.

Ha $t_1 = \frac{x}{y} = \frac{5}{3}$, akkor $y = \frac{3x}{5}$, visszahelyettesítés után az

$$x^3 - \frac{6}{5}x^3 + \frac{27}{125}x^3 = 2, \quad \text{azaz} \quad x^5 = 125$$

egyenletet kapjuk, melynek három megoldása az $x^3 - 125 = 0$ egyenletből határozható meg, amely az $(x - 5)(x^2 + 5x + 25) = 0$ alakból felírható. Mivel

$$x_1 = 5, \quad x_2 = \frac{-5 + 5i\sqrt{3}}{2}, \quad x_3 = \frac{-5 - 5i\sqrt{3}}{2},$$

így a megoldások az

$$(5, 3), \quad \left(\frac{-5 + 5i\sqrt{3}}{2}, \frac{-3 + 3i\sqrt{3}}{2} \right) \quad \text{és} \quad \left(\frac{-5 - 5i\sqrt{3}}{2}, \frac{-3 - 3i\sqrt{3}}{2} \right)$$

rendezett párok.

Az egyenletrendszer megoldáshalmaza a komplex számok körében

$$M = \left\{ (1, -1), (5, 3), \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right), \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right), \right. \\ \left. \left(\frac{-5 + 5i\sqrt{3}}{2}, \frac{-3 + 3i\sqrt{3}}{2} \right), \left(\frac{-5 - 5i\sqrt{3}}{2}, \frac{-3 - 3i\sqrt{3}}{2} \right) \right\},$$

míg a valós számok halmaza felett

$$M = \{(1, -1), (5, 3)\}.$$

Sok esetben tényezőkre bontás és csoportosítás után új változókat tudunk bevezetni, s így módon az eredeti rendszertől egyszerűbb egyenletrendszert kapunk. Egy ilyen példa a következő is.

11.21. Példa. Oldjuk meg a valós számok halmazában a következő harmadfokú egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= 2, \\ xy(x + y) &= 2. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy az első egyenlet bal oldala köbök összege, tehát szorzatra bontható, s így az egyenletrendszer felírható, mint

$$\begin{aligned} (x + y)(x^2 - xy + y^2) &= 2, \\ xy(x + y) &= 2, \end{aligned}$$

illetve az első egyenlet némi átalakítása után, mint

$$\begin{aligned}(x+y)((x+y)^2 - 3xy) &= 2, \\ xy(x+y) &= 2.\end{aligned}$$

Vezessük most be az $x+y=a$ és $xy=b$ helyettesítéseket. Ekkor az

$$\begin{aligned}a(a^2 - 3b) &= 2, \\ ab &= 2\end{aligned}$$

egyenletrendszert kapjuk, ahonnan $b = \frac{2}{a}$ és ezt az első egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$a(a^2 - 3 \cdot \frac{2}{a}) = 2, \quad \text{illetve} \quad a^3 - 6 = 2, \quad \text{ahonnan} \quad a^3 = 8.$$

A kapott egyenlet egyetlen valós megoldása $a = 2$, amiből $b = 1$ következik, visszahelyettesítés után pedig $x+y=2$, valamint $xy=1$. Most egy másodfokú egyenletrendszert kaptunk, ahol $y=2-x$, behelyettesítve a második egyenletbe pedig az

$$x(2-x) = 1, \quad \text{illetve} \quad x^2 - 2x + 1 = 0$$

másodfokú egyenlet adódik, amelynek egyetlen megoldása $x=1$. Ekkor $y=1$, a keresett valós megoldás $(1,1)$, a megoldáshalmaz pedig $M = \{(1,1)\}$.

Több ismeretlen esetén még összetettebbek lehetnek a magasabbfokú egyenletrendszerek. Jól mutatja ezt a következő példa is.

11.22. Példa. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}x+y+z &= 1, \\ x^2+y^2+z^2 &= 1, \\ x^3+y^3+z^3 &= 1.\end{aligned}$$

Emeljük négyzetre az első egyenletet. Ekkor az

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 1$$

egyenletet kapjuk, amelyben felhasználva a második egyenletet adódik, hogy

$$1 + 2xy + 2xz + 2yz = 1, \quad \text{azaz} \quad xy + xz + yz = 0.$$

Szorozzuk most össze az eredeti egyenletrendszer első és második egyenletét. Ekkor

$$x^3 + y^3 + z^3 + xy^2 + xz^2 + yx^2 + yz^2 + zx^2 + zy^2 = 1.$$

Felhasználva a harmadik egyenletet, átcsoportosítás után adódik, hogy

$$x(y^2 + z^2) + y(x^2 + z^2) + z(x^2 + y^2) = 0,$$

amely kifejezés felírható a következő alakban is:

$$x[(y+z)^2 - 2yz] + y[(x+z)^2 - 2xz] + z[(x+y)^2 - 2xy].$$

Az egyenletrendszer első egyenletéből kapjuk, hogy $y + z = 1 - x$, $x + z = 1 - y$ és $x + y = 1 - z$, majd behelyettesítve ezeket az előző egyenletbe adódik, hogy

$$x[(1-x)^2 - 2yz] + y[(1-y)^2 - 2xz] + z[(1-z)^2 - 2xy].$$

Rendezve a kapott egyenletet kapjuk, hogy

$$x(1 - 2x + x^2 - 2yz) + y(1 - 2y + y^2 - 2xz) + z(1 - 2z + z^2 - 2xy) = 0.$$

Beszorzás és rendezés után most az

$$x + y + z - 2(x^2 + y^2 + z^2) + x^3 + y^3 + z^3 - 6xyz = 0$$

ekvivalens egyenlet következik. Felhasználva az eredeti egyenletrendszer mindhárom egyenletét kapjuk az

$$1 - 2 + 1 - 6xyz = 0$$

egyenletet, ahonnan $xyz = 0$, azaz $x = 0$ vagy $y = 0$ vagy $z = 0$.

1° Legyen $x = 0$. Ekkor az $xy + xz + yz = 0$ egyenletből $yz = 0$, ahonnan $y = 0$ vagy $z = 0$. Ha $y = 0$, akkor az $x + y + z = 1$ egyenletből $z = 1$. Ha pedig $z = 0$, akkor az $x + y + z = 1$ egyenletből $y = 1$.

2° Legyen most $y = 0$. Az $xy + xz + yz = 0$ egyenletből $xz = 0$, ahonnan $x = 0$ vagy $z = 0$. Ha $x = 0$, akkor az $x + y + z = 1$ egyenletből $z = 1$, de ezt a megoldást már megkaptuk. Ha pedig $z = 0$, akkor az $x + y + z = 1$ egyenletből $y = 1$, de ezt a megoldást is már megkaptuk.

3° Legyen most $z = 0$. Ekkor az $xy + xz + yz = 0$ egyenletből $xy = 0$, ahonnan $x = 0$ vagy $y = 0$. Ha $x = 0$, akkor az $x + y + z = 1$ egyenletből $y = 1$, de ezt a megoldást is már megkaptuk. Ha pedig $y = 0$, akkor az $x + y + z = 1$ egyenletből $x = 1$.

A megoldások tehát az $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ és $(0, 0, 1)$ rendezett hármasok.

FELADATOK

Oldjuk meg a valós számok halmazában a következő magasabbfokú egyenletrendszereket.

1.

$$\begin{aligned} x(x+1)(3x^2+5y) &= 144, \\ 4x^2+x+5y &= 24. \end{aligned}$$

Megoldás. A második egyenletből $5y = 24 - 4x^2 - x$ s ezt az első egyenletbe helyettesítve kapjuk az $x(x+1)(3x^2+24-4x^2-x) = 144$ egyenletet. Ebből adódik az

$$(x^2+x)(-x^2-x+24) = 144,$$

illetve némi rendezés után az

$$x^4 + 2x^3 - 23x^2 - 24x + 144 = 0$$

negyedfokú egyenlet. A lehetséges racionális gyökök halmazából próbálgatással Horner-elrendezés segítségével könnyen ellenőrizhető, hogy a kapott egyenlet gyökei $x_1 = x_2 = 3$ és $x_3 = x_4 = -4$, a megfelelő y értékek pedig

$$y_1 = y_2 = \frac{1}{5}(24 - 4 \cdot 3^2 - 3) = -3 \quad \text{és} \quad y_3 = y_4 = \frac{1}{5}(24 - 4 \cdot (-4)^2 - (-4)) = -\frac{36}{5}.$$

A megoldáshalmaz tehát

$$M = \left\{ (3, -3), \left(-4, -\frac{36}{5} \right) \right\}.$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{y} + xy &= 40, \\ \frac{y^3}{x} + xy &= 10. \end{aligned}$$

Megoldás. Az egyenletrendszer akkor értelmezett, ha $x \neq 0$ és $y \neq 0$. Szorozzuk be az első egyenletet y -nal, a másodikat pedig x -szel. Ekkor az

$$\begin{aligned} x^3 + xy^2 &= 40y, \\ y^3 + x^2y &= 10x, \end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned} x(x^2 + y^2) &= 40y, \\ y(y^2 + x^2) &= 10x, \end{aligned}$$

egyenletrendszer adódik. Mivel $x^2 + y^2 \neq 0$, ezért eloszthatjuk az egyenletek bal és jobb oldalait egymással. Ekkor az

$$\frac{x}{y} = \frac{4y}{x}$$

egyenletet kapjuk, ahonnan pedig $x^2 = 4y^2$, illetve $(x - 2y)(x + 2y) = 0$ következik. Ha $x = 2y$, akkor ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe a $8y^3 + 2y^3 = 40y$, azaz $10y^3 - 40y = 0$ egyenletet kapjuk. Tényezőkre bontva a bal oldalt jön, hogy

$$10y(y - 2)(y + 2) = 0,$$

ahonnan $y \neq 0$ miatt $y_1 = 2$ és $y_2 = -2$, illetve $x_1 = 4$ és $x_2 = -4$ adódik.

Ha $x = -2y$, akkor ezt a második egyenletbe helyettesítve $y^3 + 4y^3 = -20y$, azaz felbontva $5y(y^2 + 4) = 0$ adódik. A kapott egyenletnek $y \neq 0$ miatt nincs valós megoldása, tehát a megoldáshalmaz

$$M = \{(4, 2), (-4, -2)\}.$$

3.

$$\begin{aligned} 7x^2y^2 - x^4 - y^4 &= 155, \\ 3xy - x^2 - y^2 &= 5. \end{aligned}$$

Megoldás. Az egyenletrendszer némi átalakítás után felírható a következő alakban:

$$\begin{aligned} 7(xy)^2 - [(x^2 + y^2)^2 - 2(xy)^2] &= 155, \\ 3xy - (x^2 + y^2) &= 5. \end{aligned}$$

Bevezetve a kapott egyenletrendszerbe az $xy = a$ és $x^2 + y^2 = b$ helyettesítést kapjuk az

$$\begin{aligned} 7a^2 - (b^2 - 2a^2) &= 155, \\ 3a - b &= 5. \end{aligned}$$

egyenletrendszert. Mivel most a második egyenletből $b = 3a - 5$, ezt az első egyenletbe helyettesítve adódik, hogy

$$7a^2 - (3a - 5)^2 + 2a^2 = 155, \quad \text{azaz} \quad 30a - 180 = 0,$$

amely egyenlet megoldása $a = 6$, ahonnan pedig $b = 13$.

Helyettesítsük most vissza a -t és b -t. Most az $xy = 6$ és $x^2 + y^2 = 13$ másodfokú egyenletrendszert kell megoldani. Az első egyenletből $y = \frac{6}{x}$, amely egyenlőségnek a második egyenletbe helyettesítése a feladatot az $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ bikvadratikus egyenletre vezeti vissza. A bikvadratikus egyenlet négy megoldása

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -3 \quad \text{és} \quad x_4 = 3,$$

az eredeti egyenlet megoldáshalmaza pedig

$$M = \{(-2, -3), (2, 3), (-3, -2), (3, 2)\}.$$

4.

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{x+y} - \sqrt[4]{x-y} &= 2, \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} &= 8. \end{aligned}$$

Megoldás. Az egyenletrendszer $x+y \geq 0$ és $x-y \geq 0$ esetén értelmezett. Vezessük be az $x+y = a^4$ és $x-y = b^4$ helyettesítést. Ekkor az

$$\begin{aligned} a - b &= 2, \\ a^2 - b^2 &= 8, \end{aligned}$$

egyenletrendszert kapjuk, ahol a második egyenletet átalakítva $(a-b)(a+b) = 8$ adódik, amelybe behelyettesítjük az első egyenletet, s így az egyenletrendszer valójában

$$\begin{aligned} a - b &= 2, \\ a + b &= 4. \end{aligned}$$

Összeadva a két egyenlet megfelelő oldalait $2a = 6$, azaz $a = 3$, ebből pedig $b = 1$ adódik. Ezekkel a megoldásokkal az

$$\begin{aligned}x + y &= 81, \\x - y &= 1,\end{aligned}$$

egyenletrendszert kapjuk. Összeadva a két egyenlet megfelelő oldalait $2x = 82$, azaz $x = 42$, illetve $y = 40$ adódik. Az egyenletrendszer megoldása tehát a $(41, 40)$ rendezett pár, megoldáshalmaza pedig

$$M = \{(41, 40)\}.$$

5. Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} &= \frac{175}{36}, \\x - y &= 1.\end{aligned}$$

Megoldás. Az egyenletrendszer értelmezett, ha $x \neq 0$ és $y \neq 0$. Vezessük be az első egyenletbe az $\frac{x}{y} = t$ helyettesítést. Ekkor a

$$t^2 + \frac{1}{t^2} + t + \frac{1}{t} = \frac{175}{36}$$

egyenletet kapjuk. A szimmetrikus egyenletek elméletéből tudjuk, hogy ha $t + \frac{1}{t} = z$, akkor $t^2 + \frac{1}{t^2} = z^2 - 2$, ezért az egyenlet alakja most

$$z^2 - 2 + z = \frac{175}{36}, \quad \text{illetve} \quad 36z^2 + 36z - 247 = 0,$$

ahonnan a megoldások $z_1 = \frac{13}{6}$ és $z_2 = -\frac{19}{6}$.

Ha $z = \frac{13}{6}$, akkor $t + \frac{1}{t} = \frac{13}{6}$, ahonnan $6t^2 - 13t + 6 = 0$, amelynek megoldásai $t_1 = \frac{3}{2}$ és $t_2 = \frac{2}{3}$. Visszahelyettesítés után

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{2}, \quad \text{illetve} \quad \frac{x}{y} = \frac{2}{3},$$

adódik, ahonnan $x = \frac{3}{2}y$ vagy $x = \frac{2}{3}y$ következik. Most ezeket az összefüggéseket helyettesítjük az eredeti egyenletrendszer második egyenletébe. Ekkor a

$$\frac{3}{2}y - y = 1, \quad \text{illetve} \quad \frac{2}{3}y - y = 1$$

egyenleteket kapjuk, ahonnan $y_1 = 2$ és $y_2 = -3$. A megfelelő x értékek $x_1 = 3$ és $x_2 = -2$. A megoldások tehát $(-2, -3)$ és $(3, 2)$, a megoldáshalmaz pedig

$$M = \{(-2, -3), (3, 2)\}.$$

Irodalom

- [1] *Kleine Enzyklopädie - Mathematik*, VEB Velag Enzyklopädie, Leipzig, 1967.
- [2] *Matematikai kislexikon*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972.
- [3] *Természettudományi kislexikon*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1971.
- [4] Apsen B., Repetitorij više matematike, prvi dio, Tehnička Knjiga, Zagreb, 1972.
- [5] Beres Z., *Válogatott matematikafeladatok*, Kosztolányi Diáksegélyező Egyesület, Szabadka, 2007.
- [6] Benedek István, *A tudás útja*, Magyar Könyvklub, Budapest, 1994.
- [7] Wolfgang Blum, *Matematika*, Tesslof és Babilon Kiadó, Budapest, 2001.
- [8] Bogoslavov V., *Matematikai feladatok gyűjteménye*, Zavod za udzbenik i nastavna sredstva, Belgrád, 2001.
- [9] Boros I., *Diszkrét matematika*, Szabadkai Műszaki Szakfőiskola, Szabadka, 2008.
- [10] Boros I., Csikós Pajor G., *Diszkrét matematika, Feladatgyűjtemény*, Szabadkai Műszaki Szakfőiskola, Szabadka, 2008.
- [11] Bronštejn I. N., Semendjajev K. A., Musiol G., Milig H., *Matematički priručnik*, SOHO GRAPH, Beograd, 2004.
- [12] Dejić M., Dejić B., *Zanimljivi svet matematike*, NIRO "Tehnička knjiga", Beograd, 1987.
- [13] Dugopolski M., *College Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, USA, 1995.
- [14] Georgijević D., Obradović M., *Zbirka rešenih zadataka za drugi razred srednjih škola*, Matematiskop, Beograd, 2000.
- [15] Gerőcs L., *Új témakörök az érettségien – Matematika*, DFT–Hungária Könyvkiadó, Budapest, 2006.
- [16] Freud R., *Lineáris algebra* ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1996.
- [17] Fried E., *LINEÁRIS ALGEBRA a speciális matematikai osztályok számára*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.
- [18] Fried E., *ALGEBRA a speciális matematikai osztályok számára*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.
- [19] Hajdú S., *Matematika 7–8 – feladatgyűjtemény*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1993.

- [20] Hajnal I., Nemetz T., Pintér L., Urbán J., *Matematika (fakultatív B változat) IV. osztály*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1982.
- [21] Hajnal I., *Matematika a speciális matematika I. osztálya számára*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.
- [22] Hajnal I., Pintér L., *Matematika (fakultatív B változat) III. osztály*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2000.
- [23] Hadžić O., Takači Dj., *Matematičke metode za studente prirodnih nauka*, Újvidéki Egyetem, TTK, Újvidék, 2000.
- [24] Herceg J., Surányi J., Kővári K., Rábai I., Oláh Gy., *Matematika – a matematikai osztályok számára II.*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.
- [25] Kadelburg Z., Mičić V., Ognjanović S., *Analiza sa algebrom 2, udžbenik sa zbirkom zadataka za 2. razred Matematičke gimnazije*, KRUG, Beograd, 2008.
- [26] Kadelburg Z., Mičić V., Ognjanović S., *Analiza sa algebrom 3, udžbenik sa zbirkom zadataka za 3. razred Matematičke gimnazije*, KRUG, Beograd, 2003.
- [27] Kadelburg Z., Mičić V., Ognjanović S., *Analiza sa algebrom 4, udžbenik sa zbirkom zadataka za 4. razred Matematičke gimnazije*, KRUG, Beograd, 2003.
- [28] Kečkić J. D., *Matematika és feladatgyűjtemény - a középiskolák III. osztálya számára*, Zavod za Udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 2005.
- [29] Krekó B., *Lineáris programozás*, KÖZGAZDASÁGI ÉS JOGI KÖNYVKIADÓ, Budapest, 1966.
- [30] Kurepa S., *Uvod u matematiku, Skupovi, strukture, brojevi*, Tehnička Knjiga, Zagreb, 1975.
- [31] Kuros A. G., *Felsőbb algebra*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.
- [32] László I., *Fermat és nagy tétele*, Természet Világa, 1999. február, 50-53. oldal
- [33] Lévárdi L., Sain M., *Matematikatörténeti feladatok*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1982
- [34] Miličić P. M., Ušćumlić M. P., *Zbirka zadataka iz više matematike I*, Naučna Knjiga, Beograd, 1982.
- [35] Svetozar M., *Elementi algebre*, Univerzitet u Novom Sadu, PMF, Institut za matematiku, Novi Sad, 1984.
- [36] Obádovics J. Gy., *Matematika*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.
- [37] Obádovics J. Gy., Szarka Zoltán, *Felsőbb matematika*, Sclar Kiadó, Budapest, 1999.
- [38] Obádovics J. Gy., *Felsőbb matematikai feladatgyűjtemény*, Sclar Kiadó, Budapest, 1999.

- [39] Obádovics J. Gy., Szarka Z., *Felsőbb matematikai összefoglaló műszakiaknak*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973.
- [40] Obradović M., Georgijević D., *Matematika és feladatgyűjtemény - a középiskolák IV. osztálya számára*, Zavod za Udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1998.
- [41] Pataki J., *A nagy Fermat-sejtés*, Élet és Tudomány, 1999. 16. szám
- [42] Peić H., Szarapka L., *100 rešenih ispitnih zadataka iz matematike*, Univerzitet u Novom Sadu, Građevinski Fakultet, Subotica, 1996.
- [43] Peić H., *Matematika I.*, Újvidéki Egyetem, Építőmérnöki Kar, Szabadka, 2005.
- [44] Peić H., Rožnjik A., *Magyar-szerb-angol matematikai szótár*, ÚJ KÉP SZÓTÁR, Vajdasági Módszertani Központ, Szabadka, 2007.
- [45] Rábai I., *Elemi matematikai példatár III. - sorozatok, sorok, válogatott feladatok*, Gondolat, Budapest, 1976.
- [46] Sain M., *Matematikatörténeti ABC*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.
- [47] Sain M., *Nincs királyi út, Matematikatörténet*, Gondolat, Budapest, 1986.
- [48] Scharnitzky V., *Matematikai feladatok - matematika a műszaki főiskolák számára*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.
- [49] Szabó L., *Diszkrét matematika*, Sopron, 2011.
- [50] Szendrei J., Tóth B., *Logika*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.
- [51] Szendrei J., *Algebra és számelmélet*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.
- [52] Szendrei J., *Matematikai feladatgyűjtemény – Tanárképző főiskolai matematika szakos hallgatók számára*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.
- [53] Szerényi T., *Analízis*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.
- [54] Stojanović V., *Zbirka rešenih zadataka za prvi razred srednjih škola*, Matematiskop, Beograd, 2003.
- [55] Vukadinović S., Stojanović V., *Zbirka rešenih zadataka za četvrti razred srednjih škola*, Matematiskop, Beograd, 1999.
- [56] Zolić A., Kadelburg Z., Ognjanović S., *Analiza sa algebrom 1, udžbenik sa zbirkom zadataka za 1. razred Matematičke gimnazije*, KRUG, Beograd, 2003.
- [57] [\\\(https://inf.nyme.hu/lszabo/konyvek/dm/dmt.pdf\)](https://inf.nyme.hu/lszabo/konyvek/dm/dmt.pdf)

CIP - Каталогизација у публикацији
Библиотека Матице српске, Нови Сад

CSIKÓS Pajor, Gizella
Algebra [Elektronski izvor] elméleti összefoglaló és
példatár / Béres Zoltán, Csikós Pajor Gizella, Péics Hajnalka ; [ábrák
Rožnjik Andrea]. - Zenta : Bolyai Farkas Alapítvány, 2011. -
1 elektronski optički disk (CD-ROM) : tekst, slika ; 12 cm

Dostupno i na: www.bolyai-zenta.edu.rs. - Nasl. s naslovnog
ekrana. - Bibliografija.

ISBN

1. Péics Hajnalka

a) Математика - Приручници